

О.С. ДОНЕЦЬ, к.е.н., доцент

Т.М. ДОНЕЦЬ,

А.І. ШАБЛЯ

ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»,

м. Донецьк, Україна

artintell@rambler.ru

## ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РИЗИКУ БАНКРУТСТВА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

Розглянуто дві різних моделі оцінки фінансового ризику страхової компанії. Імовірнісна модель, яка залежить від характеристики розподілу вхідних даних. Зроблено акцент, що у разі випадку невідповідності даних гіпотезі щодо їх розподілу, оцінку ризику банкрутства треба розраховувати шляхом складних математичних перетворень. Зазначено, що модель бінарного вибору, яка ґрунтується на методі максимальної правдоподібності, дає достатні та ефективні оцінки параметрів. На відміну від класичної моделі, вона більш точно визначила ризик банкрутства. Запропоновані підходи можуть бути використані для оцінки фінансового ризику страхової компанії про що свідчать отримані результати розрахунків за реальними статистичними даними.

**Ключові слова:** ризик банкрутства, імовірнісна модель, модель бінарного вибору, страхова компанія

А.С. Донец, Т.Н. Донец, А.И. Шабля

### Экономико-математическое моделирование риска банкротства страховой компании

Рассмотрены две различных модели оценки финансового риска страховой компании. Вероятностная модель, которая зависит от характеристики распределения входных данных. Сделан акцент на том, что в случае несоответствия данных гипотезе относительно их распределения, оценку риска банкротства следует находить путем сложных математических преобразований. Отмечено, что модель бинарного выбора, основанная на методе максимального правдоподобия, дает достаточные и эффективные оценки параметров. В отличие от классической модели, она более точно определяет риск банкротства. Предложенные подходы могут быть использованы для оценки финансового риска страховой компании о чем свидетельствуют полученные результаты расчетов по реальным статистическим данным.

**Ключевые слова:** риск банкротства, вероятностная модель, модель бинарного выбора, страховая компания

O.S. Donets, T.M. Donets, A.I. Shablya

### Economic-mathematical modeling of the risk of bankruptcy of the insurance company

The article describes two different models for assessing the financial risk of the insurance company. Probabilistic model, which depends on the characteristics of the distribution of input data. Emphasis on the fact that in the case of data inconsistency hypothesis concerning their distribution, risk assessment should be sought bankruptcy by complex mathematical transformations. Noted that the binary choice model, based on the maximum likelihood method, gives sufficient and effective parameter estimation. In contrast to the classical model, it is more accurately determine the risk of bankruptcy. The proposed approaches can be used to assess the financial risk of the insurance company as evidenced by the results of calculations on real statistics.

**Keywords:** risk of bankruptcy, probability model, a model of binary choices, the insurance company

Стан невизначеності можливий у кожній суспільно-економічній ситуації, якщо наперед не можна виявити причинно-наслідковий зв'язок між основними елементами процесу господарської діяльності. Під банкрутством слід розуміти засвідчену судом абсолютну неплатоспроможність суб'єкту господарювання, тобто це неспроможність боржника, викликана відсутністю або нестачею коштів, якими би він мав змогу розпоряджатися під час настання строку платежу, за умови відсутності можливості отримати необхідні кошти [1].

Діагностика банкрутства являє собою систему цільового фінансового аналізу, спрямованого на виявлення параметрів кризового розвитку підприємства, що генерують загрозу його банкрутства в майбутньому періоді. У статті розглянуто три підходи до оцінки ризику банкрутства.

Питанням економіко-математичного моделювання ризику банкрутства присвячено

© О.С. Донець, Т.М. Донець, А.І. Шабля, 2014

праці багатьох авторів. М.М. Леоненко, Я.Р. Магнус, Ю.С. Мішура, П.К. Катышев і А.А. Пересецкий пропонують використовувати теоретико-імовірнісні та статистичні методи у фінансових розрахунках [2; 3]. О.В. Кузьменко визначає сутність актуарних розрахунків [1]. В.В. Шпарко обґрунтовує механізм побудови оцінок ймовірності банкрутства страхових компаній у класичній моделі ризику [5]. Водночас питанням обґрунтування вибору конкретної моделі оцінки фінансового ризику страхової компанії присвячено мало уваги у науковій літературі.

*Мета статті* – розгляд двох різних моделей оцінки фінансового ризику страхової компанії: імовірнісну модель, яка залежна від характеристики розподілу вхідних даних та модель бінарного вибору, яка ґрунтується на методі максимальної правдоподібності.

Існує дуже велика кількість різноманітних методів прогнозування банкрутства. Модель індивідуального ризику це найпростіша з моделей функціонування страхової компанії, за допомогою якої можна обчислити ймовірність банкрутства компанії. На основі цієї моделі була створена класична модель розрахунку ймовірності банкрутства. В цій моделі припускається, що розміри виплат, які здійснює страхова компанія, утворюють послідовність незалежних випадкових величин, однаково розподілених з функцією розподілу  $F(x)$ . Будемо припускати, що величини  $Y_k$  додатні, існують середнє  $EY_k = \mu$  та дисперсія  $DY_k = \sigma^2$ . Нехай страхові внески надходять до компанії з деякою постійною інтенсивністю  $c$ , тоді за час  $t$  компанія отримує в середньому  $ct$  грошових одиниць внесків [2].

Відносна страхова надбавка  $\rho$  визначається як відношення середнього обсягу прибутку  $EQ$  компанії до середнього сумарного обсягу страхових виплат  $ES$  (1):

$$\rho = \frac{EQ}{ES} \quad (1)$$

Нехай в деякий нульовий момент часу страхова компанія має стартовий капітал  $u$ . Процесом ризику будемо називати випадковий процес  $U_t$ , що показує поточну величину сумарного капіталу страхової компанії в момент часу (2).

$$U_t = u + ct - S_t \quad (2)$$

Будемо вважати, що відбулося банкрутство страхової компанії, якщо в деякий момент

часу  $t$  величина капіталу компанії  $U_t = u + ct - S_t$  стала від'ємною, тобто надійшов такий позов, який перевищує весь наявний капітал компанії на цей момент. Значимо, що на практиці компанія позичити певну суму грошей і сплатити позов. Позначимо ймовірність банкрутства через  $\psi(u)$ . Очевидно, що  $\psi(u) = P\{U_t < 0 \text{ при деякому } t > 0\}$ . Якщо виплати страхової компанії є випадковими величинами, які мають експоненціальний розподіл з математичним сподіванням  $\mu$ , то ймовірність банкрутства може бути визначена за формулою (3):

$$\psi(u) = \begin{cases} \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho u}{(1+\rho)\mu}} & \text{якщо } c > ES_t \\ 1 & \text{якщо } c < ES_t \end{cases} \quad (3)$$

У випадку, коли виплати страхової компанії мають інший імовірнісний розподіл, вказати точну формулу для ймовірності банкрутства  $\psi(u)$  практично неможливо. Тому постає проблема відшукати наближені оцінки для  $\psi(u)$ , які могли б використовуватись на практиці. Цій проблемі присвячені публікації Де Вільдера, Гуверца, Дюфресне, Гербера, Гранделла та інших вчених [5].

Модель бінарного вибору – це модель залежності бінарної змінної, яка приймає значення 0 або 1, від сукупності факторів. Використання звичайної лінійної регресії для таких моделей некоректно, тому що умовне математичне очікування таких змінних дорівнює ймовірності того, що залежна змінна приймає значення 1, а лінійна регресія передбачає від'ємні значення або більше 1. Для того випростовуються інтегральні функції розподілу. Отже, вектор статистичних даних  $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$  містить тільки бінарні ознаки [3]. Для того, щоб дослідити залежності  $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$  від рядка пояснювальних змінних  $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$  можна використати модель виду (4):

$$P(y_i=1) = X_i \beta \quad (4)$$

де  $i$  – номер спостереження;

$\beta=(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$  – множина невідомих параметрів.

Ця модель зветься моделлю лінійної ймовірності. Для моделювання значень  $P(y_i=1)$  треба обрати функції, область значень яких задана відрізком  $[0;1]$ , а  $X_i \beta$  є аргументом цієї функції. Вибір функції  $F$  відображає тип бінарної моделі. Найчастіше використовується фу-

нкція стандартного нормального розподілу, і відповідно модель зветься пробіт-моделлю [3]. Якщо використана функція логістичного розподілу, то модель має назву логіт-моделлю (5).

$$P(y_i = 1) = \frac{e^{x_i\beta}}{1 + e^{x_i\beta}} \quad (5)$$

Треба мати на увазі, що моделі бінарного вибору – це моделі нелінійні за параметрами  $\beta$ , тому їх інтерпретація відрізняється від звичай-

ної інтерпретації коефіцієнтів лінійних регресійних моделей. Коефіцієнти бінарної моделі не можуть бути інтерпретовані як граничний ефект впливу пояснювальних змінних на залежну змінну [3].

Використовуючи наведені методи зробимо оцінку ризику банкрутства. Для цього протестуємо моделі на п'яти страхових компаніях, дві з яких зазнали банкрутство [4]. Спочатку оцінімо ризик банкрутства за допомогою класичної моделі ризику, табл. 1.

Таблиця 1

## Надходження та виплати страхових компаній

УОСК		Київський страховий дім		Райп		Універсальна		Лафорт	
надходження	виплати	надходження	виплати	надходження	виплати	надходження	виплати	надходження	виплати
28946,4	30640,5	43827	44987,9	22067	26548,8	88683	75487,9	20355	24494,9
23973,2	26028,6	39237	38216,5	21996	22552,8	88272	51164,2	20600	20808
19027,1	14107,1	24661	20712,8	12057	12223,3	88772	69510,7	10550	11277,6
19049,5	11789,7	24476	17310,2	11874	10215,3	89046	58091,8	11495	9425,04
18834,4	9495,3	24859	13941,5	12176	8227,3	88410	98212,0	10690	15934,3
18959,1	10708,4	25018	15722,6	19812	9278,4	88984	52763,8	10215	8560,60
18941,0	8469,6	24370	12435,6	12449	7338,6	88487	48181,8	10086	7817,21
19071,7	23330,8	31771	34255,5	21525	20215,3	118030	114958,9	10178	18651,3
22056,3	21416,7	35100	31445,2	11953	18556,8	1008662	10557,63	10817	17121,2
18937,5	531287	24205	7800,62	12113	4603,4	88845	26178,2	10054	4247,26
Не банкрут		Не банкрут		Банкрут		Не банкрут		Банкрут	

Також треба спочатку перевірити гіпотезу щодо експоненціального закону розподілу страхових виплат. Перевіримо цю гіпотезу за

допомогою тесту Колмогорова-Смірнова, використовуючи програмний пакет Statistica, рис. 1.

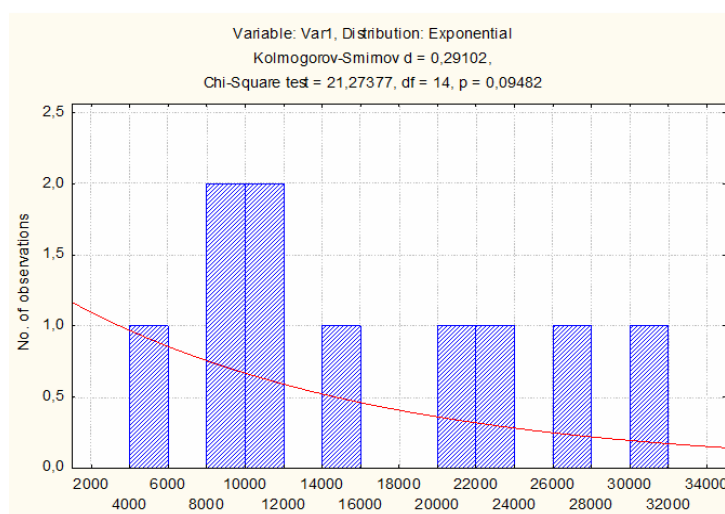


Рис. 1. Гістограма розподілу страхових виплат УОСК

В якості міри розходження між теоретичним та емпіричним розподілом в критерію Колмогорова-Смірнова використовується максимальне значення абсолютної величини різниці поміж емпіричної функції розподілу та теоретичною функцією. Для страхової компанії УОСК значення критерію згоди  $D$  Колмогорова-Смірнова дорівнює 0,29. Наступним кроком слід знайти параметр  $\lambda$  за формулою:

$$\lambda = D \sqrt{n} = 0,29 \sqrt{10} = 0,917$$

Критичне значення параметру  $\lambda$  на рівні значимості 0,05 дорівнює  $\lambda_{0,05}=1,36$ . Таким чином емпіричне значення  $\lambda < \lambda_{0,05}$  тому гіпотеза щодо експоненціального розподілу не суперечить фактичним даним. Перевіримо останні 4 страхові компанії:

Таблиця 2

## Перевірка гіпотези на експоненціальний розподіл

Страхова компанія	УОСК	Київський страховий дім	Райп	Універсальна	Лафорт
$D$	0,29	0,24	0,28	0,27	0,25
$\lambda$	0,917	0,75	0,88	0,85	0,79

Таким чином, виплати страхових компаній можна віднести до випадкової величини, котра розподілена за експоненціальним зако-

ном. Наступним кроком оцінімо ризик банкрутства за формулою (3), табл. 3.

Таблиця 3

## Оцінка ризику банкрутства класичною моделлю ризику

Страхова компанія	УОСК		Київський страховий дім		Райп		Універсальна		Лафорт	
	$c$	$\mu$	$c$	$\mu$	$c$	$\mu_t$	$c$	$\mu$	$c$	$\mu$
Параметри	20779,6	16130,0	29752,42	23682,86	15802,21	13976,02	183618,99	70007,74	12504,13	13833,76
$\rho$	0,288		0,26		0,13		1,62		-0,10	
$u$	21985		27500		12091		88833		10536	
$\Psi(u)$	0,57		0,63		0,80		0,17		1,00	

Таким чином, модель дала приблизно точні результати. В признанні для страхової компанії Лафорт точність складає 100%. Для СК Райп імовірність банкрутства дуже висока, що не суперечить дійсності. СК Універсальна має низьку імовірність банкрутства, що також відповідає дійсності. Отже, класична модель ризику коректна у трьох з п'яти випадків.

Оцінімо ризик банкрутства за допомогою методів економетричного аналізу. В якості даних була використана вибірка з 30 досліджень, яку можна знайти на сайті рейтингу страхових компаній [4]. Для економетричної моделі введемо наступні змінні:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{якщо компанія банкрут} \\ 0, & \text{банкрутство не загрожує} \end{cases}$$

де  $X_1$  – рівень виплат за ОСЦПВ;

$X_2$  – сукупні страхові премії;

$X_3$  – гарантійний фонд.

В якості функції апроксимації обираємо логіт-регресію. Використовуючи програмний пакет EViews, зробимо оцінку параметрів та отримаємо результати, табл. 4.

Судячи з отриманих оцінок ризик банкрутства збільшується, коли збільшується рівень виплат за ОСЦПВ. Фактори сукупних страхових премій та гарантійний фонд знижують ризик. Графічне зображення поведінки залишків наведено на рис. 2.

## Логіт-модель з трьома змінними

Dependent Variable: Y  
 Method: ML - Binary Logit (Quadratic hill climbing)  
 Date: 10/18/13 Time: 19:09  
 Sample: 1 30  
 Included observations: 30  
 Convergence achieved after 8 iterations  
 Covariance matrix computed using second derivatives

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
X1	0.051248	0.028481	1.799361	0.0720
X2	-0.000139	6.21E-05	-2.234087	0.0255
X3	-0.000168	9.95E-05	-1.687670	0.0915
C	5.845257	2.952141	1.980006	0.0477

McFadden R-squared	0.729314	Mean dependent var	0.400000
S.D. dependent var	0.498273	S.E. of regression	0.261713
Akaike info criterion	0.631016	Sum squared resid	1.780833
Schwarz criterion	0.817843	Log likelihood	-5.465244
Hannan-Quinn criter.	0.690784	Deviance	10.93049
Restr. deviance	40.38070	Restr. log likelihood	-20.19035
LR statistic	29.45021	Avg. log likelihood	-0.182175
Prob(LR statistic)	0.000002		

Obs with Dep=0	18	Total obs	30
Obs with Dep=1	12		

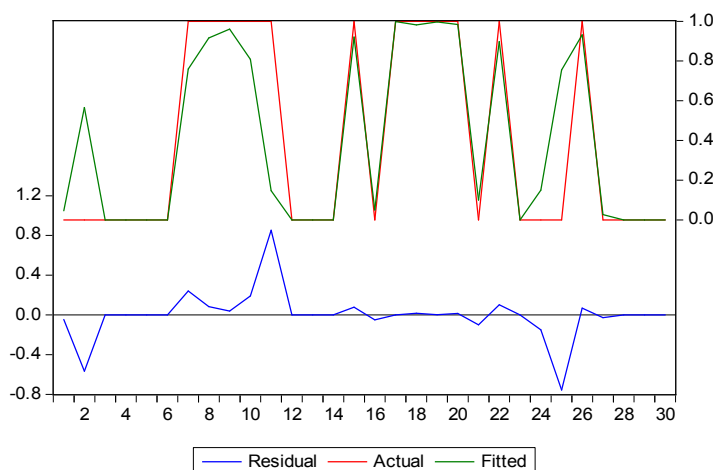


Рис. 2. Графік залишків

Судячи за траєкторією графіку залишків вони не мають залежності та розподілені випадково. Порівнюючи графіки фактичних у та результатів моделювання, можна зробити висновок що модель дає досить точні результати. Для того, щоб встановити відсоток коректно вказаних значень використаємо класифікацій-

ну таблицю (табл. 5).

Таким чином, було коректно вказано 88,89% випадків коли страхова компанія не стала банкрутом, та 91,67% коли банкрутство сталося. Зробимо прогноз для останніх п'яти значень. Граничне значення індексної функції дорівнює 0,5, рис. 3.

Таблиця 5

## Класифікаційна таблиця

Expectation-Prediction Evaluation for Binary Specification

Equation: UNTITLED

Date: 10/21/13 Time: 21:12

Success cutoff: C = 0.5

	Estimated Equation			Constant Probability		
	Dep=0	Dep=1	Total	Dep=0	Dep=1	Total
P(Dep=1)≤C	16	1	17	18	12	30
P(Dep=1)>C	2	11	13	0	0	0
Total	18	12	30	18	12	30
Correct	16	11	27	18	0	18
% Correct	88.89	91.67	90.00	100.00	0.00	60.00
% Incorrect	11.11	8.33	10.00	0.00	100.00	40.00
Total Gain*	-11.11	91.67	30.00			
Percent Gain**	NA	91.67	75.00			

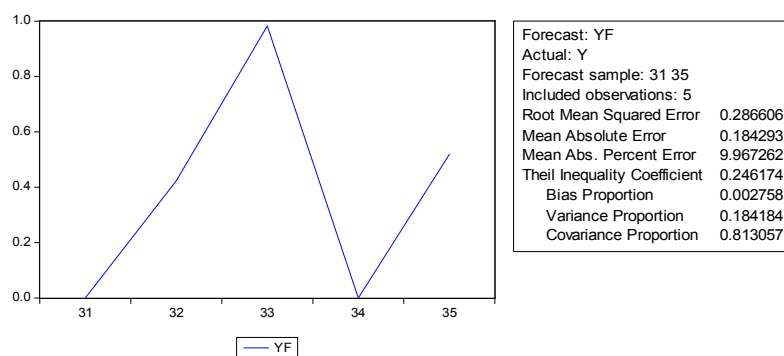


Рис. 3. Тестування за логіт-моделлю

Результати тестування дуже близькі до фактичних даних. Модель стовідсотково передбачила ризик банкрутства страхової компанії «Райп». Для компаній «УОСК» та «Універсальна» ризик банкрутства дорівнює 0. Це також повністю співпадає з фактичними даними. Таким чином, економетрична модель логіт-регресії дає точні прогнози та може бути використана для оцінки ризику банкрутства.

Було запропоновано два різних методи оцінки ризику банкрутства. Імовірнісна модель залежна від характеристики розподілу вхідних даних. Якщо виникає випадок невідповідності даних гіпотезі щодо розподілу, то оцінку ризику банкрутства треба змінити шляхом складних математичних перетворень.

Модель бінарного вибору, яка ґрунтується на методі максимальної правдоподібності, дає достатні та ефективні оцінки параметрів.

На відміну від класичної моделі, вона більш точно визначила ризик банкрутства. Отже, запропоновані підходи можуть бути використані для оцінки фінансового ризику страхової компанії.

У статті розглянуто дві різних моделі оцінки фінансового ризику страхової компанії. Імовірнісна модель, яка залежить від характеристики розподілу вхідних даних. Зроблено акцент, що у разі випадку невідповідності даних гіпотезі щодо їх розподілу, оцінку ризику банкрутства треба розраховувати шляхом складних математичних перетворень. Зазначено, що модель бінарного вибору, яка ґрунтується на методі максимальної правдоподібності, дає достатні та ефективні оцінки параметрів. На відміну від класичної моделі, вона більш точно визначила ризик банкрутства. Запропоновані підходи можуть бути використані

для оцінки фінансового ризику страхової компанії про що свідчать отримані результати розрахунків за реальними статистичними даними.

#### Література

1. Козьменко О.В. Актуарні розрахунки / О.В. Кузьменко. – Суми: Ділові перспективи, 2011. – 224 с.
2. Леоненко М.М. Теоретико-імовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці / М.М. Леоненко, Ю.С. Мішура. – К.: Інформтехніка, 1995. – 380 с.
3. Магнус Я.Р. Эконометрика / Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий. – М.: Дело, 2007. – 504 с.
4. Рейтинги страхових компаній України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://forinsurer.com>.
5. Шпирко В.В. Побудова оцінок ймовірності банкрутства страхових компаній у класичній моделі ризику / В.В. Шпирко // Банківська справа. – 2001. – № 5. – С. 57-61.

#### Referens

1. Koz'menko O.V. Aktuarni rozrahunky / O.V. Kuz'menko. – Sumy: Dilovi perspektyvy, 2011. – 224 p.
2. Leonenko M.M. Teoretyko-imovirnisni ta statystychni metody v ekonometryci ta finansovij matematyци / M.M. Leonenko, Ju.S. Mishura. – K.: Informtehnika, 1995. – 380 p.
3. Magnus Ja.R. Ekonometryka. Nachal'nij kurs / Ja.R. Magnus, P.K. Katishev, A.A. Pere-seckyj. – M.: Delo, 2007. – 504 p.
4. Rejtyngy strahovyh kompanij Ukrainy [Elektronnyj resurs]. – Rezhym dostupu: <http://forinsurer.com>.
5. Shpyrko V.V. Pobudova ocinok jmovirnosti bankrutstva strahovyh kompanij u klasychnij modeli ryzyku / V.V. Shpyrko // Bankivs'ka sprava. – 2001. – № 5. – P. 57-61.

Статья поступила в редакцию 27.03.2014