УДК 517.9:532

ИЛЬКИВ А.А.,
Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ПОРОЖДЕННАЯ ПРОБЛЕМОЙ ВЫТЕКАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ СОСУДА

В работе изучается задача, порожденная проблемой вытекания идеальной жидкости из сосуда. Исследуется проблема существования сильного решения соответствующей начально-краевой задачи математической физики. Доказана теорема о сильной разрешимости эволюционного операторного уравнения, связанного с задачей.

In the report, we study the problem generated by the process on flowing of an ideal fluid from a vessel. We investigate a problem of existence of strong solutions to the initial boundary value problem. We prove the theorem on strong solvability of the initial boundary value problem on the base of an operator equation in orthogonal sum of Hilbert spaces generated by the problem.

Введение

Изучение задач динамики тел с полостями, частично или полностью заполненными жидкостью привлекает внимание как отечественных, так и зарубежных ученых. Эти задачи связаны с проблемами океанологии, кораблестроением. Во многих случаях математические модели таких проблем существенно нелинейны и поддаются исследованию лишь численными методами.

При исследовании задач о малых движениях идеальной жидкости в ограниченной области широкое применение находят методы функционального анализа, в частности, методы теории линейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве, теории линейных самосопряженных операторов и другие.

В данной работе эти методы применены к изучению задачи математической физики, порожденной проблемой вытекания идеальной жидкости из сосуда. На одном из отверстий, названным отверстием слива, ставится граничное условие, полученное из эксперимента и связывающее давление и нормальную компоненту поля скорости. Выясняется, что наличие такого условия видоизменяет тип эволюционного уравнения, описывающего динамику жидкости. В частности, гиперболическая задача становится гиперболо-параболической и сводится к сжимающей полугруппе операторов. Это позволяет доказать теорему о существовании и единственности сильного решения задачи Коши для эволюционного уравнения в соответствующем гильбертовом пространстве, что и является основной **целью** работы.

1. Постановка задачи

Пусть идеальная тяжелая несжимаемая жидкость находится в неподвижном сосуде $\Omega \in R^3$ с липшицевой границей $\partial\Omega$. Эта граница состоит из трех частей: твердой стенки S, свободной поверхности жидкости Γ_0 и расположенной на одном уровне с Γ_0 поверхности Γ_1, которую условно назовем отверстием для слива жидкости.

В состоянии покоя на жидкость действует однородное гравитационное поле. Выберем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, чтобы уравнения свободной поверхности Γ_0, а также поверхности Γ_1 имели вид $x_3 = 0$, т.е. были перпендикулярны вектору ускорения гравитационного поля $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где $\vec{e}_i (i = 1, 2, 3)$ – орт оси Ox_i.

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Пусть $\vec{u} = \vec{u}\,(t, x)$ $(x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega)$ – поле скорости жидкости, $\rho > 0$ – постоянная плотность жидкости, $p = p(t, x)$ –

динамическое давление, т.е. отклонение полного давления от равновесного, $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Будем считать, что отклонение по нормали $\vec{n} = \vec{e}_3$, движущейся свободной поверхности $\Gamma := \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ описывается функцией

$$x_3 = \zeta(t,x), \quad x = (x_1, x_2, 0) \in \Gamma, \quad \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing.$$

Тогда → полная формулировка предлагаемой к исследованию задачи о малых движениях идеальной жидкости в сосуде Ω имеет следующий вид (см., например, [1, с. 122-140], а также [2]):

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \rho\vec{f}, \qquad div\,\vec{u} = 0\ (в\ \Omega), \quad (1.1)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{n} =: u_n = 0 \quad (на\ S), \quad \int_\Gamma \zeta\, d\Gamma = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = u_n, \quad (на\ \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1), \quad (1.3)$$

$$p = \rho g\zeta \quad (на\ \Gamma_0), \quad (1.4)$$

$$p = \gamma u_n, \quad (на\ \Gamma_1), \quad \gamma > 0, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} &\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad x \in \Omega, \\ &\zeta(0,x_1,x_2) = \zeta^0(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in \Gamma. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$ – малое поле внешних массовых сил, $\gamma > 0$ – константа.

Граничные условия (1.2) – (1.4) – это обычные кинематические и динамические краевые условия на свободной поверхности жидкости Γ_0, а граничное условие (1.5) связывает динамическое давление и нормальную компоненту скорости. Последнее обстоятельство привносит дополнительные трудности при исследовании задачи (1.1)-(1.6). При этом возникает мало изученный класс линейных дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве, и рассмотрение соответствующей задачи Коши для такого уравнения требует адекватных методов исследования.

В работе выяснено, что учет граничного условия (1.5) в конечном итоге приводит к эволюционной проблеме (6.3) для полного дифференциального уравнения второго порядка с операторным коэффициентом при старшей производной, который имеет неограниченный обратный оператор. Это потребовало нового подхода, основанного на преобразованиях, описанных в п. 6.

Особенностью проблемы (1.1)-(1.6) является и то обстоятельство, что после некоторых преобразований (проектировании векторных уравнений на подпространства и т.д.) возникает задача о нахождении решений эллиптического уравнения (уравнения Лапласа) с динамическими граничными условиями, т.е. содержащими производные по времени t, см. (4.4), (4.5).

2. Вспомогательные сведения

Начально-краевая задача (1.1)-(1.5) будет далее исследоваться методами функционального анализа, в частности, методами теории дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве.

С этой целью введем необходимые для дальнейшего функциональные (гильбертовы) пространства. Обозначим через $L_2(\Gamma)$ гильбертово пространство комплекснозначных скалярных функций $\{z(x)\}$ с нормой

$$\|\zeta\|_0^2 := \int_\Gamma |\zeta|^2\, d\Gamma \quad (2.1)$$

и соответствующим скалярным произведением. При фиксированном t функция отклонения свободной поверхности $\zeta(t, x)$ (см. (1.2)-(1.4)) принадлежит $L_2(\Gamma)$. Тогда, учитывая второе условие (1.2), т.е. условие сохранения объема жидкости при колебаниях, приходим к выводу, что

$$\zeta(t,x) \in H := L_2(\Gamma) - \{1_\Gamma\}, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.2)$$

где $1_\Gamma = (1_{\Gamma_0}; 1_{\Gamma_1})$ – единичная функция, заданная на $\Gamma := \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Для искомой функции $\vec{u}(t, x)$ будем считать, что она при фиксированном t является элементом гильбертова пространства $\vec{L}_2(\Omega)$ комплекснозначных вектор-функций с нормой

$$\|\vec{u}\|^2 := \int_\Omega |\vec{u}|^2\, d\Gamma. \quad (2.3)$$

Известно (см., например, [1], с. 106), что пространство $\vec{L}_2(\Omega)$ допускает ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega), \quad (2.4)$$

$$\vec{J}_0(\Omega) := \left\{ \begin{aligned} &\nabla\vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega):\ div\vec{w} = 0 \quad (в\ \Omega), \\ &\vec{w}\cdot\vec{n} =: w_n = 0 \quad (на\ \partial\Omega) \end{aligned} \right\}, \quad (2.5)$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) := \{\nabla\varphi \in \vec{L}_2(\Omega):\ \varphi = 0 \quad (на\ \Gamma)\}, \quad (2.6)$$

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega) := \left\{ \begin{aligned} &\nabla\Phi \in \vec{L}_2(\Omega):\ \Delta\Phi = 0 \quad (в\ \Omega), \\ &\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad (на\ S), \quad \int_\Gamma \Phi\, d\Gamma = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.7)$$

где операции $div\,w$ и $w_n = \vec{w}\cdot\vec{n}$ для элементов из $L_2(\Omega)$ понимаются в смысле теории обобщенных функций (распределений), см. [1, с. 101-102].

Разложение (2.4) ниже будет использовано для перехода от задачи (1.1)-(1.6) к задаче Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве.

3. Метод ортогонального проектирования

Опираясь на ортогональное разложение (2.4)-(2.7), представим решение $\vec{u}(t, x)$, $\nabla p(t,x)$ задачи (1.1)-(1.6) в виде

$$\vec{u} = \vec{w} + \nabla\varphi, \quad \vec{w} \in \vec{J}_0(\Omega), \quad \nabla\varphi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega), \tag{3.1}$$

$$\nabla p = \nabla\psi + \nabla\aleph, \quad \nabla\psi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega), \quad \nabla\aleph \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \tag{3.2}$$

и подставим эти выражения в первое из уравнений (1.1). Далее обозначим через P_0, $P_{0,\Gamma}$, $P_{h,S}$ ортопроекторы на подпространства (2.5)-(2.7); в силу (2.4) имеем $P_0 + P_{0,\Gamma} + P_{h,S} = I$, где I – единичный оператор в $\vec{L}_2(\Omega)$.

Применяя к обеим частям первого уравнения (1.1) проекторы P_0, $P_{0,\Gamma}$, $P_{h,S}$ соответственно, взамен (1.1) будем иметь следующие три задачи:

$$\frac{d\vec{w}}{\partial t} = P_0\vec{f}, \quad \vec{w}(0,x) = P_0\vec{u}^0, \tag{3.3}$$

$$\vec{0} = -\nabla\aleph + \rho P_{0,\Gamma}\vec{f}, \tag{3.4}$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi = -\nabla\psi + \rho P_{h,S}\vec{f}, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad (на\ S), \quad \int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \quad (на\ \Gamma), \tag{3.7}$$

$$\psi = \rho g\zeta \quad (на\ \Gamma_0), \quad \psi = \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial n} \quad (на\ \Gamma_1), \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} &\nabla\varphi(0,x) = P_{h,S}\vec{u}^0(x) \quad (x \in \Omega), \\ &\zeta(0,x) = \zeta^0(x) \quad (x \in \Gamma). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь $\vec{w} = \vec{w}(t)$, $\nabla\aleph(t)$, $\nabla\varphi(t)$ – искомые функции со значениями в гильбертовых пространствах $\vec{J}_0(\Omega)$, $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ и $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$ соответственно. В связи с этим частные производные по t заменены на обыкновенные.

Из (3.3) сразу получаем

$$\vec{w}(t,x) = \int_0^t P_0\vec{f}(\tau,x)d\tau + P_0\vec{u}^0. \tag{3.10}$$

Таким образом, исходная задача (1.1)-(1.6) распалась на два тривиальных соотношения (3.4) и (3.10) для $\nabla\aleph(t)$ и $\vec{w}(t)$ и нетривиальную проблему (3.5)-(3.9), которую и будем далее исследовать. Здесь искомыми являются функции $\nabla\varphi(t)$, $\nabla\Psi(t)$ со значениями в $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$и $\zeta(t)$ со значениями в H.

4. Переход к потенциалу смещений

Для дальнейшего исследования задачи (3.5)-(3.9) введем потенциал смещений $\Phi = \Phi(t, x)$ посредством соотношений

$$\varphi := \frac{d\Phi}{dt}, \quad \nabla\Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega). \tag{4.1}$$

Тогда из (3.5) следует, что

$$\begin{aligned} &\nabla\left(\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\Phi + \nabla\psi - \rho\nabla F\right) = 0, \\ &\nabla F := P_{h,S}\vec{f}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Отсюда приходим к интегралу Коши-Лагранжа

$$\rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \psi - \rho F = c(t), \quad x \in \Omega, \tag{4.3}$$

с произвольной функцией $c(t)$.

Запишем соотношение (4.3) в точках $\Gamma := \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ и воспользуемся граничными условиями (3.8); получим

$$\rho\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \rho g\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \rho F + c(t) \quad (на\ \Gamma_0), \tag{4.4}$$

$$\rho\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \gamma\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \rho F + c(t) \quad (на\ \Gamma_1). \tag{4.5}$$

Так как $\nabla\Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$, то (см. (2.7))

$$\Delta\Phi = 0 \quad (в\ \Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad (на\ S),$$

$$\int_\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial n}d\Gamma = 0, \quad \int_\Gamma \Phi d\Gamma = 0.$$

Итак, возникла задача об отыскании лишь одной искомой функции – потенциала смещений Φ – из краевых условий и уравнений (4.4)-(4.6), а также начальных условий, которые взамен (3.9) удобно записать в равносильном виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial n}(0,x) = \zeta^0(x), \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)(0,x) = \\ &= \frac{\partial}{\partial n}\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right) =: \zeta^1(x), \ x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{4.6}$$

5. Основное гильбертово пространство

Напомним, что для поля смещений $\nabla\Phi$ имеем (см. (2.2))

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_\Gamma = \zeta \in H. \tag{5.1}$$

Поэтому

$$\int_\Gamma \zeta d\Gamma = \int_{\Gamma_0}\zeta d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_1}\zeta d\Gamma_1 = 0. \tag{5.2}$$

Будем рассматривать функцию $\zeta = (\partial\Phi/\partial n)|_\Gamma$ отклонений подвижной поверхности Г от ее равновесного (горизонтального) положения в виде пары

$$\zeta = (\zeta_0;\zeta_1),\quad \zeta_0 := \zeta\big|_{\Gamma_0},\quad \zeta_1 := \zeta\big|_{\Gamma_1}, \tag{5.3}$$

где ζ_0 и ζ_1 заданы на Γ_0 и Γ_1 соответственно.

Введем подпространства H_i, i = 0,1, пространства H следующим образом:

$$H_0 := \{u_0 := (\zeta_0;0) : \zeta_0 \in L_2(\Gamma_0) - \{1_{\Gamma_0}\}\}, \tag{5.4}$$

$$H_1 := \{u_1 := (0;\zeta_1) : \zeta_1 \in L_2(\Gamma_1) - \{1_{\Gamma_1}\}\}. \tag{5.5}$$

Очевидно, что пространства H_0 и H_1 ортогональны относительно скалярного произведения в H. Легко проверяется, что имеет место ортогональное разложение:

$$H = H_0 \oplus H_1 \oplus H,\quad \dim H = 1, \tag{5.6}$$

$$\begin{gathered} H = \{\alpha e\},\quad \forall\alpha\in C,\quad e := (\beta_1;-\beta_0),\\ 0<\beta_i = \frac{|\Gamma_i|}{|\Gamma_0|+|\Gamma_1|} < 1,\quad \beta_0+\beta_1 = 1. \end{gathered} \tag{5.7}$$

Опираясь на это разложение, представим любой элемент $\zeta \in H$ в виде

$$\begin{gathered} \zeta = (\zeta_0;\zeta_1) = u_0 + u_1 + u,\\ u_0 \in H_0,\quad u_1 \in H_1,\quad u \in H, \end{gathered} \tag{5.8}$$

$$\begin{gathered} u_0 = (\zeta_0 - \tilde\zeta_0;0),\quad u_1 = (0;\zeta_1 - \tilde\zeta_1),\quad u = (\tilde\zeta_0;\tilde\zeta_1),\\ \tilde\zeta_i := \frac{1}{|\Gamma_i|}\int_{\Gamma_i}\zeta_i d\Gamma_i,\quad i = 0,1, \end{gathered} \tag{5.9}$$

Дальнейший путь рассмотрения задачи (4.4) – (4.7) – это проектирование пары граничных соотношений (4.4), (4.5) на ортогональные подпространства (5.6), а также введение операторов вспомогательных краевых задач вида (5.10).

Опираясь на разложение (5.8), (5.9), рассмотрим следующие вспомогательные задачи Неймана.

Первая вспомогательная задача:

$$\begin{gathered} \Delta\Phi_0 = 0\ (\textit{в}\ \Omega),\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = 0\ (\textit{на}\ S),\\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = u_0 := (\zeta_0 - \tilde\zeta_0;0)(\textit{на}\ \Gamma),\ \int_\Gamma \Phi_0 d\Gamma = 0; \end{gathered} \tag{5.12}$$

вторая вспомогательная задача:

$$\begin{gathered} \Delta\Phi_1 = 0\ (\textit{в}\ \Omega),\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0\ (\textit{на}\ S),\\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = u_1 := (0;\zeta_1 - \tilde\zeta_1)(\textit{на}\ \Gamma),\ \int_\Gamma \Phi_1 d\Gamma = 0; \end{gathered} \tag{5.13}$$

третья вспомогательная задача:

$$\begin{gathered} \Delta\Phi' = 0\ (\textit{в}\ \Omega),\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0\ (\textit{на}\ S),\\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = u' := (\tilde\zeta_0;\tilde\zeta_1)(\textit{на}\ \Gamma),\ \int_\Gamma \Phi d\Gamma = 0. \end{gathered} \tag{5.14}$$

Для каждой из этих задач выполнено достаточное условие разрешимости задачи Неймана и каждая из них имеет единственное решение ([1], с. 137-138).

Введем операторы T_0, T_1 и T, ставящие в соответствие элементами u_0, u_1 и u из H решения задач (5.12)-(5.14):

$$\Phi_0 = \Phi_0\Big|_\Omega =: T_0u_0,\quad T_0 : \ (H^{-1/2}(\Gamma_0))^* =: H^{-1/2}(\Gamma_0) \to H^1(\Omega);$$

$$\Phi_1 = \Phi_1\Big|_\Omega =: T_1u_1,\quad T_1 : \ (H^{-1/2}(\Gamma_1))^* =: H^{-1/2}(\Gamma_1) \to H^1(\Omega);$$

$$\Phi = \Phi\big|_\Omega =: Tu.$$

Тогда решение $\Phi = \Phi|_W$ задачи (4.4)-(4.7) с учетом (5.8) и (5.1) можно представить в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi. \tag{5.15}$$

Поэтому на Γ_0 и T_1 имеем:

$$\Phi\big|_{\Gamma_0} = \Phi_0\big|_{\Gamma_0} + \Phi_1\big|_{\Gamma_0} + \Phi\big|_{\Gamma_0} = \gamma_0T_0u_0 + \gamma_0T_1u_1 + \gamma_0Tu, \tag{5.16}$$

$$\Phi\big|_{\Gamma_1} = \Phi_0\big|_{\Gamma_1} + \Phi_1\big|_{\Gamma_1} + \Phi\big|_{\Gamma_1} = \gamma_1T_0u_0 + \gamma_1T_1u_1 + \gamma_1Tu, \tag{5.17}$$

где $\gamma_i(i$ = 0,1) – соответствующие операторы следа.

Будем сопоставлять любому элементу $\zeta = (\zeta_0;\ \zeta_1) \in H$ его проекции на подпространства (5.6), а этим проекциям – вектор-столбец, элементами которого являются указанные проекции. Очевидно, между элементами из H и вектор-столбцами будет изометрический изоморфизм.

Найдем проекции пары $(\Phi|_{\Gamma_0};\ \Phi|_{\Gamma_1}) \in H$ подпространства H_0, H_1 и H Для этого введем ортопроекторы P_0, P_1 и P, $P_0 + P_1 + P = I$. Тогда с учетом (5.16), (5.17) имеем

$$\left.\begin{aligned} P_0(\Phi|_{\Gamma_0};\Phi|_{\Gamma_1}) &= (\Phi|_{\Gamma_0} - \tilde\Phi|_{\Gamma_0};0) =: (A_{00}u_0 + A_{01}u_1 + A_{02}u),\\ P_1(\Phi|_{\Gamma_0};\Phi|_{\Gamma_1}) &= (0;\Phi|_{\Gamma_1} - \tilde\Phi|_{\Gamma_1}) =: (A_{10}u_0 + A_{11}u_1 + A_{12}u),\\ P'(\Phi|_{\Gamma_0};\Phi|_{\Gamma_1}) &= (\tilde\Phi|_{\Gamma_0};\tilde\Phi|_{\Gamma_1}) =: (A_{20}u_0 + A_{21}u_1 + A_{22}u). \end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

Значит, первым слагаемым в (4.4), (4.5), т.е. паре $\rho(d^2/dt^2)(\Phi|_{\Gamma_0};\ \Phi|_{\Gamma_1})$, отвечает вектор-столбец

$$\rho\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}A_{00} & A_{01} & A_{02}\\ A_{10} & A_{11} & A_{12}\\ A_{20} & A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\\ u\end{pmatrix}=\rho\frac{d^2}{dt^2}\left(Au\right), \quad (5.19)$$

$$A=\begin{pmatrix}A_{00} & A_{01} & A_{02}\\ A_{10} & A_{11} & A_{12}\\ A_{20} & A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},\quad u=\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\\ u\end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Соответственно паре $\rho(F|_{\Gamma 0}; F|_{\Gamma 1}) \in H$ отвечает вектор-столбец

$$\rho f := \rho\begin{pmatrix}f_0\\ f_1\\ f\end{pmatrix},\ f_0=\left(F\big|_{\Gamma_0}-\left(\tilde F\big|_{\Gamma_0}\right);0\right),$$
$$f_1=\left(0;F\big|_{\Gamma_1}-\left(\tilde F\big|_{\Gamma_1}\right)\right),\ f=\left(\left(\tilde F\big|_{\Gamma_0}\right);\left(\tilde F\big|_{\Gamma_1}\right)\right) \quad (5.21)$$

Далее поступим следующим образом. Произвольную до сих пор функцию $c(t)$ представим в виде суммы $c_1(t) + c_2(t)$ и выберем $c_1(t)$ и $c_2(t)$ так, чтобы

$$\rho g\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0}-c_1(t);-c_1(t)\right)=\left(\rho g\zeta_0-c_1(t);-c_1(t)\right)\in H, \quad (5.22)$$

$$\left(-c_2(t);-c_2(t)+\gamma\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_{\Gamma_1}\right)=$$
$$=\left(-c_2(t);-c_2(t)+\gamma\frac{d}{dt}\zeta_1\right)\in H. \quad (5.23)$$

Подсчет с учетом соотношения

$$\tilde\zeta_0\cdot\left|\Gamma_0\right|+\tilde\zeta_1\cdot\left|\Gamma_1\right|=0$$

показывает, что

$$c_1(t)=\rho g\beta_0\tilde\zeta_0,\quad c_2(t)=\gamma\beta_1\frac{d\tilde\zeta_1}{dt}, \quad (5.24)$$

и тогда пары (5.22) и (5.23) оказываются соответственно равными

$$\rho g u_0+\rho g\beta_1 u;\quad \gamma\beta_1\frac{du_1}{dt}+\gamma\beta_0\frac{du}{dt}. \quad (5.25)$$

Первому выражению здесь отвечает вектор-столбец

$$\rho g\begin{pmatrix}u_0\\ 0\\ \beta_1 u\end{pmatrix}=\rho g\begin{pmatrix}I & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\\ u\end{pmatrix}=:\rho g B_0 u, \quad (5.26)$$

а второму –

$$\gamma\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}0\\ u_1\\ \beta_0 u\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & \beta_0\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\\ u\end{pmatrix}=:\gamma B_1\frac{du}{dt}. \quad (5.27)$$

6. Переход к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве

Учитывая введенные обозначения и операторы (см. (5.19) – (5.27)), перепишем задачу (4.4) – (4.7) в операторной форме

$$\rho\frac{d^2}{dt^2}\left(Au\right)+\gamma B_1\frac{du}{dt}+\rho g B_0 u=\rho f(t),$$
$$u(0)=u^0,\quad u'(0)=u^1 \quad (6.1)$$

где u^0 – вектор, отвечающий ζ^0 из (4.7), а u^1 – аналогичный вектор для z^1, $u(t)$ – искомый вектор-столбец со значениями в $H = H_0 \oplus H_1 \oplus H$, а $f(t)$ – заданная функция со значениями в H.

Далее для простоты положим $\gamma/\rho = \gamma = 1$, что равносильно переобозначениям

$$\rho A\to A,\quad \gamma B_1\to B_1,\quad \rho g B_0\to B_0,\quad \rho f\to f. \quad (6.2)$$

Итак, будем рассматривать задачу Коши

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(Au\right)+B_1\frac{du}{dt}+B_0 u=f(t),$$
$$u(0)=u^0,\quad u'(0)=u^1. \quad (6.3)$$

Опишем кратко свойства операторных коэффициентов уравнения (6.3). Из (5.26) и (5.27) следует, что B_0 и B_1 ограничены в H и

$$B_0\ge 0,\quad B_1\ge 0,\quad B_0+B_1>>0. \quad (6.4)$$

Далее, для коэффициента A имеют место свойства

$$0<A\in\sigma_\infty(H). \quad (6.5)$$

Доказательство этих свойств для операторной матрицы A (см. (5.20)) проводится по тому же плану, что и соответствующее утверждение в [1, с. 137-138], и потому здесь не приводится.

Преобразуем задачу (6.3), приведя ее к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка. С этой целью проведем следующие формальные преобразования.

Введем в (6.3) новую искомую функцию $n(t)$ соотношениями

$$-iB_0^{1/2}u=:\frac{dv}{dt},\quad v(0)=0. \quad (6.6)$$

После дифференцирования имеем

$$\frac{d^2v}{dt^2}+iB_0^{1/2}\frac{du}{dt}=0,\quad v'(0)=-iB_0^{1/2}u^0. \quad (6.7)$$

Теперь соотношения (6.3) и (6.7) можно записать в виде системы

$$\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_1 & iB_0^{1/2}\\ iB_0^{1/2} & 0\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}f(t)\\ 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}u(0)\\ v(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u^0\\ 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}u'(0)\\ v'(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u^1\\ -iB_0^{1/2}u^0\end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

(Здесь оператор A для простоты вынесен за знак d^2/dt^2, этот шаг оправдан апостериори).

Введем следующие замены переменных и обозначения

$$y(t) := \left(\frac{du}{dt}; \frac{dv}{dt}\right)^t, \quad f_0(t) := \left(f(t); 0\right)^t, \tag{6.9}$$

$$A := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad B_0 := \begin{pmatrix} B_1 & iB_0^{1/2} \\ iB_0^{1/2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

Тогда (6.8) переходит в задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка в пространстве $H^2 = H \oplus H$:

$$\begin{aligned} &A\frac{dy}{dt} + B_0 y = f_0(t), \\ &y(0) = y^0 := \left(u^1; -iB_0 u^0\right)^t. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Особенностью уравнения (6.11) является тот факт, что оператор A имеет неограниченный обратный. Однако выясняется, что задачу (6.11) можно преобразовать к стандартному виду. С этой целью осуществим в (6.11) следующую замену

$$y(t) = e^{at} z(t), \quad a > 0. \tag{6.12}$$

Тогда вместо (6.11) возникает задача Коши

$$A\frac{dz}{dt} + B_a z = f_a(t) := e^{-at} f_0(t), \quad z(0) = y^0, \tag{6.13}$$

$$B_a = B_0 + aA = \begin{pmatrix} B_1 + aA & iB_0^{1/2} \\ iB_0^{1/2} & aI \end{pmatrix}, \quad a > 0. \tag{6.14}$$

Лемма 2. *При любом $a > 0$ оператор B_a обратим, и обратный имеет вид*

$$\begin{aligned} &B_a^{-1} = \begin{pmatrix} B_a^{-1} & -ia^{-1}B_a^{-1}B_0^{1/2} \\ -ia^{-1}B_0^{1/2}B_a^{-1} & a^{-1}\left(I - a^{-1}B_0 B_a^{-1} B_0^{1/2}\right) \end{pmatrix}, \\ &B_a = B_1 + aA + a^{-1}B_0. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Осуществим теперь в (6.13) замену

$$A^{-1/2} z = w \tag{6.16}$$

и подействуем слева оператором $A^{-1/2}$. Возникает задача Коши

$$\frac{dw}{dt} + A^{-1/2}B_a A^{-1/2} w = A^{-1/2} f_a(t), \quad w(0) = A^{1/2} z(0), \tag{6.17}$$

которая уже имеет изученный вид.

*7. **О разрешимости начально-краевой задачи***

Рассмотрим задачу Коши для модифицированного уравнения

$$\begin{aligned} &A^{1/2}\frac{d}{dt}\left(A^{1/2}\frac{du}{dt}\right) + \left(B_1\frac{du}{dt} + B_0 u\right) = f(t), \\ &u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Определение 1. Будем говорить, что задача Коши (7.1) имеет на отрезке $[0,T]$ сильное решение со значениями в $D(A^{-1/2})$, если в (7.1) все слагаемые являются непрерывными функциями t со значениями в $D(A^{-1/2})$ и выполнены начальные условия.

Форма задачи (6.17) позволяет установить существование и единственность решения задачи (7.1), а вместе с этим и задачи (6.3).

Теорема 2. *Пусть в (7.1) выполнены следующие условия*:

$$u^0 \in H, \quad u^1 \in H, \quad B_1 u^1 + B_0 u^0 \in D\left(A^{-1/2}\right); \tag{7.5}$$

$$f(t) \in C^1\left([0,T]; D\left(A^{-1/2}\right)\right). \tag{7.6}$$

Тогда задача (7.1) для модифицированного уравнения имеет на отрезке $[0,T]$ единственное сильное решение $u(t)$ со значениями в $D(A^{-1/2})$.

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши (6.17) с операторным коэффициентом $A^{-1/2}B_aA^{-1/2}$. Из (6.10) и леммы 2 следует, что этот оператор имеет ограниченный обратный оператор $A^{-1/2}B_aA^{-1/2}$, заданный на всем пространстве H^2. Отсюда и из свойства

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\left(B_a z, z\right)_{H^2} = \left((B_1 + aA)z_1, z_1\right)_H + \\ &+ a\|z_2\|_H^2 \geq 0, \quad \forall z \in H^2, \end{aligned} \tag{7.7}$$

получаем, что на области определения

$$D\left(A^{-1/2}B_aA^{-1/2}\right) = R\left(A^{1/2}B_a^{-1}A^{1/2}\right) \subset H \tag{7.8}$$

оператор $A^{-1/2}B_aA^{-1/2}$ является максимальным аккретивным, т.е.

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\left(A^{-1/2}B_aA^{-1/2}z, z\right)_{H^2} = \\ &= \operatorname{Re}\left(B_aA^{-1/2}z, A^{-1/2}A^{-1/2}z\right)_{H^2} \geq 0, \\ &\forall z \in D\left(A^{-1/2}B_aA^{-1/2}\right), \end{aligned} \tag{7.9}$$

причем область значений

$$R\left(A^{-1/2}B_aA^{-1/2}\right) = H^2. \tag{7.10}$$

Значит (см. [3, с.110]), оператор $-A^{-1/2}B_aA^{-1/2}$ является генератором сжимающей C_0 – полугруппы, действующей в H^2.

Воспользуемся теперь утверждением теоремы 2. Проверим, что при выполнении условий (7.5) и (7.6) выполнены условия вида (7.3).

Действительно, если выполнены условия (7.5), то в задаче (6.17) $A^{-}w(0) \in D(^{1/2}B_aA^{-1/2})$. В самом деле, согласно (6.12) и (6.11) имеем

$$\begin{aligned} &A^{-1/2}B_aA^{-1/2}w(0) = A^{-1/2}B_a z(0) = \\ &= A^{-1/2}B_a y^0 = \begin{pmatrix} A^{-1/2}\left((B_1 + aA)u^1 + B_0 u^0\right) \\ iB_0 u^1 - iaB_0 u^0 \end{pmatrix} \in H^2, \end{aligned} \tag{7.11}$$

поскольку $Au^1 \in D(A^{-1}) \subset D(A^{-1/2})$, $B_1u^1 + B_0u^0 \in D(A^{-1/2})$ по условию. Далее, если выполнено условие (7.6), то

$$A^{-1/2} f_a(t) = \left(A^{-1/2} e^{-at} f(t); 0\right)^t = \\ = e^{-at}\left(A^{-1/2} f(t); 0\right)^t \in C^1\left([0,T]; H^2\right). \qquad (7.12)$$

Таким образом, для задачи (6.17) выполнены условия, приведенные в теореме 1, и потому эта задача имеет единственное сильное решение $w(t)$ на отрезке $[0,T]$ со значениями в H^2. Поэтому после применения слева в (6.17) оператора $A^{1/2} \in L(H^2)$ и обратной замены (6.16) приходим к выводу, что задача Коши

$$A^{1/2}\frac{d}{dt}\left(A^{1/2}z\right) + B_a z = f_a(t), \quad z(0) = y^0, \qquad (7.13)$$

имеет единственное сильное решение на $[0,T]$ со значениями в $D(A^{-1/2})$, т.е. все слагаемые в (7.13) принадлежат $C([0,T]; D(A^{-1/2}))$.

Отсюда с учетом (6.12) и (6.9) получаем систему уравнений

$$A^{1/2}\frac{d}{dt}\left(e^{-at}A^{1/2}\frac{du}{dt}\right) + \\ + e^{-at}\left(\left(B_1 + aA\right)\frac{du}{dt} + iB_0^{1/2}\frac{dv}{dt}\right) = \\ = e^{-at} f(t), u(0) = u^0, u'(0) = u^1, \qquad (7.14)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-at}\frac{dv}{dt}\right) + \\ + e^{-at}\left(iB_0^{1/2}\frac{du}{dt} + a\frac{dv}{dt}\right) = 0, \qquad (7.15) \\ v(0) = 0, \quad v'(0) = -iB_0^{1/2}u^0.$$

При этом в (7.14) все слагаемые, в том числе и выражение

$$\left(\left(B_1 + aA\right)\frac{du}{dt} + iB_0^{1/2}\frac{dv}{dt}\right), \qquad (7.16)$$

принадлежат $C([0,T]; D(A^{-1/2}))$, а в (7.15) – пространству $C([0,T]; H)$.

Из (7.15) приходим к выводу, что $dv/dt = iB^{1/2}_0u \in C^1([0,T]; H)$; подставляя это выражение в (7.14) и сокращая на экспоненту, получаем

$$A^{1/2}\frac{d}{dt}\left(A^{1/2}\frac{du}{dt}\right) - aA\frac{du}{dt} + \\ + \left(\left(B_1 + aA\right)\frac{du}{dt} + B_0 u\right) = f(t), \qquad (7.17) \\ u(0) = u^0, \ u'(0) = u^1.$$

Однако выражение в скобках $Adu/dt \in C^1([0,T]; D(A^{-1}))$. В самом деле, из теоремы существования и единственности сильного решения $w(t)$ задачи (6.17) следует, что $B_aA^{-1/2}w = B_az = e^{-at}B_ay \in C([0,T]; D(H^2))$, а потому $du/dt \in C([0,T]; D(H))$. Следовательно, $Adu/dt \in C^1([0,T]; D(A^{-1})) \subset C([0,T]; D(A^{-1/2}))$, и это слагаемое можно вынести за скобку в выражении (7.16). Отсюда и из (7.17) получаем, что модифицированное уравнение (7.1) имеет на отрезке $[0,T]$ единственное сильное решение в смысле определения 1.

Выводы

В работе изучена задача, порожденная проблемой вытекания идеальной жидкости из сосуда. Исследована проблема существования сильного решения соответствующей начально-краевой задачи математической физики. Доказана теорема о сильной разрешимости эволюционного операторного уравнения, связанного с задачей.

На основе теоремы 2 можно доказать теорему о разрешимости исходной начально-краевой задачи (1.1)-(1.6). Это будет сделано в другой работе.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
2. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 450 с.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
4. *Ильків А.А.* О спектральной задаче, порожденной проблемой вытекания идеальной жидкости из сосуда. Таврическая научная конференция студентов и молодых специалистов по информатике и математике. – Симферополь, 2006, – С. 20-22.

Стаття надійшла до редакції 03.11.2008 р.