# ПРИРОДОЗНАВСТВО. ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 51(07):373.5.016

**Дмитро БЕЛЕШКО,**
*кандидат педагогічних наук,*
*професор кафедри математики*
*з методикою викладання*
*Рівненського державного гуманітарного університету*

# МЕТОД ДОВЕДЕННЯ ВІД СУПРОТИВНОГО. ДЕЯКІ ПИТАННЯ МЕТОДИКИ. ПОЗАКЛАСНА РОБОТА*

*У статті проаналізовано теоретичні основи доведення методом від супротивного; розглянуто класичні та некласичні схеми, практичне застосування означеного доведення, деякі питання методики, роль усних вправ та використання методу від супротивного в позакласній роботі.*

***Ключові слова:*** *теорема, метод від супротивного, закон виключення третього, класична та некласична схеми.*

*В статье проанализированы теоретические основы доказательства методом от противного; рассмотрены классические и неклассические схемы, практическое применение указанного доказательства, некоторые вопросы методики, роль устных упражнений и использование метода от противного во внеклассной работе.*

***Ключевые слова:*** *теорема, метод от противного, закон исключенного третьего, классическая и неклассическая схемы.*

*In the article analyzes the theoretical basis of the method of proof by contradiction, considered the classical scheme of proof by contradiction, non-classical scheme of proof by contradiction method, the practical application of the method of proof by contradiction, some issues of methodology, the role of oral exercises and use the method of contradiction in extracurricular activities.*

***Key words:*** *theorem, the method of contradiction, the law of excluded middle, classical and non-classical scheme.*

**Основні труднощі методу від супротивного**

Зазвичай виокремлюють труднощі трьох видів: математичні, логічні та психологічні. Перші два види нами вже були розглянуті, тож зупинимося на третьому. Зауважимо, що учні, які вперше стикаються з міркуваннями методом від супротивного, відчувають такі основні психологічні бар'єри:

1. Доведення від супротивного видається школярам штучним. Вони вважають, що краще йти природним шляхом, встановлюючи ланцюжок зв'язків між умовою і висновком теореми.

2. Саме припущення, особливо, якщо воно неправильно сформульоване, викликає у школярів психологічну складність, видається їм доведенням неправильності припущення, а отже, наступні міркування, на їхню думку, є зайвими. Таким чином, малюнок, покликаний допомогти учням у міркуваннях, може навпаки – заплутати дитячі роздуми, відвернути від них увагу, зробити їх непотрібними.

3. Багато учнів протестують проти запам'ятовування доведення методом від супротивного. Якщо докладніше проаналізувати це явище, то можна з'ясувати, що воно засноване на наступному: маючи справу з доведенням від супротивного, ми змушені зосереджувати свої основні зусилля не на правильній теоремі, а на хибному припущені та наслідках, що випливають із цього, таким чином, засмічуючи свою пам'ять хибними фактами, які, насправді, потрібно якнайшвидше забути, запам'ятавши лише формулювання теореми, яка знадобиться в майбутньому.

Отже, творчо працюючому вчителю є над чим поміркувати.

**Основні типи помилок**

Доведення теорем методом від супротивного нерідко супроводжується помилками. Виокремлюють такі типи помилок:

**Тип 1.** Помилки, що виникають у зв'язку з нерозумінням логічної суті методу від супротивного. Найчастіше зустрічається наступна помилка: учні часто трактують твердження "припустимо протилежне" як "припустимо, що це правильно".

**Приклад 28.** Доведіть рівняння

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2.$$

Учні міркують наступним чином: піднесемо до куба обидві частини рівняння:

* *Закінчення. Початок у № 4 (80) 2014 р.*

$$14-3\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right)^2\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}+3\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^2=8$$

або

$$3\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^2=6,$$

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=1,$$

$$\sqrt[3]{(5\sqrt{2})^2-7^2}=1,\quad \sqrt[3]{1}=1,\quad 1=1.$$

Це й потрібно було довести.

**Тип 2.** Помилка на етапі "припустимо протилежне".

**Приклад 29.** Периметр прямокутника – 14 см. Доведіть, що довжина кожної сторони менше 7 см.

**Розв'язок.** Потрібно довести, що довжина кожної сторони прямокутника менше 7 см. Припустимо, що довжина кожної сторони не менше 7 см, тобто:

1) або більше 7 см;

2) або рівна 7 см.

У першому випадку сума двох протилежних сторін більше 14 см, тобто більше даного периметра. Таким чином, довжина сторони прямокутника не може бути більша, ніж 7 см.

У другому випадку протилежна сторона по довжині також буде рівна 7 см. Отже, сума довжин двох сторін складає 14 см, а периметр – більше 14 см. Таким чином, довжина сторони не може бути рівна 7 см.

**Істина.** Якщо периметр прямокутника 14 см, то довжина кожної сторони – менше 7см.

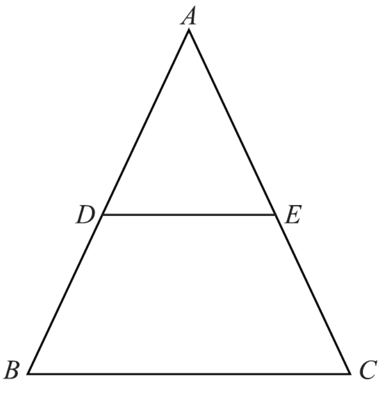
Розв'язання має грубу помилку на етапі припущення. Зокрема, якщо нам потрібно довести, що довжина кожної сторони менше 7 см, то «протилежним» буде неприпущення про те, що довжина кожної сторони – не менше 7 см, а зовсім інше – потрібно припустити, що хоча б одна сторона має довжину не менше 7 см.

**Тип 3.** Помилки, допущені на етапі отримання суперечності, також досить різноманітні, наприклад:

1. Учень помилково використовує відому теорему у випадку, коли ця теорема не може застосовуватися.
2. Учень спирається не на теорему, яка застосовується в даній ситуації, а на обернену їй.
3. Учень для підтвердження свого висновку спирається не на теорему, а на малюнок.
4. Учень спирається на твердження, яке ніколи раніше не доводилося. Воно може виявитися як правильним, так і неправильним.
5. Учень допускає логічні помилки, зокрема висновки робляться на основі помилкових тверджень.

**Приклад 30.** Розглянемо уривок із контрольної роботи:

Дано: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$




Довести: $\angle ADE=\angle ABC$.

**Доведення:** припустимо протилежне, що $\angle ADE\neq\angle ABC$, тоді $BC$ непаралельне $DE$, а отже, $\frac{AD}{AB}\neq\frac{AE}{AC}$, що суперечить умові. Таким чином, $\angle ADE=\angle ABC$, що і потрібно було довести.

При доведенні учень використовував теорему: якщо $DE$ непаралельне $BC$, то $\frac{AD}{AB}\neq\frac{AE}{AC}$, яка є неправильною.

**Тип 4.** Помилки, що виникають через нерозуміння терміна «суперечності».

У шкільних підручниках відсутнє пояснення таких важливих понять, як «логічна несумісність», «суперечні твердження», «протилежні твердження». Учні засвоюють їх самостійно в процесі вивчення теорем і розв'язування задач. Якщо контроль із боку вчителя недостатній, то зазвичай на практиці спостерігаються випадки помилкового розуміння і неправильного застосування означених вище термінів.

**«Розмиті» елементи доведення**

Схему доведення способом від супротивного можна зобразити наступним чином:

Припустимо протилежне тому, що потрібно довести ______________________________.

Із припущення випливає, що ________________ __________________________________________.

Отримаємо суперечність: ____________________ __________________________________________.

Отже, наше припущення неправильне. Правильним є те, що ______________________________.

Варто зауважити, що в навчальній і методичній літературі представленої нами послідовності часто не дотримуються, а як наслідок – отримуємо так звані «розмиті» доведення, в яких деякі етапи пропущенні. В цьому, звісно, немає нічого страшного чи неприродного, однак потрібно пам'ятати, що, користуючись скороченим доведенням, учні повинні, за необхідності, вміти навести повні міркування.

Особливу увагу слід приділити доведенню на початку і в кінці, адже учні часто не до кінця розуміють сутності отриманої суперечності та те, в чому полягає «протилежне».

Як приклад, пропонуємо кілька «розмитих» доведень, які потрібно перетворити в повні.

**Приклад 31.** У загоні 100 чоловік. Щовечора на чергування заступають три людини. Доведіть, що неможливо скласти графік чергування таким чином, аби будь-які дві людини чергували разом лише один раз.

**Доведення.** Оберемо одного чергового. Якби потрібний у задачі розподіл чергувань був можливий, то решта 99 людей повинні були б поділитися на пари, які чергували б разом з обраною людиною. Отже, 99 – непарне число.

**Приклад 32.** Дано 173 числа, кожне з яких рівне 1 або -1. Чи можна їх розбити на дві групи таким чином, щоб сума чисел, які входять у кожну групу, була рівна?

**Розв'язання.** Припустимо, що такі дві групи існують. Тоді в одній групі числа будуть непарні, а в іншій – парні. Сума в одній групі буде непарною, а в іншій – парною. Суперечність.

Подібні перетворення вчителю нерідко доводиться виконувати у ході методичних розробок теорем шкільного курсу.

Роздуми способом від супротивного часто застосовуються при доведенні єдиності.

**Приклад 33.** Довести, що будь-які дві різні прямі можуть мати не більше однієї спільної точки.

**Доведення.** Представлена теорема – найперша зі шкільного курсу геометрії. Її доводять наступним чином: «Якби дані прямі мали дві точки перетину, то через ці точки проходили б дві різні прямі. Це неможливо, адже через дві точки проходить тільки одна пряма».

**Приклад 34.** Довести, що через кожну точку *A* прямої можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну цій прямій.

**Доведення.** Припустимо, що через точку *A* проходять дві різні прямі *b* і *c* так, що $b \perp a$, а $c \perp a$ . Нехай $b_1$ і $c_1$ – півпрямі з початковою точкою *A*, які лежать в одній півплощині відносно прямої *a*. Тоді $b \perp a$ , $\angle(b_1 a_1) = 90^0$ і $c \perp a$, то $\angle(c_1 a_1) = 90^0$. Від півпрямої $a_1 b$ в одній півплощині відкладено два кути, рівні $90^0$. Це суперечить аксіомі про відкладання кута. Наше припущення неправильне. Теорему доведено.

Якщо до прикладу 33 підходити формально, то можна стверджувати, що обидва доведення неточні, адже в них допущено помилку на етапі «припустимо протилежне». Річ у тім, що заперечення доведення теорем повинні звучати інакше, ніж це фактично зроблено:

| | |
|---|---|
| 1. Будь-які дві різні прямі можуть мати не більше однієї спільної точки | 1. Існує пара різних прямих, яка має більше, ніж одну спільну точку |
| 2. Через точку А прямої *a* можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну цій прямій | 2. На прямій *a* існує одна точка А, через яку можна провести дві або більше прямих, перпендикулярних цій прямій |

Виходячи з означеного вище, правильне доведення у прикладі 33 матиме такий вигляд: припустимо, що знайдуться прямі *a* і *b*, які мають дві або більше спільних точок. Виберемо із цих спільних точок дві, *A* і *B*, кожна з яких лежить як на прямій *a*, так і на прямій *b*, а це неможливо, адже через дві точки проходить тільки одна пряма.

Чому ж у шкільному підручнику подано неточні доведення?

Це пояснюється явищем, яке в науці називають терміном «вільність мовлення». У навчальній практиці науковці часто використовують подібні «вільності», адже саме вони дають змогу скорочувати текст, висловлюватися більш лаконічно.

Автори підручників дотримуються даної математичної традиції та використовують деякі з «вільностей» для викладу програмового матеріалу. При цьому вони, звісно, припускають, що учні зрозуміють умовність такого викладу думок, а при бажанні – зможуть відтворити точний текст.

Однак не всі школярі на практиці можуть зрозуміти це, а тому вчитель повинен правильно оцінити ситуацію, а за потреби вдатися до більш детальних і конкретних міркувань, пояснити це іншому учневі.

**Значення усних вправ**

Формування в учнів умінь і навичок проведення доведення методом від супротивного – процес досить трудомісткий, який до того ж вимагає від учителя постійної уваги. Важливу роль при цьому відіграють усні вправи. Не забираючи багато часу, вони дають змогу багаторазово відпрацьовувати основні етапи доведення методом від супротивного, контролювати вміння учнів, попереджати та виправляти можливі помилки. Як приклад, наведемо кілька геометричних вправ для учнів 7 класу:

**35.** Дві різні лінії на площині мають у точності дві точки перетину. Доведіть, що хоча б одна з цих ліній не є прямою.

**36.** Через дві різні точки завжди можна провести півпряму і до того ж тільки одну. Чи є це твердження правильним? Чому?

**37.** Якщо один із суміжних кутів зменшити у два рази, то другий кут також збільшиться у два рази. Так чи ні?

**38.** $\Delta ABC \neq \Delta KMN$. Чи можна стверджувати, що $\angle A \neq \angle K$ ?

**39.** Відомо кілька ознак паралельності прямих. Чи можна сформулювати ознаки непаралельності прямих?

**40.** У рівнобедреному трикутнику кут при основі рівний $95^0$. Доведіть, що це твердження помилкове.

**41.** У трикутнику найменший кут рівний $65^0$. Доведіть, що це неможливо.

**42.** Доведіть способом від супротивного твердження: якщо в трикутнику немає рівних кутів, то він не є рівнобедреним.

**43.** Про три точки відомо, що вони знаходяться на однаковій відстані від однієї і тієї ж прямої. Чи можна стверджувати, що вони належать одній прямій?

**44.** Учень побудував трикутник, який одночасно є і прямокутним, і тупокутним, адже в нього один кут гострий, другий – прямий, а третій – тупий. Чи можливо це?

**45.** Довести методом від супротивного твердження: якщо в трикутнику один із кутів – тупий, то інші два – гострі.

**46.** Учень придумав нову теорему: «Якщо пряма *a* перетинає пряму *b*, а пряма *b* – пряму *c*, то прямі *a* і *c* також перетинаються». Чи правильна ця «теорема»?

**47.** Доведіть, що трикутник, рівний гострокутному трикутнику, не може бути тупокутним.

**48.** Доведіть методом від супротивного твердження: якщо в трикутнику хоча б один із кутів нерівний $60^0$, то він не може бути рівностороннім.

Педагогові необхідно мати підбірки аналогічних усних вправ до кожної з тем шкільного курсу математики.

**Задачі, що використовуються на гурткових заняттях та під час олімпіад**

**49.** У десятковому дробі 0,123456789101112… виписані підряд усі натуральні числа. Доведіть, що цей дріб – неперіодичний.

**Вказівка.** Якщо припустити, що період існує і складається із цифр, тобто в натуральному ряду обов'язково зустрінеться число, яке складається з n нулів, то період повинен складатися із одних нулів. Аналогічні міркування засвідчують, що період складається лише з одиниць. Суперечність.

**50.** 30 команд беруть участь у першості із футболу. Кожні дві команди повинні зіграти між собою одну гру. Доведіть, що в будь-який момент змагання є дві команди, які зіграли однакове число матчів.

**Вказівка**. Припустимо протилежне: знайдеться момент, коли всі команди зіграли різне число матчів. Присвоїмо кожній команді номер, який рівний числу зіграних матчів. Зрозуміло, що всіх номерів може бути не більше 30: 0, 1, 2,……., 29. Зважаючи на те, що команд усього 30 і всі отримають різні номери, повинна бути команда з номером 29, яка зіграла всі можливі матчі. Суперечність.

**51.** Довести, що переріз куба площини не може бути правильним п'ятикутником.

**Вказівка.** Якщо перетнути площиною пару протилежних граней куба, то прямі перетину будуть паралельними. Однак у правильному п'ятикутнику паралельних сторін немає.

**52.** Чи можливо із 37 ниток зв'язати сітку таким чином, щоб кожна нитка була зв'язана рівно з п'ятьма іншими нитками?

**Вказівка.** Якщо таку сітку можна зв'язати, то на кожній нитці повинно бути по 5 вузликів, усього ниток 37, кожен вузлик створюється двома нитками, тому число вузликів рівне $\frac{5\cdot 37}{2}$. Але це число не є цілим.

**53.** У змаганнях із бігу на лижах, стрибках із трампліна і в лижному двобої брали участь більше 60 спортсменів. При цьому з трампліна стрибнуло 45 чоловік, а дистанцію пройшли – 40. Доведіть, що число учасників двобою менше 25.

**Вказівка.** Нехай *а* – загальне число учасників змагання, *в* – число учасників двобою. Легко скласти рівняння *а*=40+45-*в*. Якщо припустити, що $b \geq 25$ , то $a \leq 40+45-25=60$ , тобто $a \leq 60$ , що суперечить умові.

**54.** Довести, що при будь-якому натуральному $n \geq 8$ дріб $\dfrac{2n-3}{n^2-3n+2}$ нескоротний.

**Вказівка.** Припустимо, що при деякому n дріб є скоротним на множник *a>1*. У зв'язку з тим, що число *2n-3* – непарне, то *d* – теж непарне. Відомо, що *d* є дільником і для $2(n^2-3n+2)=2n^2-6n+4=n(2n-3)+4$. Зважаючи на те, що це число ділиться на *d*, число 4 також повинно ділитися на *d*. Однак число 4 не може ділитися на непарне число. Суперечність.

**55.** Довести, що число $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}$ менше 3.

**Вказівка.** Якщо припустити, що означене число не менше 3, то число $6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}$ не менше 9, а число $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}$ не менше 3. Продовжуємо вираховувати аналогічно. У кінцевому результаті отримаємо $\sqrt{6} \geq 3$. Суперечність.

**56.** На площині відмічено точку *A*. Чи можна розмістити на площині 4 круги, які не покривають точку *A*, таким чином, щоб будь-який промінь із початком у точці *A* перетинав не менше двох кругів?

**Вказівка.** Припустимо, що таке розміщення можливе. Проведемо із точки *A* дотичні даним колам. Величина кожної з них строго менша $180^0$, тому їх сума строго менша $4*180^0=720^0$. Однак, якби будь-який промінь із вершиною в точці А перетинав не менше двох із п'яти-чотирьох кіл, то ця сума була б не менша $2*360^0=720^0$. Суперечність.

**57.** Маємо декілька гир, загальна маса яких рівна 1кг. Кожна гиря має свій номер: 1, 2, 3,… Довести, що знайдеться такий номер *K*, при якому маса $P_K$ гирі з цим номером більша $\frac{1}{2^K}$ кг.

**Вказівка.** Припустимо протилежне, що $P_1 \leq \frac{1}{2}, P_2 \leq \frac{1}{4}, ..., P_n \leq \frac{1}{2^n}$. Тоді загальна маса всіх гир $P_1+P_2+...+P_n \leq 1-\frac{1}{2^n}<1$, що суперечить умові.

**58.** Чи можуть числа $n^2+3n+59$ і $n^2+n+57$ одночасно ділитися на 49?

**Вказівка.** Припустимо, що так. Тоді на 49 ділиться і їх різниця *2n-2*. Відповідно число *n* має такий вигляд *n=49k-T*. Однак при цьому *n* для другого числа отримаємо $n^2+3n+57=n*49+57$, тобто воно не ділиться на 49. Суперечність.

**59.** У шерензі стоять 9 хлопчиків і дівчаток. Доведіть, що серед них може бути хлопчик, який стоїть на однаковій відстані від двох інших хлопчиків, або дівчинка, яка стоїть на однаковій відстані від двох інших дівчаток.

**Вказівка.** Припустимо, що твердження задачі неправильне. Розглянемо п'яте місце, нехай тут стоїть хлопчик. Якщо на четвертому місці теж стоїть хлопчик, то на шостому – дівчинка, на третьому місці – дівчинка, на дев'ятому – хлопчик, на сьомому – дівчинка, на восьмому – хлопчик, на другому – дівчинка. Якщо на першому місці стоїть дівчинка, то дівчата займають перше, друге і третє місця (суперечність). Якщо ж на першому місці стоїть хлопчик, то хлопчики займають перше, п'яте і дев'яті місця (знову суперечність). Аналогічно аналізуємо інші випадки.

**60.** Довести, що число $9^n+1$ ($n$ – натуральне число) може закінчуватися не більше ніж одним нулем.

**Вказівка.** Оскільки $9^n$ є квадратом непарного числа, то залишок при діленні числа $9^n$ на 4 рівне 1, тобто $9^n=4к+1$ (к – натуральне число). Зважаючи на те, що числа виду $100m+99$ при діленні числа на 4 дають в остачі 3, то рівняння $9^n=100m+99$ неможливе при будь-якому значенні $n$. Виходячи з цього, число $9^n+1$ не ділиться на 100.

**61.** Існують такі натуральні числа $x$ і $y$, для яких $x^2+y$ і $y^2+x$ є квадратними цілими числами?

**Вказівка.** Припустимо, що так. Будемо вважати, що $x \geq y$. Тоді маємо $x^2 + y > x^2$ і $x^2 + y \leq x^2 + x < x^2 + 2x < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Тобто $x^2 < x^2 + y < (x+1)^2$. Суперечність.

**62.** Чи можна розрізати випуклий 17-кутник на 14 трикутників?

**Вказівка.** Сума внутрішніх кутів 17-кутника рівна $180^0(17\text{-}2)=2700^0$, а сума кутів 14 трикутників – $14*180^0=2520^0$. При розрізі многокутника на трикутники сума кутів трикутника повинна бути не менша суми кутів 17-кутника.

**63.** Маємо п'ять відрізків. Із будь-яких трьох можна скласти трикутник. Довести, що хоча б один із них – гострокутний.

**Вказівка.** Нехай $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ – дані відрізки. Припустимо, що всі складені трикутники негострокутні, тоді $c^2 \geq a^2 + b^2, d^2 \geq b^2 + c^2, e^2 \geq c^2 + d^2$. Виходячи з цього: $c^2 + d^2 + e^2 \geq a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2$; $e^2 \geq a^2 + 2b^2 + c^2 = (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + 2bc \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$, тобто $e \geq a + b$. Отже, із відрізків $a, b, c$ не можна скласти трикутник. Суперечність.

**64.** Чи може квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ із цілими коефіцієнтами мати дискримінант рівний 23?

**Вказівка.** Нехай $b^2\text{-}4ac=23$, тоді $b^2\text{-}25=4ac\text{-}2$ або $(b\text{-}5)(b+5)=2(2ac\text{-}1)$. Оскільки числа $b\text{-}5$ і $b+5$ однакової парності, то ліва частина або непарна, або ділиться на 4. Права частина рівняння такими властивостями не володіє.

**65.** Доведіть, що круги, побудовані на сторонах випуклого чотирикутника як на діаметрах, покриють весь чотирикутник.

**Вказівка.** Якби в середині многокутника знайшлася точка, непокрита жодним кругом, то кожен із кутів із вершиною в точці $M$, спираючись на сторону чотирикутника, був би гострим, а їх сума була б менша $360^0$. Суперечність.

**Розв'язування задач різними способами**

Розв'язування задач різними способами – надзвичайно корисне та потрібне заняття, покликане шукати різні розв'язки однієї і тієї ж задачі на заняттях математичних гуртків, де розв'язується не так і багато задач, проте різноманітними способами. Бажано при цьому використовувати доведення і методом від супротивного.

**66.** Довести, що якщо $m + n=2$, то $mn<1$.

**Вказівка**

**1 спосіб.** Якщо $m=2\text{-}n$, то $1\text{-}mn=1\text{-}n(2\text{-}n)=1\text{-}2n+n^2=(1\text{-}n)^2\geq 0$, отже, $1\text{-}mn\geq 0, mn\leq 1$.

**2 спосіб.** Нехай $m=1+x$, тоді $n=2\text{-}(1+x)=1\text{-}x$. Звідси випливає: $1\text{-}mn=1\text{-}(1+x)(1\text{-}x)=1\text{-}(1\text{-}x^2)=x^2\geq 0$, $1\geq mn$.

**3 спосіб.** Якщо $4mn=(m+n)^2\text{-}(m\text{-}n)^2$, то $4mn=4\text{-}(m\text{-}n)^2\leq 4$, тому $mn\leq 1$.

**4 спосіб.** $mn\text{-}1=mn\text{-}2+1=mn\text{-}m\text{-}n+1=(m\text{-}1)(n\text{-}1)\leq 0$ або $(m\text{-}1)+(n+1)=(m+n)\text{-}2=0$. Отже, числа $m\text{-}1$ і $n\text{-}1$ є протилежними.

**5 спосіб** (від супротивного). Припустимо, що існує пара чисел $m$, $n$. При цьому $m+n=2, mn>1$, тоді $mn+m^2>1+m^2$, $m(m+n)>1+m^2$, $2m>1+m^2$, $(1\text{-}m)^2<0$ чого бути не може. Наше припущення помилкове. Тому $mn\leq 1$.

**Розв'язування логічних задач**

Серед задач, які користуються популярністю серед учнів як на уроках, так і позакласних заняттях, варто назвати так звані логічні задачі. Більшість із них успішно розв'язуються використанням методу від супротивного.

**67.** Чотири школярки, Марія, Ніна, Оля і Поліна, брали участь у лижних змаганнях і зайняли перші чотири місця. На запитання, які місця вони зайняли, дівчатка дали такі відповіді:

1) Ніна зайняла друге місце, а Оля – перше.

2) Оля зайняла друге місце, а Поліна – третє.

3). Поліна зайняла четверте місце, а Марія – друге.

При цьому вони зізналися, що одна частина кожної відповіді правдива, а інша – ні. Яке місце зайняла кожна учениця?

**Розв'язання.** Стосовно кожної відповіді можна висловити дві гіпотези: одна з них правильна, а інша – ні. Припустимо, що Ніна зайняла друге місце, а Оля – не перше, і спробуємо це спростувати. Із третьої відповіді, за нашим припущенням, випливає, що Поліна була четвертою, а із другої – що Оля була другою. Отримаємо суперечність: друге місце зайняли як Оля, так і Ніна. Припущення відкидається.

Виходячи з означеного вище, правильним є твердження, що Оля зайняла перше місце, а Ніна – не друге. Аналізуючи решту відповідей, з'ясуємо, що друге місце зайняла Марія, третє – Поліна, а четверте – Ніна.

Пропонуємо ще кілька вправ, які розв'язуються означеним способом.

**68.** Три учениці, Анна, Віра і Клава, прийшли на шкільне свято в червоній, білій та синій сукнях. При цьому у твердженнях, що Анна була в червоній сукні, Віра – не в червоній, а Клава – не в синій, одна частина правильна, а дві – ні. В якого кольору сукні була кожна дівчинка?

**Відповідь.** Анна була одягнена в синю сукню, Віра – в червону, Клава – в білу.

**69.** Шість учнів, *А, В, С, Д, Н, Т,* брали участь в олімпіаді. Двоє з них розв'язали всі задачі. На запитання, хто саме розв'язав, вони відповіли: 1) В і С; 2) Д і Т; 3) С і Т; 4) А і Д; 5) Н і С.

Із чотирьох відповідей одна частина була правильною, а друга – ні. В одній відповіді обидві частини виявилися неправильними. Хто з учнів розв'язав усі задачі олімпіади?

**Вказівка.** Спочатку шляхом виключення гіпотези з'ясуємо, яка відповідь є неправильною. Після цього задача розв'язується просто: усі задачі правильно розв'язали А і С.

**70.** Журналісту пощастило дізнатися, що до складу екіпажу космічного корабля включено Петренка, Коваля й Тарасова. Поміркувавши, він записав у своєму блокноті, що Тарасов є командиром корабля, Петренко – фізиком, а Коваль – радистом. Проте в редакції журналісту зауважили, що тільки одне з його припущень правильне. Які обов'язки виконували Петренко, Коваль та Тарасов?

**Відповідь.** Коваль – командир, Петренко – фізик, Тарасов – радист.

**71.** Знайдіть натуральне число А, якщо із трьох наступних тверджень два – правильні, а одне – ні:

1) $a$+51 – точний квадрат;

2) остання цифра числа – 1;

3) $A$-38 – точний квадрат.

**Відповідь.** 1974.

**Принцип Діріхле**

Трапляється, що при розв'язуванні задач «життєвого змісту» способом від супротивного учням буває складно знайти правильне твердження, суперечність з яким дозволяє відхилити гіпотезу. Зважаючи на це, деякі задачі розв'язуються на основі «принципу Діріхле», який можна сформулювати наступним чином: «Якщо $n+1$ зайця посадити в $n$ кліток, то в одній клітці виявиться не менше 2 зайців».

72. У магазин привезли 25 ящиків з яблуками трьох сортів, при чому в кожному ящику лежали яблука одного сорту. Чи можливо знайти 9 ящиків з яблуками одного сорту?

**Розв'язання.** Доведемо, що можна. Для цього умовно розкладемо наші ящики в трьох приміщеннях таким чином, щоб у кожному знаходилися яблука тільки одного сорту. Якщо уявити, що в кожній «клітці» не більше ніж 8 «зайців», то всього «зайців» буде не більше 24, тоді як у нас їх 25. Отже, ми отримали суперечність із принципом Діріхле. Припущення доведеться відхилити.

Висновки. Отже, означені психологічні труднощі та основні типи помилок учнів дозволять ефективніше використовувати метод доведення від супротивного в шкільній практиці.

Представлені методичні рекомендації сприятимуть наданню вчителю (зокрема початківцю) практичної допомоги в навчанні методу від супротивного в позакласній роботі.

Перспективним напрямом дослідження є проблема організації математичного гуртка з вивчення методу доведення від супротивного.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Калужнин Л. А. Элементы теории множеств и математической логики в школьном курсе математики / Л. А. Калужнин. – М., 1978. – 144 с.
2. Кужель О.В. Елементи теорії множин і математичної логіки / О. В. Кужель. – К., 1977. – 196 с.
3. Литвиненко І. Навчання учнів доведенням методом від супротивного / І. Литвиненко // Математика в школі. – 2008. – № 11-12. – С. 37-41.
4. Мартищук О.І. Взаємно обернені, взаємно протилежні твердження і співвідношення між ними / О. І. Мартищук // У світі математики. – К., 1978. – Вип. 9. – С. 58-68.
5. Олонічев П. М. Перше знайомство з математичною логікою / П. М. Олонічев // У світі математики. – К., 1979. – Вип. 10. – С. 11-22.
6. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойа. – М., 1975. – 372 с.
7. Присяжнюк М. М. Застосування геометричних перетворень до розв'язування задач на доведення : метод. посіб. / М. М. Присяжнюк, О. В. Ткачук. – Рівне : РДГУ, 2012. – 67 с.
8. Прокопенко Л. М. Мова логіки / Л. М. Прокопенко // У світі математики. – К., 19678. – Вип. 1. – С. 30-50.
9. Середа В. Ю. Про доведення математичних тверджень / В. Ю. Середа // У світі математики. – К., 1980. – Вип. 11. – С. 143-150.
10. Сущанський В. І. Логічні тотожності / В. І. Сущанський // У світі математики. – К., 1975. – Вип. 6. – С. 27-32.
11. Хромой Я. В. Квантори та деякі їх застосування в елементарній математиці / Я. В. Хромой // У світі математики. – К., 1973. – Вип. 4. – С. 107-121.

Дата надходження до редакції: 01.10.2014 р.