

## ВЛИЯНИЕ ОТВЕРСТИЙ НА КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС

С целью определения присоединенных масс с помощью современных методов гидромеханики построено решение как аппроксимацию краевой задачи о потенциале. Решена задача учета влияния отверстия на коэффициенты присоединенных масс. Приведены численные примеры определения относительных коэффициентов присоединенных масс для непроницаемой и содержащей отверстие сферы и проведено сопоставление с результатами эксперимента. Представлены численные результаты, позволяющие оценить влияние размеров и расположения отверстия на коэффициенты присоединенных масс для сферы.

**Ключевые слова:** идеальная несжимаемая жидкость, обтекание, потенциал, присоединенные массы, инфильтрация через отверстие, влияние относительной площади и смещения отверстия сферы.

З метою визначення приєднаних мас за допомогою сучасних методів гідромеханіки побудовано розв'язок як аппроксимацію краєвої задачі про потенціал. Розв'язана задача обліку впливу отворів на коефіцієнти приєднаних мас. Подані численні приклади визначення відносних коефіцієнтів приєднаних мас для суцільної та кулі, що має отвір; здійснено співставлення з результатами експериментальних випробувань. Наведені чисельні результати, що дозволяють оцінити вплив розмірів і розташування отворів на коефіцієнти приєднаних мас кулі.

**Ключові слова:** ідеальна рідина, що не стискується, обтікання, потенціал, приєднання мас, інфільтрація крізь отвір, вплив відносної площі і зміщення отворів сфери.

To determinate apparent mass by using naval hydrodynamics methods is made an approximated solution of potential boundary-value problem. The problem of influence orifice on apparent mass coefficients is solved. Numericals examples of coefficients definition for sphere and comparison for experimental data are given. The numerical data for different factors such as size and displacement for sphere apparent mass is obtained.

**Keywords:** apparent mass, hydrodynamics methods, potential boundary-value problem, influence orifice, size and displacement for sphere.

Проектирование подводных аппаратов для аварийного спасательных работ сталкивается с необходимостью уменьшения массогабаритных показателей, в том числе и технологического оборудования. Одним из эффективных конструкторских решений является использование разгруженных оболочковых конструкций с отверстиями. Однако, как показывают экспериментальные исследования [1; 5], влияние этих отверстий на величины коэффициентов присоединенных масс является существенным и не может не учитываться при исследовании

динамики как самого подводного аппарата, так и его систем, например манипуляторов, либо выдвигающихся элементов.

Как известно, учет влияния формы тела на коэффициенты присоединенных масс является одной из сложнейших математических задач гидродинамики [1-4]. Обобщенные данные для тел различных форм, которые приведены в известной литературе, например [1], содержат недостаточно данных о влиянии отверстий на присоединенные массы и не позволяют производить их вычисление, что выдвигает проблему определения присоединенных масс при проектировании в ряд основных не разрешенных проблем. Экспериментальное нахождение последних является дорогостоящим процессом, поэтому теоретическое определение коэффициентов присоединенных масс актуальная инженерно-техническая задача.

Поставим целью настоящей статьи построить модель, позволяющую определить влияние отверстий на коэффициенты присоединенных масс.  $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}$ .

Постановка задачи. Рассмотрим абсолютно твердое тело произвольной формы, что движется в несжимаемой неограниченной идеальной жидкости.

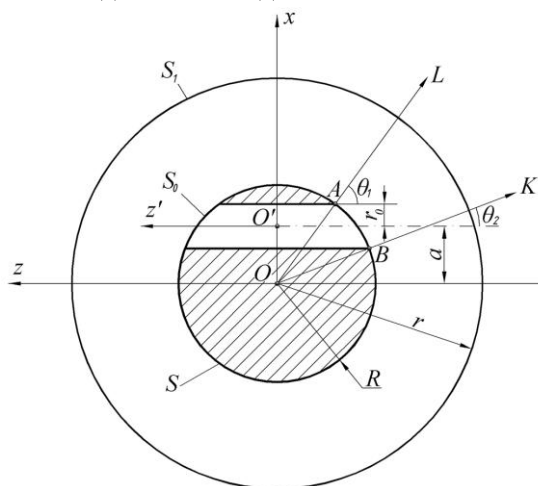


Рис. 1. Разрез тела с отверстием

Введем обозначения:  $\vec{u}$  – скорость движения произвольной точки тела;  $V$  – объем тела, вычисленный по внешней нормали к поверхности до образования отверстия, а  $V_0$  – объем отверстия, т. е. величина, на которую уменьшился объем тела в результате образования отверстия. Тогда потенциал может быть представлен в виде суммы

$$\varphi(x, y, z) = \varphi^H(x, y, z) \cdot f_1(x, y, z) + \varphi^o(x, y, z) \cdot f_2(x, y, z),$$

где  $\varphi^H(x, y, z)$  – потенциал жидкости при движения тела без отверстий,  $\varphi^o(x, y, z)$  – потенциал при движения тела с отверстием, а  $f_1(x, y, z)$  и  $f_2(x, y, z)$  единичные кусочно-непрерывные функции. Первая из них принимает соответственно значение единицы на внешнем пространстве, ограниченном телом без отверстия, и нуль внутри его. Вторая принимает значение единицы внутри пространства ограниченного поверхностью тела и боковой поверхностью отверстия, а нуль вне его.

Предположим, что выражение для потенциала представлено в виде ряда через однородные гармонические полиномы

$$\varphi = \frac{C_1 x + C_2 y + C_3 z}{R^3} + \dots + \frac{\Theta_n(x, y, z)}{R^{2n+1}} \dots \tag{1}$$

где  $C_1, C_2, C_3$  – константы,  $\Theta_n$  – однородный гармонический полином степени  $n$  [2]. Тогда, в соответствии с общепринятой теорией несжимаемой идеальной жидкости, импульс давлений и потенциал связаны соотношением

$$p_t = -\rho\varphi,$$

а вектор импульса бесконечной массы жидкости через импульс давления на поверхности твердого тела

$$\vec{Q} = -\int_S p_t \vec{n} dS = \rho \int_S \varphi \vec{n} dS = \rho \int_S \varphi \frac{\partial \vec{\Phi}_1}{\partial n} dS,$$

где  $\varphi = \vec{u}_o \cdot \vec{\Phi}_1 + \vec{\Omega} \cdot \vec{\Phi}_2$

вектор функции  $\vec{\Phi}_1$  и  $\vec{\Phi}_2$  определены как  $\vec{\Phi}_1 = \varphi_1 \vec{i} + \varphi_2 \vec{j} + \varphi_3 \vec{k}$

$$\vec{\Phi}_2 = \varphi_4 \vec{i} + \varphi_5 \vec{j} + \varphi_6 \vec{k}.$$

Введем сферу образованную поверхностью  $S_1$  радиуса  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  с центром в начале системы координат OXYZ, которая также связана с телом поверхности  $S$  (Рис. 1). В конечном объеме жидкостями между этими поверхностями для гармонических функций потенциала и радиуса вектора применим вторую формулу Грина, учитывая при этом, что на поверхности

тела выполняется условие  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_n$ , запишем

$$\vec{Q} = \rho \int_S \vec{r} u_n dS - \rho \int_{S_1} (\varphi \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} - \vec{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n}) dS_1 \tag{2}$$

Поскольку вектор скорости определен для каждой из точек внутри его объема ограниченного поверхностью тела и поверхностью отверстия  $S$ , с помощью теоремы Остроградского-Гауса запишем

$$\begin{aligned} \int_S \vec{r} u_n dS &= -\int_V (u_x \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}) dV = -\int_{V_T} \vec{u}_T dV - \int_{V_0} \vec{u}_0 dV = -\left( \int_{V_T} \vec{u}_T * - V_0 \vec{u}_0 * \right) \\ &= -V \vec{u}_T * \left( 1 - \frac{V_0}{V} \left( 1 - \frac{V_0 \vec{u}_0}{V \vec{u}_T *} \right) \right) \end{aligned} \tag{3}$$

где  $\vec{u}_T * = \frac{1}{V_T} \int_{V_T} \vec{u}_T dV$  – среднее значение скорости вычисленное по объему тела, которое для

поступательного движения равно  $\vec{u}$ , а  $\vec{u}_0 * = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \vec{u}_0 dV$

- среднее значение скорости жидкости, вычисленное по объему отверстия в теле. Знак «минус» в последнем выражении обусловлен переходом от внешней к внутренней нормали;
- $\vec{u}_0 = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \vec{u}_T dV$  – среднее значение скорости тела без отверстия, вычисленное по объему отверстия в теле.

Второй интеграл в соотношении (2) вычислим, проделав преобразование потенциала (1). Устремим радиус внешней сферы в бесконечность, при этом разложим в ряд по параметру  $S_{oi}$  – площади проекций поверхности тела вырезанной отверстиями на плоскость перпендикулярную оси  $i$

$$\varphi = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\sum_{k=0}^P C_{ink} x_i^n S_{oi}^k}{r^{2n+1}}$$

где обозначено  $C_{ink} = \frac{\partial^{(k)} C_{in}}{k! \partial S^k}$ , причем принято, что  $O' = I$ ,  $S_{oi}^k$  – площадь проекции поверхности тела, вырезанной отверстиями на плоскость перпендикулярную оси  $i$ . Заметим, что

$$\text{на сфере } \varphi \sim \frac{\vec{r} \cdot \sum_{i=0}^3 C_{ink} \vec{i}}{r^3} = \frac{\left( \sum_{i=0}^3 C_{ink} \vec{i} \right) \cdot \vec{r}}{r^3} \text{ и } \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sim \frac{2 \left( \sum_{i=0}^3 C_{ink} \vec{i} \right) \cdot \vec{r}}{r^2}$$

для  $n=1$  и следовательно второй интеграл (2) представится суммой

$$\int_{S_1} \left[ \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\sum_{R=0}^P C_{ink} x_i^n S_{oi}^k}{r^{2n+1}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} - \vec{r} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\sum_{R=0}^P C_{ink} x_i^n S_{oi}^k}{r^{2n+1}} \right) \right] dS_1 = \quad (4)$$

$$= 3 \int_{S_1} \sum_{n=1}^N \vec{r} \sum_{i=1}^3 \frac{C_{ino} x_i^n}{r^{2n+1}} dS_1 + 3 \int_{S_1} \sum_{n=1}^N \vec{r} \sum_{i=1}^3 \frac{C_{ink} x_i^n S_{oi}^k}{r^{2n+1}} dS_1$$

Эти интегралы при  $\vec{r} \rightarrow \infty$  в силу существенности членов только с  $n=1$  преобразуются по формуле Остроградского- Гаусса к величине

$$4\pi \sum_{i=1}^3 C_{i10} \cdot \frac{\vec{x}_i}{x_i} + 4\pi \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^p C_{ik} \frac{\vec{x}_i}{x_i} S_{oi}^k \quad (5)$$

Таким образом, импульс бесконечного объема несжимаемой идеальной жидкости возмущенной движением тела определяется с учетом (3) и (5)

$$\vec{Q} = -\rho V \cdot \vec{u} - 4\pi \rho \sum_{i=1}^3 C_{i10} \frac{\vec{x}_i}{x_i} - 4\pi \rho \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^p C_{ik} \frac{\vec{x}_i}{x_i} S_{oi}^k \quad (6)$$

В случае отсутствия отверстий выражение (6) допускает предельный переход

$$\vec{Q}^H = -\rho V \cdot \vec{u} - 4\pi \rho \sum_{i=1}^3 C_{i10} \frac{\vec{x}_i}{x_i} = \frac{1}{2} \rho V u,$$

а коэффициент присоединенных масс определится

$$\lambda_{ii} = -\rho \left( V + 4\pi \sum_{i=1}^3 C_{i10} \frac{\vec{x}_i}{u x_i} \right).$$

С учетом последнего введем коэффициент, определяющий влияние отверстий на величину присоединенных масс

$$k_{ii} = \frac{\lambda_{ii}^o}{\lambda_{ii}^H} = \frac{\vec{Q}}{\vec{Q}^H} = 2 \left( 1 - \frac{V_0}{V} \left( 1 - \frac{V_0 \vec{u}_0^*}{V \vec{u}_r^*} \right) \right) + \frac{4\pi \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^p C_{ik} \frac{\vec{x}_i}{x_i} S_{oi}^k}{V \cdot u + 4\pi \sum_{i=1}^3 C_{i10} \frac{\vec{x}_i}{x_i}}$$

### Моделирование и обсуждение результатов

Рассмотрим тело сферической формы. Предположим, что в нем образовано отверстие цилиндрической формы радиуса  $r_0$ , ось которого проходит параллельно оси OZ системы координат OXYZ, проходящей через центр сферы причем расстояние между осями равно  $a$ .

Для вычисления объема отверстия  $V_0$  разобьем удаленное пространство на два сферических сегмента и два усеченных цилиндра. Объемы сферического сегмента вычислим по радиусу  $r_0'$  и высоте  $h$

$$V_0^1 = \pi h (3r_0'^2 + h^2), \text{ где } r_0' = \frac{r_0 R}{\sqrt{R^2 - a^2}}; h = R - \sqrt{R^2 - r_0'^2}$$

Объем усеченного цилиндра вычислим через среднее значение длины образующий.

$$V_0^2 = \pi r_0'^2 \frac{(h_1 + h_2)}{2},$$

$$\text{где } h_1 = \sqrt{R^2 - (a + r_0)^2}; \quad h_2 = \sqrt{R^2 - (a - r_0)^2}$$

$$V_0 = 2(V_0^1 + V_0^2)$$

Относительный коэффициент присоединенных масс представляется соотношениями

$$k_{ii} = 2\left(1 - \frac{V_0}{V}\left(1 - \frac{V_0}{V} \frac{\vec{u}^*}{\vec{u}^*}\right)\right) + \frac{8\pi}{Vu} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=0}^P \frac{\partial^k C_{i1}}{\partial S^k} \cdot \frac{S_0^k}{k! \pi^k R^{2k}}$$

Расчеты выполнены для сферы  $R=1m$ ,  $r_0 \in [0; 1/2]$ ,  $a \in [0; R/2]$   $C_{i1} = -\frac{V_0 u}{16\pi S_0}$ ,

$$k = 1, \frac{\vec{u}_0^*}{\vec{u}_r^*} = 1.$$

Результаты расчетов приведены в таблицах 1-3. Таблица 1 содержит данные расчетов и эксперимента [4]. Таблицы 2-3 содержат данные о влиянии смещения отверстия на коэффициенты присоединенных масс.

Таблица 1

**Влияние радиуса отверстий на коэффициенты присоединенной массы**

$r_0/R$	$k_{11}$	$k_{22}$	$k_{33}$	$k_{33}$ данные [4]
0.1	0,999944	0,999943562	0,977668	0,980595
0.2	0,999088	0,999087908	0,91267	0,92352
0.3	0,995305	0,995304608	0,810828	0,832195
0.4	0,984806	0,984806175	0,681288	0,71232
0.5	0,961749	0,961748665	0,535697	0,571875
0.6	0,917568	0,917568	0,387072	0,42112
0.7	0,83981	0,839810295	0,248432	0,272595
0.8	0,709632	0,709632	0,131328	0,14112
0.9	0,493745	0,493745026	0,044839	0,043795
1	0	0	0	0

Таблица 2

**Влияние радиуса отверстий и смещения на коэффициенты присоединенной массы,  $a = 0,05$**

$r_0/R$	$a=0.05$			$a=-0.05$		
	$k_{11}$	$k_{22}$	$k_{33}$	$k_{11}$	$k_{22}$	$k_{33}$
0.1	0,99983	0,999943491	0,977696	1,000057	0,99943491	0,977696
0.2	0,998168	0,999086746	0,912784	1,000006	0,999086746	0,912784
0.3	0,992118	0,995298498	0,811088	0,998483	0,995298498	0,811088
0.4	0,976983	0,984785778	0,681767	0,992616	0,984785778	0,681767
0.5	0,945759	0,9616951	0,536487	0,977749	0,9616951	0,536487
0.6	0,888323	0,917445898	0,388326	0,946981	0,917445898	0,388326
0.7	0,789934	0,839554272	0,250471	0,890485	0,839554272	0,250471
0.8	0,627721	0,709113848	0,135103	0,794684	0,709113848	0,135103
0.9	0,356289	0,492648116	0,056037	0,645993	0,492648116	0,056037

Таблица 3

**Влияние радиуса отверстий и смещения на коэффициенты присоединенной массы,  $a = 0,1$**

$r_0/R$	$a = 0,1$			$a = -0,1$		
	$k_{11}$	$k_{22}$	$k_{33}$	$k_{11}$	$k_{22}$	$k_{33}$
0.1	0,999716	0,999943277	0,977781	1,000171	0,999943277	0,977781
0.2	0,997238	0,999083234	0,913127	1,00093	0,999083234	0,913127

0.3	0,988895	0,995280024	0,811874	1,001683	0,995280024	0,811874
0.4	0,969063	0,984724098	0,683211	1,000496	0,984724098	0,683211
0.5	0,929567	0,961533072	0,538881	0,993976	0,961533072	0,538881
0.6	0,858715	0,917076395	0,392159	0,977119	0,917076395	0,392159
0.7	0,739435	0,838778992	0,25682	0,943525	0,838778992	0,25682
0.8	0,544117	0,707542973	0,147592	0,888808	0,707542973	0,147592

Как следует из анализа данных таблиц, симметричное смещение отверстий в плоскости XOZ параллельно оси OZ изменяет коэффициенты присоединенных масс  $k_{11}$  и не влияет на коэффициенты  $k_{22}$  и  $k_{33}$ . Последний результат полностью соответствует выводам, основанным на симметрии обтекания.

Таким образом, несмотря на допущения, принятые для упрощения расчетов, при малых смещениях отверстий соотношения для коэффициентов присоединенных масс качественно и количественно учитывают влияние отверстий и их расположение.

#### Выводы:

1. В соответствии с современным состоянием, построена и решена задача об учете влияния отверстий на коэффициент присоединенных масс.
2. Полученные в работе результаты, представленные в форме конкретных соотношений могут служить основой для составления дифференциальных уравнений движения элементов конструкций подводных аппаратов, а также для построения алгоритмов и рабочих программ при исследовании динамики и систем управления.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Короткин А.И. Присоединенные массы судна. – Л., Судостроение, 1986. – С. 308.
2. Дыхта Л.М. Гидродинамическая задача о движении и колебаниях полу погружного эллипсоида // Труды НКИ. Вып. 102. – Николаев, 1975. – С. 102-108.
3. Дыхта Л.М. Общие формулы для расчета гидродинамических реакций при качке удлиненного судна // Труды НКИ. Вып. 189. – Николаев, 1982. – С. 24-30.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1984. – Т. 2. – С. 560.
5. Трунов А.Н. Математическая модель подводного аппарата с изменяющейся геометрией корпуса ISSN1609-7742 // Наукові праці Миколаївського державного гуманітарного університету ім. Петра Могили. Науково-методичний журнал. Т. 41. Вип. 28, 2005. – С. 21-31.
6. Трунов О.М. Застосування відеотехнологій визначення приєднаних мас систем моніторингу водної акваторії. ISSN 1609-7742 // Наукові праці Миколаївського Державного гуманітарного університету ім. Петра Могили. Науково-методичний журнал. Т. 77. Вип. 64, 2008. – С. 57-63.

Автор выразит искреннюю благодарность профессору доктору технических наук Леониду Михаловичу Дыхте, чьи работы и советы стимулировали настоящее исследование

Рецензенты: д.т.н., професор Каіров О.С.,  
к.т.н., доцент Соловійов С.М.

© Трунов О.М., 2009

Стаття надійшла до редколегії 25.05.09