ФІЗИКА. МАТЕМАТИКА

УДК 37.016:514

Дмитро БЕЛЕШКО,
кандидат педагогічних наук, доцент,
професор кафедри математики
з методикою викладання
Рівненського державного гуманітарного університету

НАВЧАЄМО РОЗВ'ЯЗУВАТИ ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ. ОСНОВНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕОРЕМИ КОСИНУСІВ

У методичній літературі заключний етап розв'язування задачі розроблений найменше, насамперед це стосується теорем у геометрії. Стаття присвячена розгляду різних формулювань теореми косинусів до розв'язування геометричних задач. Це допоможе майбутньому вчителеві математики навчати учнів розв'язувати геометричні задачі.

Ключові слова: *теорема косинусів, розв'язування, задача.*

В методической литературе заключительный этап решения задачи разработан меньше, прежде всего это касается теорем геометрии. Статья посвящена рассмотрению различных формулировок теоремы косинусов к решению геометрических задач. Это поможет будущему учителю математики обучить учащихся решать геометрические задачи.

Ключевые слова: *теорема косинусов, решение, задача.*

In the methodological literature, the final stage of the problem solving is the least developed. This applies even more to the geometry theorems. The article is devoted to the consideration of various formulations of the cosine theorem for solving geometric problems. This will help future mathematics teacher teach students to solve geometric problems.

Key words: *cosmic theorem, solving, problem.*

До найбільш важливих теорем елементарної евклідової геометрії, що викликають підвищений інтерес, варто віднести теореми косинусів та синусів. Теорема косинусів була відома ще стародавнім грекам: її доведення міститься у II книзі найстарішого грецького математичного трактату «Начала» грецького математика Евкліда. Вперше теорему синусів довели у X-XI століттях математики Близького і Середнього Сходу. Відкриття цієї теореми відіграло важливу роль у розвитку тригонометрії. Представлені теореми одночасно із теоремою Піфагора, що є наслідком теореми косинусів, – найбільш «працюючі» теореми шкільного курсу геометрії, якщо подивитися на цей курс із погляду процесу навчання учнів розв'язанню геометричних задач. Щоб розв'язувати такі задачі та доводити теореми, необхідно навчитися з інтересом проникати в суть розв'язку задачі, знайти в ній те, що в майбутньому знадобиться при розв'язанні інших задач. Таким чином, до задачі необхідно ставитися як до об'єкта ретельного вивчення, а до її розв'язування – як до об'єкта конструювання й дослідження.

Проте особливістю сучасного систематичного шкільного курсу геометрії є те, що учні основну увагу приділяють вивченню конкретної теми і розв'язанню задач із цієї теми, а на те, щоб додатково попрацювати з цими теоремами, ґрунтовно проаналізувати, осмислити, виділити у розв'язанні загальні прийоми і методи, часу не вистачає.

Зважаючи на це, пропонуємо докладніше розглянути теорему косинусів.

Основне формулювання теореми косинусів

У шкільному підручнику теорема косинусів формулюється таким чином:

Теорема I. Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.

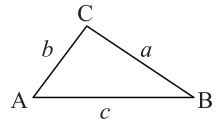

Рис. 1

По суті, це означає, що в будь-якому трикутнику *ABC* мають місце три співвідношення:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ b^2 = c^2 + b^2 - 2ca \cdot \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \end{cases} \quad (1)$$

© Белешко Д., 2018

Теорему косинусів часто називають **узагальненою теоремою Піфагора**, тому що теорема Піфагора є частковим випадком теореми косинусів.

Варто пам'ятати, що справедливою є обернена теорема косинусів.

Теорема II. Нехай дано три відрізки *a*, *b*, *c* і три кути *A*, *B*, *C*, при цьому $A+B+C=180^0$. Таким чином, якщо для цих відрізків і кутів виконується співвідношення (1), існує трикутник, сторони якого дорівнюють *a*, *b*, *c*, а протилежні їм кути відповідно – *A*, *B*, *C* (спробуйте самостійно довести це твердження!).

Теорема косинусів дає змогу розв'язувати такі **три основні задачі**:

Перша основна задача. У трикутнику *ABC* дано дві сторони *a*, *b* і кут *C* між ними. Потрібно визначити третю сторону трикутника.

Задача розв'язується безпосередньо за формулами (1): $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos C}$ і, як бачимо, має єдиний розв'язок.

Друга основна задача. У трикутнику *ABC* відомі три сторони *a*, *b*, *c*. Необхідно визначити кути трикутника.

Задача також має єдиний розв'язок. Дійсно, за формулами (1) маємо:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

При розв'язанні цієї задачі варто пам'ятати, що $A+B+C=180^0$. Це використовується для перевірки правильності відповідей.

Третя основна задача. Дано дві сторони трикутника і кут, що не розташований між ними. Потрібно знайти третю сторону трикутника.

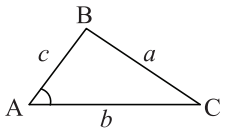

Рис. 2

Нехай, наприклад, дано сторони *a*, *b* і кут *A*. Як знайти сторону *C*? За теоремою косинусів маємо $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$.

Це призводить до квадратного рівняння $c^2-(2b\cdot\cos A)\cdot c+(b^2-a^2)=0$. Залежно від чисел *a*, *b*, *A* означене рівняння має або два, або один розв'язок, або зовсім не має коренів. Отже, дана задача не завжди розв'язується однозначно.

Звичайно, представлені вище три задачі на практиці зазвичай трапляються в «завуальованому» вигляді. Крім того, часто вони є не кінцевою метою, а лише проміжним результатом при розв'язанні більш складних задач. Наприклад:

Приклад 1. У трикутнику *ABC* сторони рівні: $AB=\sqrt{17}$, $BC=4$, $CA=5$. На стороні *BC* відмічена точка *D* так, що $BD=1$. Визначити кут *ADB*.

Розв'язання. Спочатку з ΔABC за теоремою косинусів визначимо кут *C*:

$$\cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2\cdot AC\cdot BC}=\frac{25+16-17}{2\cdot5\cdot4}=\frac{3}{5}.$$

Тепер з ΔACD знайдемо:

$$AD^2=AC^2+CD^2-2\cdot AC\cdot CD\cdot\cos\angle C=25+9-2\cdot5\cdot3\cdot\frac{3}{5}=16$$

$AD=4$.

Зрештою, із ΔADB визначимо кут ADB:

$$\cos\angle ADB=\frac{AD^2+DB^2-AB^2}{2\cdot AD\cdot DB}=\frac{16+1-17}{2\cdot4\cdot1}=0.$$

Отже, для розв'язання задачі ми тричі використали теорему косинусів.

Приклад 2. У трикутнику *ABC* $AB=25$, $AC=56$. На сторонах *BC* і *AC* обрані відповідно точки *D* і *E* так, що $AE=8$, $BC=3\cdot BD$ і $DE=26$. Знайти довжину сторони *BC*.

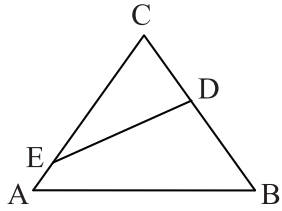

Рис. 3

Розв'язання. Позначимо $BD=x$, тоді $BD=3x$, $CD=2x$. Із трикутників *ABC* і *EDC* за теоремою косинусів маємо:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB$$

$$ED^2=EC^2+DC^2-2\cdot EC\cdot DC\cdot\cos\angle ACB.$$

Звідси

$$\cos\angle B=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2\cdot AC\cdot BC}=\frac{EC^2+DC^2-ED^2}{2\cdot EC\cdot DC}.$$

$$\frac{56^2+(3x)^2-25^2}{2\cdot56\cdot3x}=\frac{48^2+(2x)^2-26^2}{2\cdot48\cdot2x},$$

$$x^2=169,\ x=13$$

Відповідь: $BC=39$.

Приклад 3. У чотирикутнику *ABCD* без паралельних сторін $AB=a$, $CD=d$. Нехай *E* і *F* – відповідно середини діагоналей *AC* і *BD*, а $EF=c$. Знайти кут між продовженням сторін *AB* і *CD*.

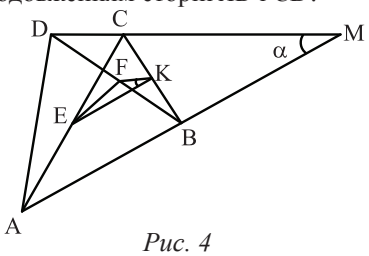

Рис. 4

Розв'язання. Обчислимо кут α. Нехай *K* – середина *BC*, тоді $FK\parallel CD$, $FK=\frac{b}{2}$ (середня лінія в ΔDBM) $FK\parallel AB$, $EK=\frac{a}{2}$, $\angle EKF=\alpha$. З ΔEFK за теоремою косинусів $EF^2=FK^2+EK^2-2FK\cdot EK\cdot\cos\alpha$.

$$\cos\alpha=\frac{a^2+b^2-4c^2}{2ab},\ \alpha=\arccos\frac{a^2+b^2-4c^2}{2ab}.$$

Приклад 4. На відрізку і двох його нерівних частинах побудовані (по один бік від нього) півкола. За радіусами *r* і *R* менших півкіл визначити радіус кола, що дотикається до всіх трьох півкіл.

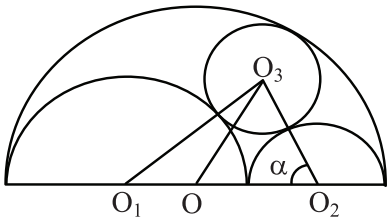

Рис. 5

Розв'язання. Позначимо шуканий радіус через x, тоді $O_1O_3 = R + x$, $O_2O_3 = r + x$, $O_1O_2 = R + r$. $OO_3 = R + r - x$, $OO_2 = R$. Позначимо також $\angle O_1O_2O_3 = \alpha$. Із трикутників $O_1O_2O_3$ і OO_2O_3 за теоремою косинусів знайдемо:

$$\cos\alpha = \frac{O_1O_2^2 + O_2O_3^2 - O_1O_3^2}{2\cdot O_1O_2\cdot O_2O_3} = \frac{OO_2^2 + O_2O_3^2 - O_1O_3^2}{2\cdot OO_2 - O_2O_3}$$

$$\frac{(R+r)^2 + (r+x)^2 + (R+x)^2}{R+r} = \frac{R^2 + (r+x)^2 - (R+r-x)^2}{R}.$$

Звідси неважко знайти $x = \dfrac{Rr(R+r)}{r^2 + Rr + R^2}$.

Вправи

1. У ромбі $ABCD$ кут ABC дорівнює 120^0. На сторонах AB і BC беруть точки P і K так, що $AP = BK$. Знайти кути трикутника PKD.

Відповідь: ΔPKD – рівносторонній.

2. Точка D лежить на стороні AB трикутника ABC. Відомо, що $AD = 1$, $AC = \sqrt{2}$, $AB = \sqrt{3}$, $\angle BCD = 90^0$. Знайти кути трикутника ABC.

Відповідь: $A = 15^0$, $B = 45^0$.

3. У паралелограмі $ABCD$ $AB = a$, $AD = b\ (b > a)$, $\angle BAD =$. На сторонах AD і BC узято точки K і M так, що $BKDM$ – ромб. Знайти сторону цього ромба.

Відповідь: $\dfrac{a^2 + a^2 - 2bc\cdot\cos\alpha}{2(b - a\cos\alpha)}$.

4. У середині рівностороннього трикутника ABC дано точку M таку, що $\angle AMB = 120^0$, $AM = 1$, $BM = 2$. Знайти CM.

Відповідь: $\sqrt{3}$.

5. У ромбі $ABCD$ точки M і N – середини сторін BC і CD відповідно. Знайти $\angle MAN$, якщо $\angle BAD = 60^0$.

Відповідь: $\arccos\dfrac{13}{14}$.

Задачі на доведення

За допомогою теореми косинусів у геометрії доводиться багато інших теорем. Так, у шкільному підручнику наведено декілька прикладів, зокрема:

1. Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

2. Нехай a, b, c – сторони трикутника ABC, причому c – найбільша з них. Тоді:

якщо $c^2 < a^2$, то кут C – гострий, тобто трикутник гострокутний;

якщо $c^2 = a^2 + b^2$, то кут C – прямий, трикутник ABC – прямокутний;

якщо $c^2 > a^2 + b^2$, то кут C – тупий, трикутник ABC – тупокутний.

Приклад 5. Доведіть, що медіану m_a трикутника можна обчислювати за формулою

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + a^2) - c^2}.$$

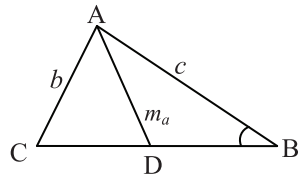

Рис. 6

Розв'язання. Нехай у ΔABC зі сторонами a, b, c $AD = m_a$ – медіана. Із ΔABC за теоремою косинусів

$$m_a^2 = c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2c\left(\frac{a}{2}\right)\cos B,$$

$$m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - ac\cdot\cos B.$$

Із ΔABC $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos B$,

$$ac\cdot\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}.$$

Підставивши це в попередню рівність, одержимо:

$$m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = \frac{4c^2 + a^2 - 2a^2 = 2c^2 + 2b^2}{4} =$$

$$= \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4},$$

звідки $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$.

Приклад 6. Доведіть, що бісектрису l_a трикутника можна обчислювати за формулою $l_a = \sqrt{bc - mn}$, де m, n – відрізки, на які бісектриса ділить сторону a.

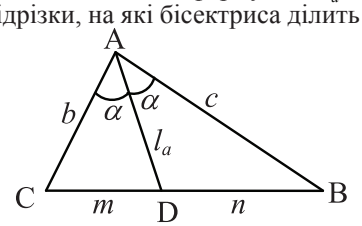

Рис. 7

Розв'язання. Нехай AD (l_a) – бісектриса кута A, $CD = m$, $DB = n$. Тоді, як відомо, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{b}{c}$.

Із ΔACD $m^2 = b^2 + l_a^2 - 2b\cdot l_a\cdot\cos\alpha$,

з ΔABD $n^2 = c^2 + l_a^2 - 2c\cdot l_a\cdot\cos\alpha$.

Звідси $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + l_a^2 - m^2}{2b\cdot l_a} = \dfrac{c^2 + l_a^2 - n^2}{2c\cdot l_a}$,

тобто $\dfrac{b^2 + l_a^2 - m^2}{b} = \dfrac{c^2 + l_a^2 - n^2}{c}$,

$$cb^2 + cl_a^2 - cm^2 = bc^2 + bl_a^2 - bn^2,$$

$$l_a^2(c - b) = bc^2 - cb^2 + cm^2 - bn^2;$$

$$l_a^2 = \frac{bc(c-b)-(bn^2-cm^2)}{c-b} = bc - \frac{bn^2-cm^2}{c-b} =$$

$$= bc - mn\frac{b\frac{n}{m}-c\frac{m}{n}}{c-b} = bc - \frac{mn\left(b\frac{c}{b}-c\frac{b}{c}\right)}{c-b} = bc - mn.$$

Формули, представлені нами у двох останніх прикладах, дуже важливі, а отже, їх бажано не забувати.

Приклад 7. Доведіть, що в паралелограмі $ABCD$ виконується співвідношення $AC^2 \cdot BD^2 = AB^4 + BC^4$, а кут A паралелограма дорівнює 45^0.

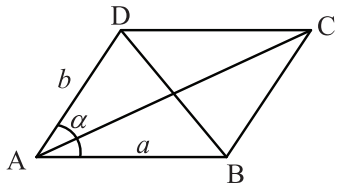

Рис. 8

Розв'язання. Нехай $\angle BAD = \alpha$, $AB = a$, $AD = b$. Тоді за теоремою косинусів із трикутників ACD і ABD знайдемо:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(180^0 - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\alpha,$$

$$BD = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha,$$

$$AC^2 \cdot BD^2 = (a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\alpha)(a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha) =$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - 4a^2 \cdot b^2 \cdot \cos\alpha = a^2 + b^2 + 2a^2 \cdot b^2 - 4a^2 \cdot b^2 \cdot \cos\alpha.$$

За умовою, це дорівнює $a^4 + b^4$, тобто $2a^2 \cdot b^2 (1 - 2\cos^2\alpha) = 0, 2 \cdot \cos^2\alpha = 1$;

$1 + \cos 2\alpha = 1$, $\cos 2\alpha = 0$, $2\alpha = 90^0$, $\alpha = 45^0$.

Приклад 8. Сторони трикутника ABC пов'язані співвідношенням $a^2 = c(b+c)$. Довести, що кут A у два рази більший ніж кут C.

Розв'язання. З умови бачимо, що $a^2 = c^2 + bc > c^2$, тобто $a > c$. Тому $C < A$, тобто C – гострий кут. За теоремою косинусів $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = c^2 + bc$, звідси $\cos A = \frac{b^2 - bc}{2bc} - \frac{b-c}{2c}$. З іншого боку

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C = a^2 - bc, \ \cos C = \frac{b+c}{2a}.$$

Покажемо, що $A = 2C$. Для цього підрахуємо:

$$\cos 2C = 2\cos^2 C - 1 = \frac{(b+c)^2}{2a^2} - 1 = \frac{b^2 + 2bc + c^2 - 2a^2}{2a^2} =$$

$$= \frac{b^2 + 2bc + c^2 - 2c(b+c)}{2c(b+c)} = \frac{b^2 - c^2}{2c(b+c)} = \frac{b-c}{2c}.$$

Отже, $\cos 2C = \cos A$. Оскільки $0 < 2C < 180^0$, $0 < A < 180^0$, то випливає, що $2C = A$, що і потрібно було довести.

Вправи

1. Доведіть, що в будь-якому трикутнику має місце співвідношення

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} = 2\left(\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}\right).$$

2. Доведіть, що в трикутнику ABC завжди $bc(1+\cos A) + ac(1+\cos B) + ab(1+\cos C) = 2p^2$, де p – півпериметр.

3. Доведіть, що якщо сторони a, b, c трикутника ABC зв'язані залежністю $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$, то кут B трикутника дорівнює 60^0.

Висновки. Проведене дослідження, а також наш досвід роботи з окресленої тематики дають змогу стверджувати, що:

1) додаткова робота з теоремою косинусів шкільного курсу геометрії є необхідною і суттєвою складовою її вивчення;

2) основним змістом представленої роботи є не лише пошук різних способів її доведення, а й представлення різних варіантів її подачі (якщо він можливий); ілюстрація застосування представленої теореми до розв'язування задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Готман Е. Г. Задача одна – решения разные / Е. Г. Готман, З. А. Скопец. – К. : Рад. шк., 1998. – 171 с.

2. Готман Е. Г. Решение геометрических задач аналитическим методом / Е. Г. Готман, З. А. Скопец. – М. : Просвещение, 1979. – 128 с.

3. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. – М. : Наука, 1986. – Ч. 1. – 272 с.

4. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. – М. : Наука, 1986. – Ч. 2. – 303 с.

5. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии (планиметрии) / И. Ф. Шарыгин. – М. : Наука, 1986. – 224 с.

Дата надходження до редакції: 11.05.2018 р.