М.А. НАУМОВА, к.ф.-м.н., доцент
Донецкий национальный университет,
г. Донецк, Украина
naumova.maryna@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПОТРЕБЛЕНИЯ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрена модель потребления клиентом некоторого банка денежных средств методами теории оптимального управления. Приведена математическая постановка задачи для максимизации дисконтированной долгосрочной полезности. Используя принцип максимума, получена система линейных дифференциальных уравнений. Найдена оптимальная траектория управления.

Ключевые слова. *Потребление, функция полезности, принцип максимума, оптимальное управление, линейная система*

M.A. Naumova

Consumption model study by optimal management theory methods

The article describes some bank client's cash consumption model by optimal management theory methods. It provides a mathematical task setting for a discounted long-term utility maximization. Using the maximum principle, the article obtains a linear differential equations system. The optimal trajectory of management was found.

Keywords: *Consumption, utility function, maximum principle, optimal management, linear system*

Современная экономика Украины характеризуется дефицитом бюджета и общим спадом производства. Эти ее черты оказывают негативное влияние на рынок потребительских товаров и услуг, что существенно усложняет задачу принятия потребителем решений относительно выбора этих товаров и услуг. Удовлетворение потребностей людей является основной целью функционирования экономики, главной и непосредственной задачей любого производства. Потребление является постоянным и непреходящим объектом внимания экономистов во все времена, а теория потребления постоянно требует своего дальнейшего развития.

Основное внимание в научных исследованиях экономистов в последнее время уделяется вопросам развития производства, инвестирования, становления и развития рыночной инфраструктуры. Вместе с тем, проблемы потребителей не находят достаточного теоретического объяснения.

Для потребителей в настоящее время становится характерным нерациональное поведение, неустойчивость предпочтений, возрастающая натурализация потребления и другие явления, которые не находят объяснения в рамках традиционной экономической теории. Все эти негативные тенденции приводят к необходимости повышенного внимания как к теоретическим аспектам потребления, так и к анализу практики потребления. Современная экономика, развивающаяся на основе как прошлых, так и новейших теорий, не отличается высокой эффективностью и не дает ответа на вопросы о природе процессов, происходящих в сфере потребления. Поэтому становятся актуальными разработки новых методов и социально-экономических моделей, способных адекватно описывать эти процессы и давать возможность их прогнозирования.

Для решения проблем, связанных с принятием рациональных решений в сфере производства и потребления, адекватным измерением результатов и затрат, экономисты используют такой мощный метод исследования, как математическое моделирование экономических процессов и явлений. Существует большой класс задач, в которых нужно определить оптимальные действия экономического объекта, которые учитывают динамику его состояний в пространстве и во времени. Состояние такого объекта можно охарактеризовать параметрами управления и параметрами состояния. В зависимости от выбора этих параметров процесс управления объектом будет протекать различным образом. Методы решения таких задач составляют предмет математической теории оптимального управления. Во многих случаях модели, использующие аппарат теории оптимального управления, приводят к интересным и познавательным результатам и описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных.

Теоретические основы потребления как экономической категории и сопряженные с ним проблемы рассматривались различными школами и направлениями. Среди них можно выделить неклассическую теорию поведения потребителя, которая сформировалась в работах У.С. Джевонса [3], А. Маршалла [10], Е. Слуцкого [13] и других авторов. Они заложили основу для появления последующих макроэкономических исследований потребления в работах Дж. М. Кейнса [8] и посткейнсианских теорий. Функция полезности была введена еще в XIX в. У.С. Джевонсом, К. Менгером и Л. Вальрасом, которые одновременно и независимо друг от друга разрабатывали теорию предельной полезности [3]. Осмыслению проблем потребления, присущих формирующемуся постиндустриальному обществу, посвящены работы В. Иноземцева [5], Я. Кронрода [9], Р. Цвылева [14].

Задачи оптимального управления являются эффективным математическим аппаратом в различных вопросах математической экономики. Оптимизационные динамические модели экономических систем рассматриваются в работах Ф. Рамсея, Т. Купманса. Развитие этих моделей представлено работами В. Болтянского [2], Э. Полака [11], Р. Калмана [6], Л. Понтрягина [12], Р. Беллмана [1], А. Дубовицкого, А. Милютина, В. Левина [4], Л. Канторовича, А. Горстко [7]. Однако, не смотря на достаточное использование динамических моделей для решения экономических проблем, вопросам оптимизации потребления банковских средств уделено недостаточно внимания.

Целью статьи является построение и исследование модели потребления клиентом некоторого банка денежных средств методами теории оптимального управления.

Состояние потребительского спроса всегда определяло и определяет степень востребованность продуктов и услуг. В частности, это касается возможностей производителей выводить новые продукты на рынок. В условиях рыночной системы управления производственной и сбытовой деятельностью предприятий и фирм в основе принятия хозяйственных решений лежит рыночная информация, а обоснованность решений проверяется рынком в ходе реализации товаров и услуг. При таком подходе начальным пунктом всего цикла предпринимательской деятельности становится изучение поведения потребителя.

Рассмотрим потребителя, который в результате своего существования потребляет некоторые блага. В качестве благ могут выступать:

- продовольственные товары;
- товары первой необходимости;
- товары второй необходимости;
- предметы роскоши;
- платные услуги и т.д.

Модели потребления базируются на объективных психологических законах удовлетворения потребности человека, которые проявляются в определенной рыночной среде. Но выбор потребителя определяется не только его предпочтениями, он также ограничен ценой товаров и доходом потребителя.

В экономике считается, что потребитель определяет степень полезности от потребления любого блага. Зная полезность от потребления различных благ, потребитель делает выбор из этих благ. И этот выбор должен приносить максимальную полезность потребителю.

Функция полезности – это функция, отражающая зависимость общей полезности от количеств потребляемых благ.

Предположим, что клиент банка имеет на счету в момент времени $t=0$ сумму денег x_0. Пусть эта сумма увеличивается с коэффициентом $k>0$.

Обозначим через $y(t)$ – количество денег, которое используется для потребления в момент времени t, а через $x(t)$ – сумму денег в банке в момент t. Тогда количество денег в банке можно определить как решение дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{dt}=kx-y$$

с начальным условием $x(0)=x_0,\ x_0>0$.

Пусть клиент хочет выбрать траекторию потребления таким образом, чтобы максимизировать дисконтированную долгосрочную полезность на интервале времени $(0;T)$:

$$u=\int_0^T e^{-pt}U(y(t))\,dt,$$

где $U(y(t))$ – мгновенная полезность от потребления суммы денег $y(t)$ в момент времени t, а $p\geq 0$ – персональный коэффициент предпочтения клиента.

Предположим, что функция полезности

имеет вид:

$$U\left(y(t)\right) = y^{\alpha}\left(t\right),$$

где $0<\alpha<1$. Пусть, также, клиент хочет сохранить на счету в банке сумму денег x_1 в момент времени T, то есть $x\left(T\right)=x_1,\ x_1>0$.

Таким образом, мы приходим к следующей математической постановке задачи. Найти максимум функционала

$$u=\int_0^T e^{-pt}y^{\alpha}(t)dt$$

при условиях

$$\frac{dx}{dt}=kx-y,$$

$$x\left(0\right)=x_0,$$

$$x\left(T\right)=x_1,$$

$$x_0>0,\ x_1>0.$$

Для того чтобы решить эту задачу, составим обобщенный гамильтониан:

$$\bar{H}\left(x,y,\alpha,\mu\right)=y^{\alpha}+\mu\left(kx-y\right).$$

Первое условие принципа максимума $\frac{\partial\bar{H}}{\partial y}=0$ дает равенство:

$$\alpha y^{\alpha-1}-\mu=0,$$

откуда находим:

$$y(t)=\left(\frac{\alpha}{\mu\left(t\right)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \qquad (1)$$

Дифференциальное уравнение для функции $\mu\left(t\right)$ получим из второго условия принципа максимума:

$$\frac{d\mu}{dt}-p\mu=-\frac{\partial\bar{H}}{\partial x}.$$

Имеем

$$\frac{d\mu}{dt}-p\mu=-\mu k$$

или

$$\frac{d\mu}{dt}=\mu\left(p-k\right). \qquad (2)$$

Подставляя (1) в условие $\frac{dx}{dt}=kx-y$, получим:

$$\frac{dx}{dt}=kx-\left(\frac{\alpha}{\mu\left(t\right)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Таким образом, получили систему дифференциальных уравнений с неизвестными $x\left(t\right)$ и $\mu\left(t\right)$:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=kx-\left(\dfrac{\alpha}{\mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},\\ \dfrac{d\mu}{dt}=\mu\left(p-k\right).\end{cases} \qquad (3)$$

Проинтегрируем второе уравнение, откуда найдем:

$$\mu\left(t\right)=C_1e^{\left(p-k\right)t},\quad C_1\in R. \qquad (4)$$

Подставляя это решение в первое уравнение системы (3), получим:

$$\frac{dx}{dt}=kx-\left(\frac{\alpha}{C_1e^{\left(p-k\right)t}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

или

$$\frac{dx}{dt}-kx=-\left(\frac{\alpha}{C_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}e^{\frac{-\left(p-k\right)t}{1-\alpha}}.$$

Интегрируя это уравнение, найдем его общее решение:

$$x(t)=C_2e^{kt}+\left(\frac{\alpha}{C_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\cdot\frac{1-\alpha}{p-k\alpha}\cdot e^{-\frac{(p-k)t}{1-\alpha}},\ p\neq k\alpha. \qquad (5)$$

Постоянные C_1 и C_2 определим из граничных условий:

$$x\left(0\right)=x_0,$$

$$x\left(T\right)=x_1.$$

Подставляя условие $x\left(0\right)=x_0$ в решение (5), получим:

$$x_0=C_2+\left(\frac{\alpha}{C_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\cdot\frac{1-\alpha}{p-k\alpha},$$

откуда найдем C_2:

$$C_2=x_0-\left(\frac{\alpha}{C_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\cdot\frac{1-\alpha}{p-k\alpha}.$$

Теперь воспользуемся вторым граничным условием $x\left(T\right)=x_1$:

$$x_1 = C_2 e^{kT} + \left(\frac{\alpha}{C_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \frac{1-\alpha}{p-k\alpha} \cdot e^{-\frac{(p-k)T}{1-\alpha}},$$

$$x_1 = x_0 e^{kT} - \left(\frac{\alpha}{C_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \frac{1-\alpha}{p-k\alpha} \cdot e^{kT} + \left(\frac{\alpha}{C_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \frac{1-\alpha}{p-k\alpha} \cdot e^{-\frac{(p-k)T}{1-\alpha}}.$$

Найдем из последнего равенства постоянную C_1.

$$\left(\frac{\alpha}{C_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \frac{1-\alpha}{p-k\alpha}\left(e^{kT} - e^{-\frac{(p-k)T}{1-\alpha}}\right) = x_0 e^{kT} - x_1,$$

$$\left(\frac{\alpha}{C_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{x_0 e^{kT} - x_1}{e^{kT} - e^{-\frac{(p-k)T}{1-\alpha}}} \cdot \frac{p-k\alpha}{1-\alpha}.$$

Обозначая через

$$B = \frac{x_0 e^{kT} - x_1}{e^{kT} - e^{-\frac{(p-k)T}{1-\alpha}}} \cdot \frac{p-k\alpha}{1-\alpha},$$

получим, что

$$C_1 = \alpha B^{\alpha-1}.$$

Тогда

$$C_2 = x_0 - B\frac{1-\alpha}{p-k\alpha}.$$

Найденные постоянные C_1 и C_2 подставим в решения (4) и (5). Из равенства (5) определим количество денег в банке в момент времени t:

$$x(t) = x_0 e^{kt} - \frac{x_0 e^{kT} - x_1}{e^{kT} - e^{-\frac{(p-k)T}{1-\alpha}}} \cdot \left(e^{kt} - e^{-\frac{(p-k)T}{1-\alpha}}\right).$$

Из равенства (4) получим:

$$\mu(t) = \alpha B^{\alpha-1} e^{(p-k)t},$$

Откуда найдем оптимальную траекторию управления $y(t)$:

$$y(t) = \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

то есть

$$y(t) = \frac{x_0 e^{kT} - x_1}{e^{kT} - e^{-\frac{(p-k)T}{1-\alpha}}} \cdot \frac{p-k\alpha}{1-\alpha} \cdot e^{-\frac{(p-k)t}{1-\alpha}}.$$

Если сумма денег в момент времени T должна быть равна первоначальной сумме денег, то есть $x(T) = x_0$, то получим, что оптимальной траекторией будет функция $y(t) = px_0$. В этом случае будут использоваться только процентные деньги, что возможно лишь только тогда, когда индивидуальный коэффициент предпочтения равен коэффициенту дохода $p = k$.

Рассмотрим случай, когда временной промежуток будет бесконечным и введем граничное условие

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0,$$

то есть с течением времени счет в банке сокращается до нуля. Получим следующую задачу: найти максимум функционала:

$$u = \int_0^\infty e^{-pt} y^\alpha(t)dt$$

при условиях

$$\frac{dx}{dt} = kx - y,$$

$$x(0) = x_0,\ \ x_0 > 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Постоянные C_1 и C_2 найдем, подставляя граничные условия в решение:

$$x(t) = C_2 e^{kt} + \left(\frac{\alpha}{C_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \frac{1-\alpha}{p-k\alpha} \cdot e^{-\frac{(p-k)t}{1-\alpha}}.$$

Используя первое условие, получим, как и ранее:

$$x(t) = x_0 e^{kt} - \left(\frac{\alpha}{C_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \frac{1-\alpha}{p-k\alpha} \cdot e^{kt} + \left(\frac{\alpha}{C_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \frac{1-\alpha}{p-k\alpha} \cdot e^{-\frac{(p-k)t}{1-\alpha}}.$$

Теперь воспользуемся вторым граничным условием $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Если $p - k > 0$ (то есть персональный коэффициент предпочтения клиента превосходит коэффициент дохода), то $e^{-\frac{(p-k)t}{1-\alpha}} \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда для выполнения второго граничного условия нужно, чтобы константа C_1 была равна:

$$C_1 = \alpha\left(\frac{1-\alpha}{x_0(p-k\alpha)}\right)^{1-\alpha}, \quad p \neq k\alpha.$$

Итак, с учетом граничных условий, получаем решение, которое определяет количество денег в банке в момент t:

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{(p-k)t}{1-\alpha}},$$

откуда

$$\mu(t) = C_1 e^{(p-k)t} = \alpha \left(\frac{1-\alpha}{x_0 (p - k\alpha)} \right)^{1-\alpha} \cdot e^{(p-k)t}.$$

Оптимальная траектория управления $y(t)$ теперь получается из формулы (1):

$$y(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha \left(\frac{1-\alpha}{x_0 (p - k\alpha)} \right)^{1-\alpha} \cdot e^{(p-k)t}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

или

$$y(t) = \frac{x_0 (p - k\alpha)}{1-\alpha} e^{-\frac{(p-k)t}{1-\alpha}}. \qquad (6)$$

То есть, если персональный коэффициент предпочтения клиента превосходит коэффициент его дохода ($p > k$) и количество денег, которое используется для потребления в момент времени t определяется формулой (6), то с течением времени счет в банке сокращается до нуля.

В современных условиях развития рыночной экономики и усиления конкуренции эффективность деятельности производственной и непроизводственной сфер, банковской системы в большой степени зависит от того, насколько учтены интересы и потребности людей. На первый план выходит проблема изучения потребительского спроса, экономического поведения потребителей. Покупатели стремятся распределить свои средства на приобретение различных благ таким образом, чтобы максимизировать ожидаемую полезность от потребления этих благ.

Целью развития экономики становится максимально возможное удовлетворение возрастающих потребностей людей. Большое количество вариантов решения такой задачи создает взаимозаменяемость потребностей, ресурсов, технологий. Это определяет проблему выбора лучшего варианта, который удовлетворяет поставленным целям, что, в свою очередь, приводит к задачам оптимального управления экономическими системами. И здесь в помощь экономистам приходят экономико-математические методы исследования, позволяющие оптимизировать деятельность предприятия, потребителя и экономики в целом.

Литература

1. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Изд-во ин. лит., 1960. – 400 с.
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления / В.Г. Болтянский. – М.: Наука, 1969. – 408 с.
3. Джевонс У.С. Краткое сообщение об общей математической теории политической экономии / У.С. Джевонс // Вехи экономической мысли. Теория потребительского поведения и спроса. Т. 1. / Под ред. В.М. Гальперина. – СПб.: Экономическая школа, 2000. – С. 70-77.
4. Дубовицкий А.Я. Методы теории экстремальных задач в экономике / А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин, В.Л. Левин. – М.: Наука, 1981. – 193 с.
5. Иноземцев В.Л. Постэкономическая революция: теоретическая конструкция или историческая реальность? / В.Л. Иноземцев // Вестник Российской академии наук. – 1997. – Том 67. – № 8.
6. Калман Р.Е. Об общей теории систем управления / Р.Е. Калман // Труды I конгресса ИФАК / Изв. АН СССР. – М., 1961. – Т. 2. – С. 521-546.
7. Канторович Л.В. Математическое оптимальное программирование в экономике / Л.В. Канторович, А.Б. Горстко. – М.: Знание, 1968. – 96 с.
8. Кейнс Дж.М. Общая теория занятости процентов и денег / Дж.М. Кейнс // Антология экономической классики. Т.2. – М.: Эксмо, 2007. – 960 с.
9. Кронрод Я.А. Производительные силы и общественная собственность / Я.А. Кронрод. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
10. Маршалл А. Принципы экономической науки / А. Маршалл: в 3 т. – М.: Прогресс, 1993. – 994 с.
11. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход / Э. Полак. – М.: Мир, 1974. – 374 с.
12. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении / Л.С. Понтрягин. – М.: Наука, 1989. – 61 с.
13. Слуцкий Е.Е. К теории сбалансированности бюджета потребителя / Е.Е. Слуцкий // Народнохозяйственные модели: Теоретические вопросы потребления. – М., 1963. – С. 241-277.
14. Цвылев Р.И. Метаморфозы индустриальной экономики: проблемы экономических измерений / Р.И. Цвылев // Мировая экономика и международные отношения. – 2001. – №2.

References

1. Bellman R. Dinamicheskoe programmirovanie / R. Bellman. – M.: Izd-vo in. lit., 1960. – 400 p.
2. Boltjanskij V.G. Matematicheskie metody optimal'nogo upravlenija / V.G. Boltjanskij. – M.: Nauka, 1969. – 408 p.
3. Dzhevons U.S. Kratkoe soobshhenie ob obshhej matematicheskoj teorii politicheskoj jekonomii / U.S. Dzhevons // Vehi jekonomicheskoj mysli. Teorija potrebitel'skogo povedenija i sprosa. T. 1. / Pod red. V.M. Gal'perina. – SPb.: Jekonomicheskaja shkola, 2000. – P. 70-77.
4. Dubovickij A.Ja. Metody teorii jekstremal'nyh zadach v jekonomike / A.Ja. Dubovickij, A.A. Miljutin, V.L. Levin. – M.: Nauka, 1981. – 193 p.
5. Inozemcev V.L. Postjekonomicheskaja revoljucija: teoreticheskaja konstrukcija ili istoricheskaja real'nost'? / V.L. Inozemcev // Vestnik Rossijskoj akademii nauk. – 1997. – Tom 67, № 8.
6. Kalman R.E. Ob obshhej teorii sistem upravlenija / R.E. Kalman // Trudy I kongressa IFAK / Izv. AN SSSR. – M., 1961. – T. 2. – P. 521-546.
7. Kantorovich L.V. Matematicheskoe optimal'noe programmirovanie v jekonomike / L.V. Kantorovich, A.B. Gorstko. – M.: Znanie, 1968. – 96 p.
8. Kejns Dzh.M. Obshhaja teorija zanjatosti procentov i deneg / Dzh.M. Kejns // Antologija jekonomicheskoj klassiki. T.2. – M.: Jeksmo, 2007. – 960 p.
9. Kronrod Ja.A. Proizvoditel'nye sily i obshhestvennaja sobstvennost' / Ja.A. Kronrod. – M.: Nauka, 1987. – 352 p.
10. Marshall A. Principy jekonomicheskoj nauki / A. Marshall: v 3 t. – M.: Progress, 1993. – 994 p.
11. Polak Je. Chislennye metody optimizacii. Edinyj podhod / Je. Polak. – M.: Mir, 1974. – 374 p.
12. Pontrjagin L.S. Princip maksimuma v optimal'nom upravlenii / L.S. Pontrjagin. – M.: Nauka, 1989. – 61 p.
13. Sluckij E.E. K teorii sbalansirovannosti bjudzheta potrebitelja / E.E. Sluckij // Narodnohozjajstvennye modeli: Teoreticheskie voprosy potreblenija. – M., 1963. – P. 241-277.
14. Cvylev R.I. Metamorfozy industrial'noj jekonomiki: problemy jekonomicheskih izmerenij / R.I. Cvylev // Mirovaja jekonomika i mezhdunarodnye otnoshenija. – 2001. – №2.

Статья поступила в редакцию 18.03.2014

О.А. КЛЕПІКОВА, к.е.н., доцент
Одеський національний політехнічний університет,
м. Одеса, Україна
klepoa@ukr.net

СУЧАСНІ ТЕХНОЛОГІЇ МОДЕЛЮВАННЯ БІЗНЕС-ПРОЦЕСІВ ПІДПРИЄМСТВА

Розглянуто основні стандарти і сучасні інструменти моделювання бізнес-процесів. Проведено порівняльну характеристику BPM-систем, вказано їх можливості, переваги та недоліки.

***Ключові слова**: бізнес-процес, ІТ-технології, корпоративні інформаційні системи (КІС), BPM-системи*

О.А. Клепикова

Современные технологи моделирования бизнес-процессов предприятия

Рассмотрены основные стандарты и современные инструменты моделирования бизнес-процессов. Проведена сравнительная характеристика BPM-систем, указаны их возможности, преимущества и недостатки.

***Ключевые слова**: бизнес-процесс, ИТ-технологии, корпоративные информационные системы (КИС), BPM-системы*

O.A. Klepikova

Modern technology of simulation business processes in enterprise

The article considers the basic standards and modern tools of business process modeling. Have compared characteristic of BPM-systems their capabilities, advantages and disadvantages.

***Keywords**: business process, IT technology, enterprise information systems (EIS), BPM-system*

В умовах ринку і високої конкуренції особливо актуальними стають питання підви-