

ФІЗИКА. МАТЕМАТИКА

УДК 51: 373. 5. 016 (07)

Галина КИРИЛЕЦЬКА,
кандидат педагогічних наук,
доцент кафедри математики з методикою викладання
Рівненського державного гуманітарного університету

Марія БОРТНІК,
студентка факультету математики та інформатики
Рівненського державного гуманітарного університету,
магістр

ФОРМУВАННЯ В УЧНІВ УМІНЬ ЗАСТОСОВУВАТИ ДОПОМІЖНІ ЕЛЕМЕНТИ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

У статті розглянуто один із найбільш ефективних видів діяльності, під час якого відбувається формування та розвиток відповідних знань і вмінь учнів – евристичної діяльності, важливою складовою якої є використання допоміжних елементів при розв'язуванні задач.

Ключові слова: евристична діяльність, допоміжні елементи, розв'язування задач, уміння учнів розв'язувати задачі, методи розв'язування математичних задач.

В статье рассмотрен один из наиболее эффективных видов деятельности, при которой происходит формирование и развитие соответствующих знаний и умений учащихся – эвристической деятельности, важной частью которой является использование вспомогательных элементов при решении задач.

Ключевые слова: эвристическая деятельность, вспомогательные элементы, решения задач, умение учащихся решать задачи, методы решения математических задач.

The article focuses on the most effective kinds of activities in which there is a formation and development of appropriate knowledge and skills of students – heuristic activity, an important part of which is the use of auxiliary elements for solving problems.

Key words: heuristic activity, Extras, solving problems, the ability of students to solve problems, methods for solving mathematical problems.

Вирішальне значення для економічної ефективності та конкурентоспроможності України, забезпечення її інтелектуальної самостійності й гідного місця в сучасному світі мають наукові й технічні знання, високі моральні якості особистості, її інтелектуальний і творчий потенціал, винахідливість,

ініціатива, чуття нового, здатність адаптуватися до умов, що змінюються, не лише певних груп, а й населення в цілому. У цих умовах особливо актуальним постає завдання школи щодо гармонійного розвитку учнів, залучення їх до творчої діяльності. Проте останнє можливо здійснити лише завдяки включення до змісту освіти різних евристик і створення спеціальних умов для розвитку індивідуальності учня. Усе це дозволяє виокремити проблему евристичного навчання як одну із важливих проблем методики навчання математики. В основі евристичного підходу – психологія творчого мислення, процедура пошуку нового, намагання формалізації діяльності при особистісному підході в навчанні. Під час розгляду різних прийомів навчання розв'язанню математичних задач, формуванню понять, доведенню теорем на неалгоритмічній основі виникає проблема дослідження творчої розумової діяльності. Тому одним із головних факторів подальшого розвитку методики навчання математики повинно стати теоретичне обґрунтування та методична розробка проблеми формування прийомів навчально-пізнавальної евристичної діяльності школярів [4].

У наш час питання поліпшення математичної підготовки і розвитку математичної культури як учителя, так і учнів набувають виняткової актуальності. Одним із чинників, що може суттєво поліпшити ситуацію, є перегляд теоретичних та методичних положень щодо ролі та місця математичних задач у математичній освіті. Адже саме задачі ефективно можуть бути використані з метою: формування внутрішньої мотивації, інтересу до навчальної діяльності; ілюстрації та конкретизації матеріалу, що вивчається; вироблення в учнів спеціальних умінь та навичок; контролю й оцінки результатів навчальної роботи; формування в учнів узагальненого підходу до найрізноманітніших ситуацій; загальних умінь розв'язувати будь-які задачі.

Саме останній аспект – формування здатності до розв’язування будь-яких задач – висувається на сучасному етапі розбудови шкільної математичної освіти на перший план. Методисти наголошують, що кінцевою метою навчання розв’язувати задачі має бути формування узагальненого вміння розв’язувати задачі, але окрім увагу слід приділяти й формуванню вміння розв’язувати задачі певних видів. Психологами та методистами визначено лише загальні напрямки роботи з формуванням вміння розв’язувати задачі (і узагальнені, і вміння розв’язувати задачі певних видів). Досвід із формуванням вміння розв’язувати задачі напрацьований і у системах розвивального навчання [5].

Отже, евристична діяльність – це один із найбільш ефективних видів діяльності, під час якої відбувається формування та розвиток відповідних знань і вмінь учнів. Досвід такої діяльності, набутий у процесі навчання математики, сприятиме проходженню кожного особистістю всіх етапів розв’язання практичних проблем – від початкової постановки задачі до аналізу отриманого результату. Реалізуються евристичні вміння, які набуті при вивчені дисципліни, на кожному з етапів винаходу інноваційних життєвих рішень. Це становить міцну базу для реалізації зазначеніх цілей та продовження навчання. Таким чином, формування вміння евристичного характеру учнів під час виконання практичних завдань із математики є одним зі шляхів досягнення поставлених задач [1].

Одним із основних видів евристичних умінь є використання допоміжних елементів при розв’язуванні задач. Часто зустрічаються завдання, у яких зв’язок між даними (відомими) і шуканими (невідомими) неможливо встановити безпосередньо із тексту завдання. Щоб якось прояснити зв’язок між даними і шуканими, слід також використати кілька допоміжних елементів, переважно шляхом заміни невизначених невідомих певними елементами (величинами), добудовою допоміжних елементів (допоміжними можуть бути трикутники (один, рівні, подібні), різні геометричні фігури) [2].

Метод допоміжних елементів

1. Метод допоміжного відрізка.

Допоміжний елемент – відрізок (або відношення довжин відрізків). Його зручно ввести, якщо фігури подібні. Тоді за допомогою пропорцій або геометричних побудов складається рівняння, в якому цей елемент як член рівняння скорочується, а знайти шуканий стає не важко.

Задача. Основи трапеції – a і b ($a < b$). Пряма, яка перетинає бічні сторони трапеції в точках M і N , проходить через точку перетину діагоналей паралельно основам. Знайти довжину відрізка MN .

Розв’язання. Введемо як допоміжні елементи h_1 , h_2 , h – висоти трикутників відповідно MBO , AMO і BCA (рис.1).

Позначимо x відрізок MO . Трикутники MBO

і ABD – подібні: $\frac{x}{a} = \frac{h_1}{h}$. Із подібності трикутників AMO і ABC випливає: $\frac{x}{b} = \frac{h_2}{h}$.

AMO і ABC випливає: $\frac{x}{b} = \frac{h_2}{h}$.

Отже, $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{h_1 + h_2}{h}$. Але $h_1 + h_2 = h$, тому

$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{h_1 + h_2}{h} = 1$; $x = \frac{a \cdot b}{a + b}$. Маємо $ON = y = \frac{a \cdot b}{a + b}$ (обчислюється аналогічно) [3, с. 222].

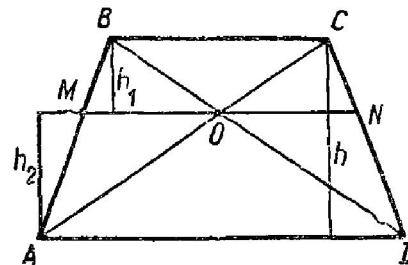


Рис. 1

2. Метод допоміжної площини.

Введення площини як допоміжного елемента аналогічне введенню лінійного елемента – відрізка. Порівнюючи площини фігур, можна отримати рівняння відносно невідомих задачі або необхідне співвідношення у вигляді формули.

Краще знаходити чи порівнювати ті площини, сума (різниця) яких дає площу заданої фігури або відношення площ тих фігур, у яких лінійні елементи – шукані, або є компонентами співвідношення у вигляді формули.

Задача. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $a \cdot b = c \cdot h$ (h – висота). Довести.

Доведення. Позначимо S площину трикутника

ABC (рис. 2). Тоді $S = \frac{1}{2}a \cdot b$ і $S = \frac{1}{2}c \cdot h$.

Отже, $a \cdot b = c \cdot h$ [3, с. 233].

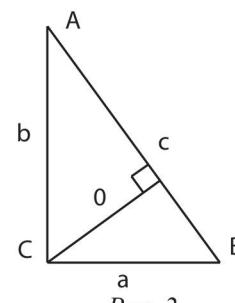


Рис. 2

3. Метод допоміжного кута.

Застосування кута як допоміжного елемента пов’язано з тригонометрією. Теореми синусів, косинусів, розв’язання трикутників дозволяють звести задачу до доведення тригонометричної тотожності, тригонометричних нерівностей або до розв’язання рівнянь чи нерівностей.

Задача. Довести, що в трикутнику ABC :

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, де D – точка перетину бісектриси кута BAC зі стороною BC .

Доведення. Введемо позначення (рис.3),

$$\angle DAB = \alpha, \angle ADB = \beta.$$

За теоремою синусів із трикутника ADB отримаємо

$$\frac{AB}{BD} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}. \text{ Із трикутника } CAD \text{ випливає}$$

$$\frac{AC}{DC} = \frac{\sin(180^\circ - \beta)}{\sin \alpha}, \text{ або } \frac{AC}{DC} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Отже, $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ [3, с. 242].

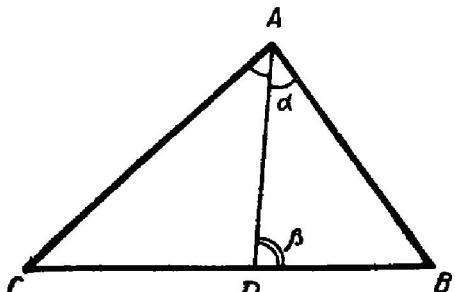


Рис. 3

4. Метод допоміжного периметра.

При застосуванні периметра як допоміжного елемента використовують наступні твердження:

1) якщо в трикутник ABC вписано коло, де K_1, K_2, K_3 – точки дотику кола до сторін BC, AC, AB (рис.4), то :

$$AK_3 = AK_2 = p - a;$$

$$BK_3 = BK_2 = p - b;$$

$$CK_3 = CK_2 = p - c.$$

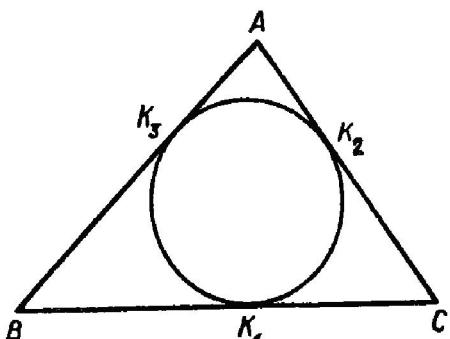


Рис. 4

Доведення. Нехай $AK_3 = x, BK_1 = y, CK_1 = z$. Тоді $x = c - y; x = b - z; 2x = b + c + (y + z) = b + c - a = 2p - 2a; x = p - a$. Аналогічно доводиться, що $y = p - b, z = p - c$;

2) відстані від точок дотику ззовні вписаного кола, які належать продовженню двох сторін трикутника ABC до їх спільної вершини, дорівнюють півпериметру трикутника ABC .

Доведення. Нехай, наприклад, ззовні вписане коло з центром I_a дотикається до продовжень сторін AB і AC трикутника ABC у точках T_2 і T_3 (рис. 5). Крім того, $CT_1 = x, T_1B = y$.

Маємо $AT_2 = c + y, AT_3 = b + x, 2p = a + b + c = x + y + b + c = b + x + c + y = AT_2 + AT_3$. Але $AT_2 = AT_3$, тому $2AT_2 = 2p$, звідки $AT_2 = AT_3 = p$.

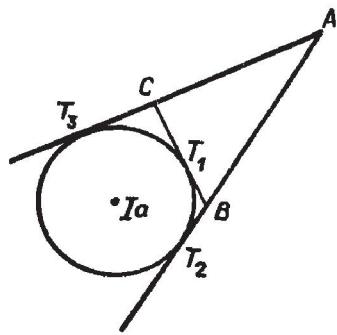


Рис. 5

Задача. У прямокутному трикутнику

$$ABC (\angle C = 90^\circ) AK_3 = m, BK_3 = n.$$

Знайти площу трикутника ABC .

Розв'язання. Введемо периметр $2p$. Тоді $AK_3 = p - a, BK_3 = p - b$ (рис. 6),

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = p \cdot m \cdot n \cdot r, \quad S^2 = S \cdot m \cdot n, \quad \text{звідки } S = m \cdot n \quad [3, \text{с. 258}].$$

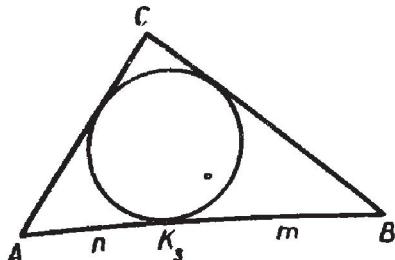


Рис. 6

Метод допоміжних побудов

1. Метод допоміжних точок.

При допоміжних побудовах іноді доцільно користуватися точками, про які в умові задачі нічого не повідомляється. Ці точки називають допоміжними. Вивчення таких точок і їх властивостей збагачує досвід розв'язування задач, допомагає правильно та раціонально намітити схему розв'язування, а головне – зробити усвідомленими допоміжні побудови.

Використовують такі допоміжні точки при розв'язуванні задач:

- допоміжна точка – центр кола;
- допоміжні точки – чудові точки трикутника: ортоцентр, центроїд, інцентр, центр зовні вписаного кола;

- симетричні точки [3, с. 267].

2. Метод допоміжних прямих.

Використовують такі побудови прямих при розв'язуванні задач:

- побудова паралельних прямих;
- побудова перпендикулярних прямих;
- побудова рівних відрізків та відрізків певної довжини.

Задача. Довести, що кут із вершиною в середині кола дорівнює півсумі дуг, що знаходяться між його сторонами.

Доведення. Нехай хорди AB і DC перетинаються в точці E (рис.7). Доведемо, що $\angle BEC = \frac{\alpha + \beta}{2}$, де α і β – градусні виміри дуг BC і AD . Проведемо хорду AP , паралельну хорді DC . Оскільки дуга PC дорівнює дузі AD , то $\cup PC = \alpha$ і $\angle PAB = \frac{1}{2}(\cup PC + \cup BC) = \frac{\alpha + \beta}{2}$ [3, с. 277].

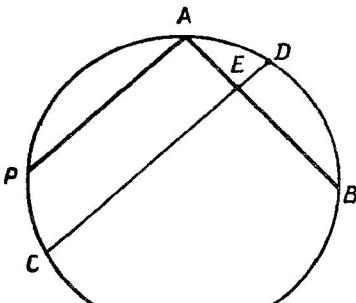


Рис. 7

3. Метод допоміжних фігур.
Найчастіше використовують такі допоміжні фігури при розв'язуванні задач:

- допоміжна фігура – трикутник (один, рівні, подібні);
- допоміжна фігура – паралелограм;
- допоміжна фігура – трапеція [3, с. 286].

Задача. Побудуйте трикутник за даною стороною a , прилеглим до неї кутом і сумою двох інших сторін b .

Розв'язання. Аналіз. Припустимо, що шуканий трикутник уже побудовано (рис.8). За даними відрізками і кутом між ними можна побудувати ΔABD . Вершиною C шуканого трикутника буде така точка, для якої $BC = CD$. Виходячи з рівнобедреного трикутника CBD , у якого медіана є висотою, точка C має лежати на серединному перпендикулярі сторони BD .

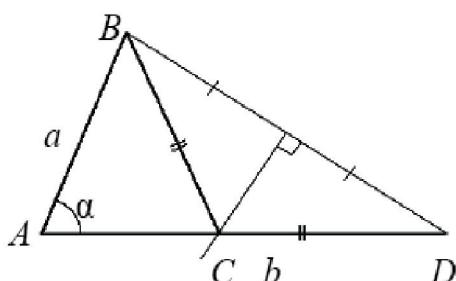


Рис. 8

Побудова:

- 1) за двома сторонами і кутом між ними будуємо ΔABD ;
- 2) будуємо серединний перпендикуляр до сторони BD ;
- 3) цей серединний перпендикуляр у перетині зі стороною AD дасть точку C ;
- 4) побудувавши сторону BC , отримаємо шуканий трикутник.

Доведення. ΔABC є шуканим, оскільки $AB = a$, $\angle A = \alpha$, $AC + BC = b$.

Дослідження. Задача має розв'язок, якщо $a < b$.

4. Метод допоміжного кола.

Однією з допоміжних побудов є коло. Його радіус можна застосовувати як допоміжний елемент для доведення формул і багатьох метричних співвідношень.

За допомогою допоміжного кола розв'язуються такі види задач: задачі на доведення; задачі на побудову; задачі на обчислення.

Задача. На стороні квадрата зовні побудовано прямокутний трикутник, гіпотенуза якого зовні збігається зі стороною квадрата. Довести, що бісектриса прямого кута цього трикутника поділяє площину квадрата навпіл.

Доведення. Якщо $ABCD$ – даний квадрат, а BMC – прямокутний трикутник, то коло, яке описане навколо трикутника BMC , проходить через точку O – центр квадрата (рис.9). А оскільки $BO = OC$, то й бісектриса кута BMC також повинна проходити через точку O . Отже, вона поділяє площину квадрата навпіл [3, с. 295].

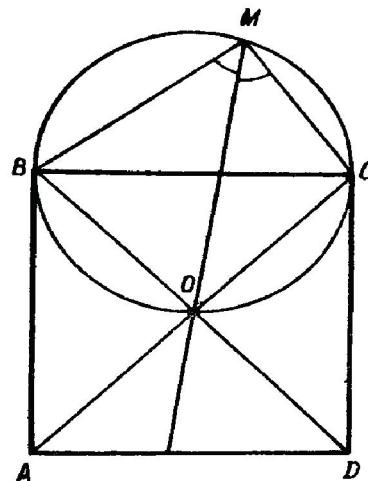


Рис. 9

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Евристична діяльність учня – основний спосіб ефективного навчання шкільного курсу алгебри [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://oblosvita.com/navigaciya/skrynya/matematyka/2537-evristichna-diyalnist-uchnya-osnovnij-sposib-effektivnogo-navchannya-shkelnogo-kursu-algebri.html>.
2. Евристичні методи пошуку способу розв'язання задач [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://referatbox.net/page,5,233022-Evristicheskie-metody-poiska-sposoba-resheniya-zadach.html>.
3. Кушнір І. А. Методи розв'язання задач з геометрії : книга для вчителя / І. А. Кушнір. – Київ : Абрис, 1994. – 464 с.
4. Скафа О. І. Концепція формування прийомів евристичної діяльності учнів у процесі навчання [Електронний ресурс] / О. І. Скафа. – 2004. – Режим доступу : http://dm.inf.ua/_22/69-75%2022_2004.pdf.
5. Скворцова С. О. Система формування вмінь розв'язування сюжетних математичних задач в учнів початкової школи [Електронний ресурс] / С. О. Скворцова. – Режим доступу : http://skvor.info/files/get_article.html?id=34.

Дата надходження до редакції: 26.02.2015 р