МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

М.Я. ПОСТАН, д.э.н., профессор,
И.В. САВЕЛЬЕВА, д.э.н., доцент
Одесский национальный морской университет,
г. Одесса, Украина
postan@ukr.net, savirina@gmail.com

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ПОРТОВОГО КОНТЕЙНЕРНОГО ТЕРМИНАЛА С УЧЕТОМ НЕРАВНОМЕРНОСТИ ПРИБЫТИЯ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

В статье приводится построение и анализ марковской модели работы портового контейнерного терминала, который интерпретируется как некоторая система массового обслуживания (СМО). Специфической особенностью этой СМО является наличие взаимодействия потока судов с контейнерным поездом. Поток прибытий судна считается эрланговским. Для такой СМО выведена и решается система алгебраических уравнений для стационарных вероятностей состояний, с помощью которых выражаются основные показатели эффективности работы СМО: средний уровень запасов контейнеров на складе, вероятность простоя судна в ожидании подвоза контейнеров и др. Рассматривается задача исследования зависимости степени регулярности прибытия транспортных средств на значение указанных показателей.

Ключевые слова: *портовый контейнерный терминал, контейнерный поезд, судно-контейнеровоз, система массового обслуживания, марковский процесс, уровень запасов контейнеров на складе, вероятность простоя судна*

M. Postan, I. Savel'eva

Method of risks evaluation in output plan optimization by enterprise under random demand

In our paper, the Markovain model of port's container terminal functioning is built and analyzed. A port's terminal is interpreted as queueing system. The specific feature of this queueing system is interaction between containership and container train. It is supposed that flow of containership's arrivals is Erlang. For such kind of queueing system the system of algebraic equations is derived for determination of stationary state-probabilities. With the help of these probabilities the main performance indices are expressed, for example: mean number of containers at warehouse, probability of containership demurrage, etc. The problem of regularity of transport units' arrivals influence on storage level of containers at warehouse is considered.

Keywords: *ports' container terminal, container train, containership, queueing system, the Markov process, storage level of containers at warehouse, probability of containership demurrage*

При проектировании портовых контейнерных терминалов (ПКТ) и совершенствовании управления их функционированием возникает необходимость учитывать объективно существующие нерегулярность и аритмичность прибытия транспортных средств для погрузки и выгрузки грузов. Несмотря на существующие месячные планы-графики прибытия судов на ПКТ, а также соглашения между ПКТ и железной дорогой, идеальной координации прибытия порожнего и груженого транспорта достичь практически невозможно из-за форс-мажорных или субъективных факторов, а также из-за сложности организации работы самой транспортной системы. Нерегулярность поступления груза и транспорта на ПКТ приводят к неравномерному использованию во времени производственных мощностей и трудовых ресурсов ПКТ, к созданию их значительных резервов. Кроме того, они способствуют возникновению ряда рисковых ситуаций, например:

- простою одного вида транспорта из-за отсутствия смежных видов транспорта, груза или свободной складской вместимости;
- простою перегрузочного оборудования и докеров-механизаторов;
- недоиспользованию складских помещений;
- нарушению финансовой устойчивости оператора ПКТ.

Поэтому при определении технико-эксплуатационных параметров ПКТ необходимо учитывать возможность наступления указанных рисков.

Различные теоретические особенности данной проблематики освещались в монографиях [4; 6] и статьях [2; 3; 5]. В качестве основного методологического подхода в указанных работах использовались методы теории массового обслуживания в сочетании с методами теории запасов. Так, в статьях [2; 5] приведена вероятностная модель ПКТ, с помощью которой исследовалось взаимодействие судна-контейнеровоза с потоком автомашин. При этом для описания движения судна допускалась разная степень регулярности его прибытия на ПКТ, что учитывалось с помощью закона распределения Эрланга времени рейса судна. Отметим, что обозримые аналитические результаты в цитированных работах получены при упрощающем предположении о нулевом (т.е. практически пренебрежимо малом) времени выгрузки контейнеров из машин на склад и времени их погрузки со склада на судно. Несмотря на кажущуюся неестественность такого допущения, оно вполне приемлемо с теоретической точки зрения, так как найденное с его помощью соотношения и показатели эффективности работы ПКТ могут рассматриваться как нулевое приближение при их разложении в степенные ряды по степеням малого параметра (т.е. времени погрузки/выгрузки). Кроме того, такое допущение позволяет сконцентрировать внимание на оценке простоев транспорта, вызванных только недостаточной координацией моментов прибытия груженых и порожних транспортных средств (например, простоя судна вследствие ожидания подвоза груза). Использовавшийся в цитированных работах подход может быть использован также для анализа взаимодействия потока судов и контейнерного поезда.

Как следует из результатов предыдущих исследований [2-6], без тех или иных упрощающих допущений теоретическое исследование указанного класса транспортных систем становится практически невозможным из-за высокой размерности моделей. Поэтому здесь обычно приходится довольствоваться в основном только асимптотическими результатами, имитационными экспериментами и качественным анализом.

Целью работы является построение и анализ вероятностной модели работы ПКТ, учитывающую взаимодействие линейного судна-контейнеровоза с контейнерным поездом (или фидерным судном), а также установление аналитических зависимостей между параметрами входящих потоков транспорта и основными показателями эффективности работы исследуемой транспортной системы.

Математическая постановка задачи. Предположим, что на ПКТ прибывает линейное судно-контейнеровоз для погрузки контейнеров, которые доставляются с помощью маршрутного контейнерного поезда (или фидерного судна). Время кругового рейса судна (без учета времени его нахождения на ПКТ) будем считать случайной величиной с функцией распределения (ф.р.) $A_1(t)$. Примем, что длительность кругового рейса контейнерного поезда также является случайной величиной с ф.р. $A_2(t)$, причем независимой от случайной длительности рейса судна. Считаем, что с вероятностью a_i на судно погружается ровно i контейнеров (в единицах TEU)

$$\sum_{i=1}^{K} a_i = 1,$$

где K – максимальное число контейнеров, которое следует погрузить на судно. Это число, очевидно, не превышает контейнеровместимость судна.

Каждый контейнерный поезд привозит ровно $L < K$ контейнеров, которые выгружаются на складскую площадку. Длительностями погрузки контейнеров на судно и выгрузки их из поезда будем пренебрегать, т.е. считать, что эти времена значительно меньше, чем средние длительности рейсов судна и поезда. Вместимость склада (в единицах TEU) будем считать достаточно большой (т.е. будем пренебрегать возможностью простоя поезда из-за отсутствия свободной складской емкости).

Обозначим через $\nu(t)$ количество контейнеров, находящихся в момент времени t на складе, если $\nu(t) \geq 0$. Если $\nu(t) < 0$, то $|\nu(t)|$ есть количество контейнеров, которое должно быть погружено на судно, при условии, что в момент t судно находится на ПКТ и склад пуст.

Основной задачей является нахождение распределения вероятностей случайного процесса $\nu(t)$ в принятых выше допущениях. Располагая этим распределением, мы можем определить различные показатели эффективности работы ПКТ. Однако при произвольных ф.р. $A_1(t)$ и $A_2(t)$ эта задача весьма сложна в математическом аспекте. Практически, получить обозримые аналитические результаты можно только для случая:

$$A_n(t) = 1 - e^{-\lambda_n t} \sum_{j=0}^{r_n - 1} \frac{(\lambda_n t)^j}{j!}, n = 1,2, \tag{1}$$

т.е. для закона распределения Эрланга или для других распределений фазового типа. Для приложений этого, впрочем, вполне достаточно.

Отметим, что распределение (1) позволяют описать широкий спектр реальных ситуаций: от совершенно случайных длительностей круговых рейсов транспортных средств (r_n=1, n=1,2) до полностью регулярного их движения $(r_n \to \infty,\ 1/\lambda_n \to 0, n = 1{,}2)$.

Ниже будет найдено стационарное распределение процесса $\nu(t)$ для некоторых частных случаев закона распределения (1).

Основные результаты работы. Рассмотрим вначале наиболее простой с математической точки зрения случай $r_1 = r_2 = 1$. При этом $\nu(t)$ становится однородным марковским процессом, фазовое пространство состояний которого будет таким:

$$\Omega = \{i : i = -K, -K+1, \ldots, 0, 1, \ldots\}.$$

Обозначим

$$p(i) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{\nu(t) = i\}, i \in \Omega, \qquad (2)$$

предельные вероятности состояний процесса $\nu(t)$ (в предположении существования указанных пределов). Для нахождения распределения вероятностей (2) стандартным путем [1] можно вывести следующую бесконечную систему алгебраических уравнений Колмогорова:

$$\lambda_2 p(i) + \lambda_1 \sum_{l=0}^{K+i} a_{l-i}\, p(l) = 0, \qquad (3)$$
$$i = -K, -K+1, \ldots, -K+L-1,$$

$$-\lambda_2 p(i) + \lambda_2 p(i-L) + \lambda_1 \sum_{l=0}^{K+i} a_{l-i} p(l) = 0, \qquad (4)$$
$$i = -K+L, -K+L-1, \ldots, -1,$$

$$-(\lambda_1+\lambda_2)p(i) + \lambda_2 p(i-L) + \lambda_1 \sum_{l=i+1}^{K+i} a_{l-i} p(l) = 0, \qquad (5)$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\sum_{i=-K}^{\infty} p(i) = 1. \qquad (6)$$

Из уравнений (3), (4) можно последовательно выразить вероятности $p(-K), p(-K+1), \ldots, p(-1)$ через вероятности $p(0), p(1), \ldots, p(K-1)$. Из уравнений (3) получим следующее рекуррентное соотношение:

$$p(i) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sum_{l=0}^{K+i} a_{l-i} p(l), \qquad (7)$$
$$i = -K, -K+1, \ldots, -K+L-1$$

Из уравнений (4) при $i = -K+L, -K+L+1, \ldots, -K+2L-1$ с учетом (7) последовательно находим:

$$p(-K+L) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}[a_K p(0) + \sum_{l=0}^{L} a_{l+K-L} p(l)],$$

$$p(-K+L+1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}[a_{K-1} p(0) + a_K p(1)$$
$$+ \sum_{l=0}^{L+1} a_{l+K-L-1} p(l)], \qquad (8)$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$p(-K+2L-1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}[\sum_{l=0}^{L-1} a_{l+K-L+1} p(j)$$
$$+ \sum_{l=0}^{2L-1} a_{l+K} p(l)].$$

Действуя аналогично для значений $i = K+2L, -K+2L+1, \ldots, -1$, с помощью уравнений (4) выразим все вероятности $p(i), i = -K, -K+1, \ldots, -1$, через вероятности $p(0), p(1), \ldots, p(K-1)$. Таким образом, задача свелась к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (5),(6). Решим эту систему методом производящих функций. Введем следующую функцию:

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p(i) z^i, |z| \le 1,$$

и с ее помощью преобразуем систему (5). В результате стандартных преобразований найдем:

$$P(z) = z^K\{\lambda_2 z^L \sum_{i=-L}^{-1} p(i) z^i - \lambda_1 \sum_{l=1}^{K} a_l z^{-l} \sum_{i=0}^{l-1} p(i) z^i\} \times$$
$$\times [\lambda_1 (z^K - \sum_{i=1}^{K} a_i z^{K-i}) + \lambda_2 z^K (1 - z^L)]^{-1}, |z| \le 1. \qquad (9)$$

Поскольку $P(z)$ аналитическая в круге $|z| \le 1$ функция, то нули числителя и знаменателя дроби (9) должны совпадать между собой. Один из этих нулей равен 1, поэтому из (9) вытекает равенство:

$$\lambda_2 \sum_{i=-L}^{-1} p(i) = \lambda_1 \sum_{l=1}^{K} a_l \sum_{i=0}^{l-1} p(i). \tag{10}$$

Соотношение (10) выражает так называемый закон сохранения для анализируемой обслуживающей системы. Он показывает, что в установившемся режиме работы системы интенсивность потока событий «в момент прибытия судна на складе недостаточно контейнеров для его загрузки» (правая часть равенства (10)) равна интенсивности потока событий «на ПКТ, где находится судно в ожидании контейнеров, прибывает поезд с недостающими для догрузки судна контейнерами» (левая часть равенства (10)).

Вычислим:

$$\lim_{z \to 1-0} P(z),$$

применив правило Лопиталя и используя соотношение (10):

$$P(1) = \frac{\lambda_1 \sum_{l=1}^{K} \sum_{i=0}^{l-1} (L - i + l) a_l p(i) + \lambda_2 \sum_{i=-L}^{-1} i p(i)}{\lambda_1 \sum_{i=1}^{K} i a_i - \lambda_2 L}. \tag{11}$$

Поскольку $P(1)$ есть вероятность, а числитель дроби (11) неотрицателен, то ее знаменатель должен быть положительным, т.е. должно выполняться неравенство:

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{K} i a_i > \lambda_2 L. \tag{12}$$

С физической точки зрения условие (12) является необходимым для существования установившегося режима работы ПКТ как обслуживающей системы. При его нарушении количество контейнеров, скапливающихся на складе, будет неограниченно возрастать с течением времени (в силу принятого выше допущения о неограниченности складской вместимости). В левой части неравенства (12) стоит параметр потока контейнеров, вывозимых из ПКТ, а в правой части – параметр потока прибывающих на ПКТ контейнеров. Таким образом, выполнение условия (12) гарантирует работу ПКТ в статистически равновесном режиме. Разность же левой и правой частей неравенства (12) имеет смысл резерва пропускной способности ПКТ.

Для нахождения оставшихся неизвестными вероятностей $p(i), i = 0,1,\dots,K-1,$ необходимо вновь воспользоваться свойством аналитичности функции (9) в единичном круге, где многочлен:

$$D(z) = \lambda_1 (z^K - \sum_{i=1}^{K} a_i z^{K-i}) + \lambda_2 z^K (1 - z^L)$$

имеет ровно K нулей. Чтобы доказать это утверждение, представим данный многочлен в виде:

$$D(z) = D_1(z) - D_2(z),$$

где

$$D_1(z) = (\lambda_1 + \lambda_2) z^K,$$

$$D_2(z) = \lambda_1 \sum_{i=1}^{K} a_i z^{K-i} + \lambda_2 z^{K+L}.$$

Поскольку на окружности $|z| = 1$ выполняется условие

$$|D_2(z)| = \left| \lambda_2 z^{K+L} + \lambda_1 \sum_{i=1}^{K} a_i z^{K-i} \right| \le \lambda_2 |z|^{K+L}$$

$$+ \lambda_1 \sum_{i=1}^{K} a_i |z|^{K-i} = \lambda_2 + \lambda_1 = |D_1(z)|,$$

то, согласно теореме Руше [1], функции $D(z)$ и $D_1(z)$ имеют одинаковое число нулей внутри и на границе единичного круга $|z| \le 1,$ т.е. K нулей. Обозначим эти нули через $z_0 = 1, z_1, z_2, \dots, z_{K-1}$. Тогда из (9) вытекает следующая система уравнений для нахождения $p(i), i = 0,1,\dots,K-1$:

$$\lambda_2 z_m^L \sum_{i=-L}^{-1} p(i) z_m^i - \lambda_1 \sum_{l=1}^{K} a_l z_m^{-l} \sum_{i=0}^{l-1} p(i) z_m^i = 0,$$

$$m = 1,2,\dots,K-1.$$

Эта система должна решаться вместе с

уравнением (6) с учетом равенств (7), (8).

Отметим вычислительную сложность указанной задачи, связанную с тем, что параметр K на практике является достаточно большим числом (обычно измеряемым десятками и даже сотнями). Поэтому нахождение корней алгебраического уравнения $D(z)=0$ степени $K+L$ может представлять серьезную вычислительную проблему.

Используя предельные вероятности, найденные в результате решения системы (3)-(6), можно вычислять показатели, характеризующие эффективность взаимодействия судна с контейнерным поездом. Приведем некоторые из них.

а) среднее количество контейнеров, находящихся на складе в произвольный момент времени,

$$\overline{K} = P'(1) =$$
$$= \frac{1}{2}\{\lambda_2[L(2K+L-1)P(1) +$$
$$\sum_{i=-L}^{-1}(K+L+i)(K+L+i-1)p(i)] -$$
$$-\lambda_1[\sum_{i=1}^{K} i(2K-i-1)a_i +$$
$$\sum_{l=1}^{K} a_l \sum_{i=0}^{l-1}(K-l+i)(K-l+i-1)p(i)]\}\times$$
$$\times(\lambda_1\sum_{i=1}^{K} ia_i - \lambda_2 L)^{-1}.$$

Здесь вероятность $P(1)$ определена формулой (11).

б) среднее число контейнеров, в ожидании прибытия которых простаивает судно,

$$\bar{l} = \sum_{i=1}^{K} ip(-i).$$

в) вероятность простоя судна в ожидании подвоза контейнеров на поезде:

$$\sum_{i=1}^{K} p(-i) = 1 - P(1).$$

С целью минимизации простоя судна можно подобрать параметр L таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{i=1}^{K} p(-i) \le \varepsilon \quad \text{или} \quad P(1) \ge 1-\varepsilon,$$

где $\varepsilon -$ заданная малая вероятность.

Проанализируем теперь более общий, чем изучавшийся выше случай, считая, что $r_1 = r > 1, r_2 = 1.$ В этом случае можно говорить об ограниченной регулярности прибытия судна на терминал, поскольку при больших значениях параметра r и фиксированной величине r/λ_1 время между уходом судна из ПКТ до следующего момента его прибытия будет мало отличаться от постоянной величины. Для моделирования данной обслуживающей системы воспользуемся обычно применяемым в такой ситуации методом фаз Эрланга [1]. Обозначим через $\gamma(t)$ номер текущей фазы движения судна в момент времени t и введем в рассмотрение однородный марковский процесс $(\gamma(t),\nu(t)),$ где компонента $\nu(t)$ сохраняет прежний смысл. Этот марковский процесс определен над следующим фазовым пространством состояний:

$$\Omega = \{(j,i): j=1,2,...,r-1; i=0,1,2,...\}$$
$$\bigcup\{(0,i): i=-K,-K+1,...,-1,0\}.$$

Отметим, что состояния $(\gamma(t)=0,\nu(t)<0)$ здесь имеют следующий смысл: в момент времени t склад пуст и судно стоит у причала в ожидании подвоза контейнеров поездом, причем для загрузки судна требуется ровно $|\nu(t)|$ контейнеров. Состояния же $(\gamma(t)=0,\nu(t)\ge 0)$ означают, что в момент t судно находится в первой фазе движения, а на складе находится $\nu(t)$ контейнеров. Обозначим

$$p(j,i) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{\gamma(t)=j,\nu(t)=i\},(j,i)\in\Omega$$

(считая, что указанные пределы существуют). Предельные вероятности $p(j,i),(j,i)\in\Omega,$ удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений Колмогорова, обобщающей систему (3)-(6):

$$-\lambda_2 p(0,i) + \lambda_1 \sum_{l=0}^{K+i} a_{l-i} p(r-1,l) = 0, \qquad (13)$$
$$i = -K,-K+1,...,-K+L-1,$$

$$-\lambda_2 p(0,i)+\lambda_2 p(0,i-L)+$$
$$\lambda_1\sum_{l=0}^{K+i}a_{l-i}p(r-1,l)=0, \qquad (14)$$
$$i=-K+L,-K+L-1,\ldots,-1,$$

$$-(\lambda_1+\lambda_2)p(0,i)+\lambda_2 p(0,i-L)+$$
$$\lambda_1\sum_{l=i+1}^{K+i}a_{l-i}p(r-1,l)=0, i=0,1,2,\ldots, \qquad (15)$$

$$-(\lambda_1+\lambda_2)p(j,i)+\lambda_2 e(i-L+1)p(j,i-L)+$$
$$\lambda_1 p(j-1,i)=0, j=1,2,\ldots r-1; i=0,1,2,\ldots, \qquad (16)$$

$$\sum_{i=-K}^{0}p(0,i)+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{r-1}p(j,i)=1. \qquad (17)$$

где $e(x)=1,$ если $x=0, e(0)=0.$

Из (13) находим

$$p(0,i)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\sum_{l=0}^{K+i}a_{l-i}p(r-1,l), \qquad (18)$$
$$i=-K,-K+1,\ldots,-K+L-1,$$

а из (14) следует, что:

$$p(0,i)=p(0,i-L)+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\sum_{l=0}^{K+i}a_{l-i}p(r-1,l), \qquad (19)$$
$$i=-K+L,-K+L+1,\ldots,-1$$

Следовательно, все вероятности вида $p(0,i), i=-K,-K+1,\ldots,-1,$ выражаются по формулам (18), (19) через вероятности $p(r-1,i),\ i=0,1,\ldots,K-1.$ Для нахождения оставшихся вероятностей воспользуемся уравнениями (15)-(17). Введем производящие функции:

$$P_j(z)=\sum_{i=0}^{\infty}p(j,i)z^i, |z|\le 1, j=0,1,\ldots,r-1 \qquad (20)$$

и преобразуем с их помощью систему уравнений (15),(16). В итоге придем к следующей системе уравнений для нахождения функций (20):

$$-[\lambda_1+\lambda_2(1-z^L)]P_0(z)+\lambda_1 P_{r-1}(z)\sum_{i=1}^{K}a_i z^{-i}+$$
$$+\lambda_2 z^L\sum_{i=-L}^{-1}p(0,i)z^i-\lambda_1\sum_{l=1}^{K}a_l z^{-l}\sum_{i=0}^{l-1}p(r-1,i)z^i=0, \qquad (21)$$

$$[\lambda_1+\lambda_2(1-z^L)]P_j(z)-\lambda_1 P_{j-1}(z)=0, \qquad (22)$$
$$j=1,2,\ldots,r-1.$$

Из (22) следует, что:

$$P_j(z)=[\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2(1-z^L)}]^j P_0(z), \qquad (23)$$
$$j=1,2,\ldots,r-1.$$

Полагая в формуле (23) $j=r-1$ и подставляя в (21) полученное выражение для $P_{r-1}(z),$ найдем:

$$P_0(z)=z^K\{\lambda_2 z^L\sum_{i=-L}^{-1}p(0,i)z^i-$$
$$\lambda_1\sum_{l=1}^{K}a_l z^{-l}\sum_{i=0}^{l-1}p(r-1,i)z^i\}[\lambda_1+\lambda_2(1-z^L)]^{r-1}\times \qquad (24)$$
$$\times\{z^K[\lambda_1+\lambda_2(1-z^L)]^r-\lambda_1^r\sum_{i=1}^{K}a_i z^{K-i}\}^{-1}.$$

Положив в (24) $z=1$ и учитывая свойство аналитичности функции $P_0(z)$ в единичном круге,
получим соотношение, обобщающее (10),

$$\lambda_2\sum_{i=-L}^{-1}p(0,i)=\lambda_1\sum_{l=1}^{K}a_l\sum_{i=0}^{l-1}p(r-1,i). \qquad (25)$$

Вычислив предел в (24) при $z\to 1-0$ с учетом (25), найдем:

$$P_0(1)=\frac{\lambda_1\sum_{l=1}^{K}a_l\sum_{i=0}^{l-1}(L+i-l)p(r-1,i)+\lambda_2\sum_{i=-L}^{-1}ip(0,i)}{\lambda_1\sum_{i=1}^{K}ia_i-r\lambda_2 L}. \qquad (26)$$

Из (26) вытекает следующее необходимое условие существования установившегося режима работы системы (см. (12)):

$$\lambda_1\sum_{i=1}^{K}ia_i>\lambda_2 rL. \qquad (27)$$

С целью определения неизвестных вероятностей $p(r-1,i),\ i=0,1,...,K-1,$ необходимо исследовать нули знаменателя дроби в правой части формулы (24). Представим этот знаменатель в виде разности:

$$D_3(z)-D_4(z), \qquad (28)$$

где

$$D_3(z)=z^K(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_2 z^L),$$

$$D_4(z)=\lambda_1^r\sum_{i=1}^{K}a_i z^{K-i}.$$

На единичной окружности $|z|=1$ имеют место следующие неравенства:

$$|D_3(z)| = |z|^K\left|\lambda_1+\lambda_2-\lambda_2 z^L\right|^r \geq$$

$$(|\lambda_1+\lambda_2|-\lambda_2|z|^L)^r = \lambda_1^r,$$

$$|D_4(z)| = \lambda_1^r\left|\sum_{i=1}^{K}a_i z^{K-i}\right| \leq$$

$$\lambda_1^r\sum_{i=1}^{K}a_i\left|z^i\right| = \lambda_1^r \leq |D_3(z)|.$$

Поэтому функция (28) имеет столько же нулей внутри и на границе единичного круга, сколько и функция $D_3(z),$ т.е. K нулей, которые будем обозначать, как и выше, $z_0=1,z_1,z_2,...,z_{K-1}$.

Из свойства аналитичности функции $P_0(z)$ в указанном круге из (24) следует, что должны выполняться равенства:

$$\lambda_2\sum_{i=-L}^{-1}p(0,i)z_m^{L+i}-$$

$$-\lambda_1\sum_{l=1}^{K}a_l\sum_{i=0}^{l-1}p(r-1,i)z_m^{i-l}=0,$$

$$m=0,1,...,K-1.$$

Решение этой системы вместе с уравнениями (17)-(19) позволит найти все оставшиеся неизвестными вероятности состояний обслуживающей системы.

Укажем некоторые основные показатели эффективности обслуживания, которые выражаются через найденные вероятности.

а) среднее количество контейнеров, находящихся на складе в произвольный момент времени,

$$\overline{K}_r=\sum_{j=0}^{r-1}P_j'(1)=rP_0'(1)+$$

$$\frac{r(r-1)\lambda_2}{2\lambda_1}LP_0(1), \qquad (29)$$

где $\quad(\lambda_1\sum_{i=1}^{K}ia_i-r\lambda_2 L)P_0'(1)=$

$$rL\lambda_2[(r-1)L\lambda_2-(L-1)\lambda_1]-$$

$$-2(r-1)L\lambda_2[\lambda_2\sum_{i=-L}^{-1}(L+i)p(0,i)+$$

$$\lambda_1\sum_{l=1}^{K}\sum_{i=0}^{l-1}(l-i)a_l p(r-1,i)]+$$

$$+\lambda_1[\lambda_2\sum_{i=-L}^{-1}(L+i)(L+i-1)p(0,i)-$$

$$\lambda_1\sum_{l=1}^{K}\sum_{i=0}^{l-1}a_l p(r-1,i)(l-i)(l-i+1)],$$

а $P_0(1)$ вычисляется по формуле (26).

б) среднее число контейнеров, которые ожидает судно,

$$\bar{l}_r=\sum_{i=1}^{K}ip(0,-i). \qquad (30)$$

в) вероятность простоя судна в ожидании прибытия контейнеров:

$$\sum_{i=1}^{K}p(0,-i)=1-\sum_{j=0}^{r-1}P_j(1). \qquad (31)$$

Выражения (29) и (31) позволяют провести количественный анализ влияния степени регулярности прибытия судна на терминал, характеризуемой параметром r, на средний уровень запаса контейнеров на складе и на вероятность простоя судна. В то же время на эти показатели влияет также и степень регулярности прибытия контейнерного поезда. Общая закономерность влияния степени регулярности прибытия транспортных средств на терминал заключается в снижении среднего уровня запаса контейнеров на складе с ростом степени регулярности. Поэтому представляет интерес дальнейшее исследование процесса взаимодействия на терминале судов и поезда с учетом разного уровня регулярности прибытия судов и поезда. Как следует из приведенных выше результатов, такая задача в принципе также может быть решена, хотя ее решение и сопряжено с большими математическими трудностями.

Литература

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания: Монография. Пер с англ. / Л. Клейнрок. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.

2. Постан М.Я. Вероятностная модель портового контейнерного терминала с учетом неравномерности прибытия транспортных средств / М.Я. Постан, И.В. Савельева // Вісник Донецького Національного Університету. Серія В: економіка і право. – 2011. – Т.2. – С. 220-226.

3. Постан М.Я. Моделирование двухмодальной системы доставки груза в условиях неопределенности и риска / М.Я. Постан, И.В. Савельева // Методи та засоби управління розвитком транспортних систем: Зб. наук. праць. – Одеса: ОНМУ. – 2012. – Вип.19. – С.55-74.

4. Постан М.Я. Экономико-математические модели смешанных перевозок: Монография / М.Я. Постан. – Одесса: Астропринт, 2006. – 376 с.

5. Савельева И.В. Об одной вероятностной модели функционирования портового контейнерного терминала / И.В. Савельева // Методи та засоби управління розвитком транспортних систем: Зб. наук. праць. – Одеса: ОНМУ, 2011. – Вип.17. – С.160-174.

6. Савельева И.В. Принципы стратегического управления в деятельности оператора портового контейнерного терминала: Монография / И.В. Савельева. – Одесса: Астропринт, 2012. – 304 с.

References

1. Klejnrok L. Teorija massovogo obsluzhivanija: Monografija. Per s angl. / L. Klejnrok. – M.: Mashinostroenie, 1979. – 432p.

2. Postan M.Ja. Verojatnostnaja model' portovogo kontejnernogo terminala s uchetom neravnomernosti pribytija transportnyh sredstv / M.Ja. Postan, I.V. Savel'eva // Visnik Donec'kogo Nacional'nogo Universitetu. Serija V: ekonomika i pravo. – 2011. – T.2. – P. 220-226.

3. Postan M.Ja. Modelirovanie dvuhmodal'noj sistemy dostavki gruza v uslovijah neopredelennosti i riska / M.Ja. Postan, I.V. Savel'eva // Metodi ta zasobi upravlinnja rozvitkom transportnih sistem: Zb. nauk. prac'. – Odesa: ONMU. – 2012. – Vip.19. – P. 55-74.

4. Postan M.Ja. Jekonomiko-matematicheskie modeli smeshannyh perevozok: Monografija / M.Ja. Postan. – Odessa: Astroprint, 2006. – 376 p.

5. Savel'eva I.V. Ob odnoj verojatnostnoj modeli funkcionirovanija portovogo kontejnernogo terminala / I.V. Savel'eva // Metodi ta zasobi upravlinnja rozvitkom transportnih sistem: Zb. nauk. prac'. – Odesa: ONMU, 2011. – Vip.17. – P. 160-174.

6. Savel'eva I.V. Principy strategicheskogo upravlenija v dejatel'nosti operatora portovogo kontejnernogo terminala: Monografija / I.V. Savel'eva. – Odessa: Astroprint, 2012. – 304 p.

Статья поступила в редакцию 11.04.2014

З.М. СОКОЛОВСЬКА, д.е.н., професор,
Н.В. ЯЦЕНКО
Одеський національний політехнічний університет,
м. Одеса, Україна
natali_j@te.net.ua

МОДЕЛЮВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ МОРСЬКОГО ПОРТУ

Пропонується застосування комп'ютерних імітаційних технологій як гнучкого інструментарію моделювання економічних систем. Обґрунтовується доцільність залучення системно-динамічного підходу в моделюванні розвитку морського порту. Запропоновано комплекс моделей операційної діяльності порту та пов'язаних з нею фінансових потоків. Розглянута структура моделі динаміки розвитку порту протягом року з добовим кроком імітації. Наведені результати імітаційних експериментів на моделі на прикладі Державного підприємства «Морський торгівельний порт «Усть-Дунайськ».

Ключові слова: *імітаційна модель, імітаційний експеримент, системно-динамічний підхід, операційна діяльність*