ФІЗИКА. МАТЕМАТИКА

УДК 37.016:514

Дмитро БЕЛЕШКО,
кандидат педагогічних наук, доцент,
професор кафедри математики
з методикою викладання
Рівненського державного гуманітарного університету

НАВЧАЄМО РОЗВ'ЯЗУВАТИ ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ. ДРУГЕ ТА ІНШІ ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕОРЕМИ КОСИНУСІВ*

У статті продовжується розгляд варіювання (перебудови) теореми косинусів для розв'язування задач, адже досить часто задача, яку потрібно розв'язати, серед даних елементів не містить кутів, відповідь також не вимагає знання кутів. У таких випадках виведення відповідних кутів і тригонометричних виразів не є обов'язковим. Для подібних ситуацій наведене друге формулювання теореми косинусів, а також розглянуто інші її трактування.

Ключові слова: *теорема косинусів, розв'язування, задача.*

В статье продолжается рассмотрение варьирования (перестройки) теоремы косинусов для решения задач, ведь зачастую задача, которую нужно решить, среди данных элементов не содержит углов, ответ также не требует знания углов. В таких случаях вывода соответствующих углов и тригонометрических выражений не является обязательным. Для подобных ситуаций приведено вторую формулировку теоремы косинусов, а также рассмотрены другие ее трактовки.

Ключевые слова: *теорема косинусов, решение, задача.*

In this paper, the development of (variation) of the cosine theorem for solving problems continues. Often, the task to be solved, there are no angles among these elements, the answer also does not require knowledge of the angles. In these cases, the output of the corresponding angles and the corresponding trigonometric expressions is not mandatory. For such situations, the second formulation of the cosine theorem is given. In addition, we consider other formulas for the cosine theorem.

Key words: *cosmic theorem, solving, problem.*

*Продовження. Початок у №2 (94) за 2018 р.

У першій частині статті, яку вміщено у № 2 за 2018 р., ми розглянули основне формулювання теореми косинусів, що належить до найбільш важливих теорем евклідової геометрії. Спробуємо проаналізувати друге та інші трактування означеної теореми.

Друге формулювання теореми косинусів

Теорема 1.

1. Квадрат будь-якої сторони трикутника, що лежить навпроти гострого кута, дорівнює сумі квадратів двох інших сторін **мінус** подвоєний добуток однієї з цих сторін на проекцію на цю сторону іншої сторони.

2. Квадрат будь-якої сторони трикутника, що лежить навпроти тупого кута, дорівнює сумі квадратів двох інших сторін плюс подвоєний добуток однієї з цих сторін на проекцію на цю сторону другої сторони.

Іншими словами, мають місце такі співвідношення:

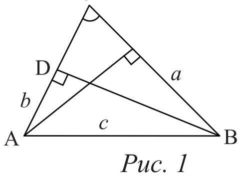

Рис. 1

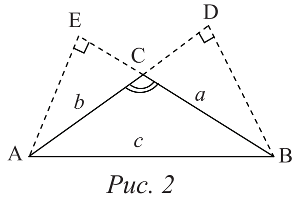

Рис. 2

$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot CE$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2b \cdot CD$

$c^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot CE$

$c^2 = a^2 + b^2 + 2b \cdot CD$

Розглянемо приклади розв'язування конкурсних задач із застосуванням теореми 1.

Приклад 1. Доведіть, що в будь-якій трапеції сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів бічних сторін плюс подвоєний добуток основ.

Розв'язання. Проведемо висоти BF і CE трапеції і застосуємо теорему 1 до трикутників ACD і ABD:
$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2 \cdot AD \cdot ED$;

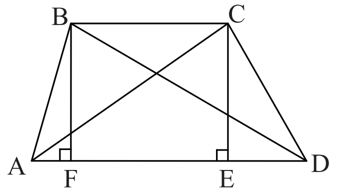

Рис. 3

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AD \cdot AF$. Додавши ці рівності, отримаємо:

$$AC^2 + BD^2 + 2AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD\left(AF + ED\right) =$$

$$= AB^2 + CD^2 + 2AD\left(AD - AF - ED\right)$$

Оскільки

$$D - AF - ED = AD - \left(AF + ED\right) = AD - \left(AD - BC\right) = BC \ ,$$

то

$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD + 2AD \cdot BC$, що й потрібно було довести.

Приклад 2. У паралелограмі ABCD дано довжини сторін: $AB = a$, $AD = b$, а також довжину відрізка $AE = c$, де E – середина сторони ВС. Знайти довжини діагоналей паралелограма.

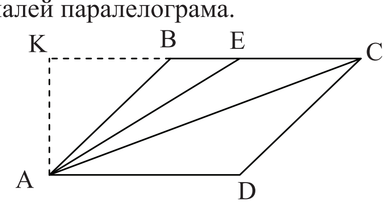

Рис. 4

Розв'язання. Проведемо висоту *AK*. Після цього із трикутників *ABC* і *ABE* знайдемо:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BK = a^2 + b^2 + 2b \cdot BK \ .$$

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 + 2BE \cdot BK = a^2 + \frac{b^2}{4} + b \cdot BK,$$

$$BK = \frac{4c^2 - 4a^2 - b^2}{4b} \ ;$$

$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2b\frac{4c^2 - 4a^2 - b^2}{4b} = \frac{4c^2 + b^2 - 2a^2}{2} \cdot$$

$$\cdot AC = \sqrt{\frac{4c^2 + b^2 - 2a^2}{2}}$$

Другу діагональ *BD* легко визначити з рівності

$$AC^2 + BD^2 = 2\left(a^2 + b^2\right); \ BD = \sqrt{\frac{6a^2 + 3b^2 - 4c^2}{2}} \ .$$

Приклад 3. У коло радіусом *R* вписано чотирикутник *ABDC* так, що його сторона *AB* є діаметром кола. Відомі також відрізки діагоналей $AK = a$, $BK \quad b$, де *K* – точка перетину діагоналей *AD* і *BC*. Знайти діагоналі чотирикутника.

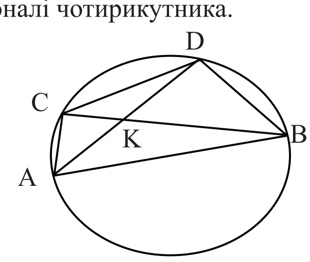

Рис. 5

Розв'язання. Оскільки *AB* – діаметр, то $\angle ACB$ – прямий,

а кут *AKB* – тупий. Із ΔAKB отримуємо:

$AB^2 = AK^2 + BK^2 + BK \cdot KC$, звідки

$KC = \dfrac{4R^2 - a^2 - b^2}{2b}$. Тепер

$$BC = b + \frac{4\mathrm{R}^2 - a^2 - b^2}{2b} = \frac{4R^2 + b^2 - a^2}{2b} \ .$$

Аналогічно знайдемо (зробіть це!):

$$AD = \frac{4R^2 + a^2 - b^2}{2a} \ .$$

Вправи

1. Навколо кола описана рівнобічна трапеція $ABCD$ з основами a і b . Визначити діагональ трапеції.

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{a^2 + c^2 + 6ac}}{2}$.

2. У тупокутному трикутнику більша сторона дорівнює 16 см, а висоти, проведені з її кінців на решту сторін, знаходяться від вершини того ж кута на відстані 2 см і 3 см. Знайти менші сторони трикутника.

Відповідь: 8 см, 12 см.

3. У гострокутному трикутнику *ABC* проведені висоти BB_1 і CC_1. Доведіть, що $BC^2 = AB \cdot BC_1 + AC \cdot CB_1$.

Інші формулювання теореми косинусів

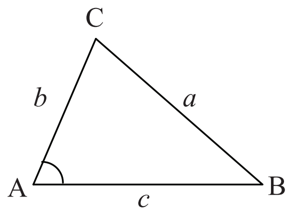

Рис. 6

Розглянемо ще раз основну формулу, що відображає теорему косинусів:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cdot \cos A \ .$$

Означену формулу можна перетворити декількома способами, що дає змогу урізноманітнити її застосування.

Теорема 2. У будь-якому трикутнику *ABC* мають місце співвідношення:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S \cdot ctgA \qquad (1)$$

$$a^2 = \left(b + c\right)^2 - 4bc \cdot \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) \qquad (2)$$

$$a^2 = \left(b + c\right)^2 - 4S \cdot ctg\left(\frac{A}{2}\right) \qquad (3)$$

$$a^2 = \left(b + c\right)^2 + 4bc \cdot \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) \qquad (4)$$

$$a^2 = \left(b - c\right)^2 - 4S \cdot tg^2\left(\frac{A}{2}\right) \qquad (5)$$

Доведення теореми дуже просте, наприклад:

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A = b^2 + c^2 - 4\left(\frac{1}{2}bc\cdot\sin A\right)\frac{\cos A}{\sin A} =$

$= b^2 + c^2 - 4S\cdot ctgA$, бо $\frac{1}{2}bc\cdot\sin A = S$.

2. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A = \left(b^2 + 2bc + c^2\right) - 2bc - 2bc\cdot\cos A =$

$= \left(b+c\right)^2 - 2bc\left(1+\cos A\right) = \left(b+c\right)^2 - 4bc\cdot\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)$ і т. д.

Кожне зі співвідношень (1) – (5) також називається теоремою косинусів.

Розглянемо приклади застосування цих формул на практиці.

Приклад 4. У трикутнику *ABC* дано кут *C*, відомо також, що вписане в трикутник коло точкою дотику *D* ділить сторону *AB* на відрізки $AD = m$, $BD \quad n$. Обчислити площу трикутника *ABC*.

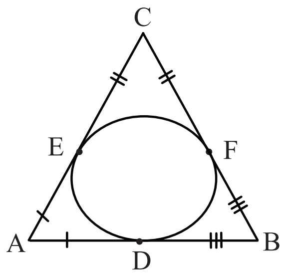

Рис. 7

Розв'язання. Позначимо, як зазвичай: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Тоді за формулою (5) маємо:

$c^2 = \left(a-b\right)^2 + 4S\cdot tg\left(\frac{C}{2}\right)$. Але $c = m + n$,

$a - b = \left(CF - FB\right) - \left(CE + EA\right) =$

$= \left(CF - CE\right) + \left(BD - AD\right) = m - n$. Отже,

$\left(m+n\right)^2 = \left(m-n\right)^2 + 4S\cdot tg\left(\frac{C}{2}\right)$,

$4mn = 4S\cdot tg\left(\frac{C}{2}\right)$, $S = \frac{mn}{tg\frac{C}{2}} = mn\cdot ctg\frac{C}{2}$.

Відповідь: $S = \frac{mn}{tg\frac{C}{2}} mn\cdot ctg\frac{C}{2}$.

Приклад 5. Доведіть, що в будь-якому трикутнику *ABC* завжди $ctgA + ctgB + ctgC = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (1):

$ctgA = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$, $ctgB = \frac{a^2+c^2-b^2}{4S}$, $ctgC = \frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$.

Додавши ці вирази, отримаємо потрібну рівність.

Приклад 6. Доведіть, що в будь-якому трикутнику має місце нерівність $\sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}}$.

Розв'язання. За формулою (4)

$a^2 = \left(b-c\right)^2 + 4bc\cdot\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)$.

Оскільки $\left(b-c\right)^2 \ge 0$, $a^2 \ge 4bc\cdot\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)$, тобто $\sin^2\frac{A}{2} \le \frac{a^2}{4bc}$ або $\sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}}$, що і потрібно було довести.

Приклад 7. Сторона рівностороннього трикутника *ABC* дорівнює 5. Через точку *M* на стороні *AB* проведені прямі, паралельні сторонам *AC* і *BC*. Вони перетинають ці сторони відповідно в точках *K* і *N*. Обчислити площу трикутника *KMN*, якщо $KN = 3$.

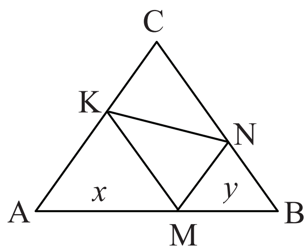

Рис. 8

Розв'язання. Позначимо $KM = x$, $MN = y$. Зрозуміло, що $x + y = 5$ (чому?) і $\angle KMN = 60^0$. Для обчислення площі трикутника *KMN* використаємо формулу (3): $KN^2 = \left(x+y\right)^2 - 4S\cdot ctg\left(\frac{\angle KMN}{2}\right)$,

$9 = 25 - 4S\cdot ctg30^0$, $4\sqrt{3}S = 16$; $S = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Відповідь: $S = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Зверніть увагу на формули (1), (3), (5). Вони можуть бути дуже корисними в задачах, де потрібно обчислити площу фігури.

Вправи

4. Сторони трикутника *ABC* зв'язані співвідношенням $a^2 + b^2 = 2c^2$. Доведіть, що за таких умов $ctgA + ctgB = 2ctgC$.

5. У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 6 і 9 сантиметрів. Знайдіть площу трикутника.
Відповідь: 54.

Формули (1) – (5) мають значну кількість досить цікавих наслідків, які допомагають при розв'язуванні задач. Розглянемо деякі з них.

1. Перепишемо формулу (2) таким чином:

$4bc\cdot\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \left(b+c\right)^2 - a^2 = \left(a+b+c\right)\left(b+c-a\right)$

Нагадаємо, що $a + b + c = 2p$, тоді $b + c - a = \left(a+b+c\right) - 2a = 2p - 2a = 2\left(p-a\right)$

Отже, $4bc\cdot\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = 4p\left(p-a\right)$, $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p\left(p-a\right)}{bc}}$.

Аналогічно – $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p\left(p-b\right)}{ac}}$, $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p\left(p-c\right)}{ab}}$.

2. Якщо взяти формулу (4) і провести аналогічні перетворення, то матимемо (зробіть це!):

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

Приклад 8. Доведіть, що площу S будь-якого трикутника можна обчислювати за формулою Герона: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Розв'язання.

$$S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=bc\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}=$$

$$=bc\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}=$$

$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Це доведення є значно простішим від того, що міститься в шкільному підручнику.

Приклад 9. Доведіть, що в будь-якому трикутнику має місце рівність $tg\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}$, де r – радіус вписаного кола.

Розв'язання. Із формули (3) маємо:

$$4S\cdot ctg\frac{A}{2}=(b+c)^2-a^2=(a+b+c)(b+c-a)=2p2(p-a);$$

$ctg\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{S}$; $tg\frac{A}{2}=\frac{S}{p(p-a)}$. Але зі школи відомо, що $S=p\cdot r$, де r – радіус вписаного кола. Тому $tg\frac{A}{2}=\frac{pr}{p(p-a)}=\frac{r}{p-a}$. Аналогічно –

$$tg\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b},\ tg\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}.$$

Вправи

6. ABC – довільний трикутник. Обчислити:

1) $\frac{ab\cdot\cos C+ac\cdot\cos B+bc\cdot\cos A}{a^2+b^2+c^2}$;

2) $\frac{(b^2+c^2-a^2)tgA(a^2+c^2-b^2)\,tgB+(a^2+b^2-c^2)tgC}{S}$.

Відповідь: 0,5; 12.

7. У трикутнику ABC має місце співвідношення $p(p-a)=\left(\frac{3}{4}\right)bc$. Чому дорівнює кут A?

Відповідь: 60^0.

8. Довести, що в будь-якому трикутнику $\frac{a+b-c}{a+b+c}=tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}$.

Висновки. Проведене дослідження, наш досвід роботи з окресленої тематики дає змогу стверджувати, що:

1) додаткова робота з теоремою косинусів шкільного курсу геометрії є необхідною і суттєвою складовою її вивчення;

2) основним змістом означеної роботи є не лише пошук різних способів її доведення, а й представлення різних варіантів (якщо вони можливі) її подачі; ілюстрація застосування даної теореми до розв'язування задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Готман Е. Г. Задача одна – решения разные / Е. Г. Готман, З. А. Скопец. – К. : Рад. шк., 1998. – 171 с.
2. Готман Е. Г. Решение геометрических задач аналитическим методом / Е. Г. Готман, З. А. Скопец. – М. : Просвещение, 1979. – 128 с.
3. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. – М. : Наука, 1986. – Ч. 1. – 272 с.
4. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. – М. : Наука, 1986. – Ч. 2. – 303 с.
5. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии (планиметрии) / И. Ф. Шарыгин. – М. : Наука, 1986. – 224 с.

Дата надходження до редакції: 11.06.2018 р.