МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Н.В. РУМЯНЦЕВ, д.э.н., профессор
ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк, Украина
rumnik49@mail.ru

ГИБКАЯ ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ СИСТЕМА С КОМБИНИРОВАННОЙ ПЕРЕНАЛАДКОЙ И ПОТЕРЕЙ ЗАКАЗОВ

В работе рассмотрена обобщенная модель гибкой производственной системы ГПС с переналадкой прибора, которая начинается либо через некоторое случайное время после освобождения прибора от всех заказов, находящихся в системе, либо после поступления требования в свободную систему. Особенностью функционирования данной ГПС является то, что заказы, поступающие во время переналадки оборудования, теряются. Даже в том случае, когда переналадка прибора началась после поступления заказа, то этот заказ, поступивший в свободную систему, после ее начала, теряется. Функционирование ГПС представляется в виде системы массового обслуживания, на вход которой поступает пуассоновский поток заказов интенсивности $\lambda > 0$. Обработка заказов происходит в порядке их поступления, причем длительность выполнения операций имеет показательный закон распределения с параметром $\mu > 0$. Прибор может начать переналадку по следующему правилу: либо через случайное время η, имеющее показательный закон распределения, с параметром $\theta > 0$, при условии, что за это время в систему не поступил заказ, либо сразу же после поступления заказа, при условии, что за время η переналадка оборудования не наступила. Длительность переналадки считаем показательно распределенной случайной величиной с параметром $\nu > 0$. Таким образом, можно сказать, что переналадка начинается через время, равное $\min\{\eta, z_i\}$, где z_i – время между поступлениями требований пуассоновского потока. В работе найдены оптимальные характеристики функционирования данной ГПС.

Ключевые слова: *гибкая производственная система, теория массового обслуживания, пуассоновский поток, переналадка, потеря заказов*

N.V. Rumyantsev

Flexible manufacturing system with combined readjustment and loss of orders

In this paper we consider a generalized model of a flexible manufacturing system with GPS changeover device which starts or after a random time after release of the device from all orders that are in the system, or after receipt of the request to a free system. Functioning of the GPS feature is that orders received during changeovers lost. Even in the case when the changeover unit began after the receipt of the order, this order, given a free system, after its inception, is lost. Operation of GPS is represented as a queuing system, the input of which is a Poisson order flow intensity. Order processing takes place in the order of their arrival $\lambda > 0$, the duration of operations has exponential distribution law with parameter $\mu > 0$. The device can begin retooling by the following rule: either through a random time η having exponential law distribution with parameter $\theta > 0$, provided that during this time the system did not order, or immediately after receipt of the order, provided that during η the changeover of equipment not occurred. Duration changeover consider exponentially distributed random variable with parameter $\nu > 0$. Thus, we can say that the changeover begins in a time equal $\min\{\eta, z_i\}$ to where z_i – the time between the receipt of the request of a Poisson flow. We find the optimal characteristics of the functioning of the FMS.

Keywords: *flexible manufacturing system, queuing theory, poisson flow, readjustment, loss of orders*

Следует отметить тот факт, что в настоящее время работа большинства предприятий организована по принципу гибких производственных систем и поэтому современная теория управления такими предприятиями уделяет большое внимание как вопросам организации функционирования производственного оборудования, так и вопросам количественной оценки предлагаемых вариантов. Гибкие производственные системы (ГПС) – наиболее эффективное средство автоматизации серийного производства, позволяющее переходить с одного вида продукции на другой, проводя переналадку одного и того же оборудования. Оказалось, что для количественной оценки гибких производственных систем очень удачным является применение моделей систем массового обслуживания с переналадкой, причем переналадка может происходить различными способами в зависимости от условий функционирования той или иной гибкой производственной системы.

Вопросы моделирования гибких производственных систем классическими моделями массового обслуживания рассматривались в работе [4]. В работах автора рассматривались более общие модели систем массового обслуживания, позволяющие моделировать работу гибких производственных систем (ГПС) [1]. В последних работах автора рассматривались работы, в которых гибкие производственные системы моделировались системами массового обслуживания с переналадкой прибора в начале производственного цикла [2] или в конце его [3], и обладающие особенностью, состоящей в том, что заказы (клиенты), поступающие в систему во время переналадки прибора получали отказ. В данной работе автором рассматривается некоторая более общая модель ГПС.

Формулировка цели. Рассмотрим обобщение рассмотренных моделей, предполагая, что переналадка прибора начинается либо через некоторое случайное время после освобождения прибора от всех заказов, находящихся в системе, либо после поступления требования в свободную систему. Особенностью функционирования данной ГПС является то, что заказы, поступающие во время переналадки оборудования, теряются. Даже в том случае, когда переналадка началась после поступления заказа, то заказ, поступивший в свободную систему и вызвавший переналадку, сам же теряется.

Функционирование ГПС можно представить в виде системы массового обслуживания, на вход которой поступает пуассоновский поток заказов интенсивности $\lambda > 0$. Обработка заказов происходит в порядке их поступления, причем длительность выполнения операций имеет показательный закон распределения с параметром $\mu > 0$. ГПС обладает особенностью, заключающейся в том, что после окончания обработки всех заказов, находящихся в системе, он переходит в свободное состояние, которое будем называть состоянием свободен – неготов. Прибор может начать переналадку по следующему правилу: либо через случайное время η, имеющее показательный закон распределения, с параметром $\theta > 0$, при условии, что за это время в систему не поступил заказ, либо сразу же после поступления заказа, при условии, что за время η переналадка оборудования не наступила. Длительность переналадки считаем показательно распределенной случайной величиной с параметром $\nu > 0$. Таким образом, можно сказать, что переналадка начинается через время, равное $\min\{\eta, z_i\}$, где z_i – время между поступлениями требований пуассоновского потока.

После окончания переналадки прибор всегда переходит в свободное, готовое к работе, состояние. Поступающие в ГПС заказы обрабатываются в порядке поступления.

Описанная ГПС может находиться в следующих состояниях:

0 – прибор свободен – неготов;

$(0^*, 0)$ – прибор проводит переналадку когда в систему не поступали заказы;

$(0^*, 1)$ – прибор проводит переналадку после поступления заказа в ГПС;

$(1, 0)$ – прибор свободен и готов к обработке поступающих в дальнейшем заказов;

$(1, k)$ – прибор или ГПС обрабатывает поступившие заказы $(k \geq 1)$.

Пусть $\xi(t)$ – случайный процесс, характеризующий функционирование системы, который задан на множестве состояний $E = \{0, (0, 0^*), (0^*, 1), (1, k): k \geq 0\}$. Пусть $P_0 = \mathrm{P}\{\xi(t) = 0\}$, $P_{0^*0} = \mathrm{P}\{\xi(t) = 0^*\}$, $P_{0^*1} = \mathrm{P}\{\xi(t) = (0^*, 1)\}$, $P_{1k} = \mathrm{P}\{\xi(t) = (1, k)\}$, $k = 0$ – стационарные вероятности состояний системы. Граф состояний системы представлен на рис.1.

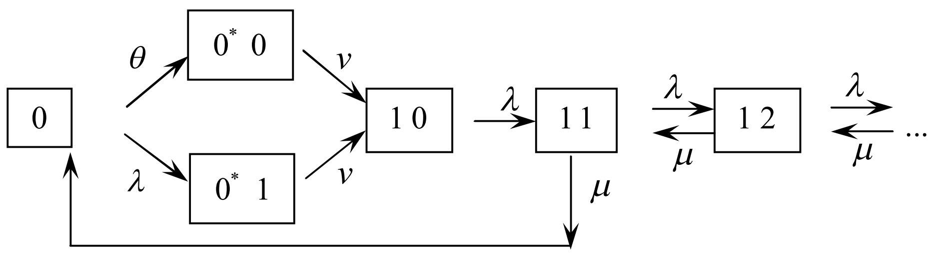

Рис. 1. Граф состояний ГПС с комбинированной переналадкой

Система уравнений для определения стационарных вероятностей состояний системы имеет вид:

$$\begin{cases} -(\lambda+\theta)P_0+\mu P_{11}=0 \\ -\nu P_{0^*0}+\theta P_0=0 \\ -\nu P_{0^*1}+\lambda P_0=0 \\ -\lambda P_{10}+\nu\left(P_{0^*0}+P_{0^*1}\right)=0 \\ -(\lambda+\mu)P_{11}+\lambda P_{10}+\mu P_{12}=0 \\ -(\lambda+\mu)P_{1k}+\lambda P_{1k-1}+\mu P_{1k+1}=0, \quad k\geq 2. \end{cases} \qquad (1)$$

Для решения системы (1) введем производящую функцию $a(z)=\sum_{k\geq1}P_{1k}z^k$. Тогда, умножая последние два уравнения на z в соответствующих степенях, находим, что

$$\left(\rho z^2-z(1+\rho)+1\right)a(z)=zP_{11}-\rho z^2P_{10}, \quad (2)$$

где $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$.

Решение первых трех уравнений дает следующий результат:

$$P_{0^*0}=\frac{\beta}{\delta}P_0, \quad (3)$$

$$P_{0^*1}=\frac{\rho}{\delta}P_0, \quad (4)$$

$$P_{10}=\frac{\rho+\beta}{\rho}P_0, \quad (5)$$

$$P_{11}=(\rho+\beta)P_0, \quad (6)$$

где $\delta=\dfrac{\nu}{\mu}$, $\beta=\dfrac{\theta}{\mu}$.

С учетом выражений (5) и (6), производящая функция (2) принимает вид:

$$a(z)=\frac{(\rho+\beta)zP_0}{1-\rho z}=(\rho+\beta)z\left[1+\rho z+(\rho z)^2+\ldots\right]P_0, \quad (7)$$

Из (7) получаем, что

$$P_{1k}=(\rho+\beta)\cdot\rho^{k-1}P_0, \quad k\geq1. \quad (8)$$

Замечание. Этот результат (8) можно получить, если заметить, что, начиная с состояния (1,1) граф рассматриваемой системы представляет собой процесс гибели и размножения, поэтому можно воспользоваться формулами для нахождения стационарных вероятностей данного процесса, а именно:

$$P_{12}=\rho P_{11}, \; P_{13}=\rho P_{12}=\rho^2P_{11},\ldots$$
$$P_{1k}=\rho^{k-1}P_{11}.$$

Вероятность P_0 можно определить из условия нормировки

$$P_0+P_{0^*0}+P_{0^*1}+P_{10}+a(1)=1.$$

Так как:

$$a(1)=\frac{(\rho+\beta)P_0}{1-\rho}. \quad (9)$$

то, после подстановки (9) в условие нормировки, получаем, что

$$P_0+\frac{\rho\delta(1-\rho)}{\delta(\rho+\beta)+\rho(1-\rho)(\rho+\beta+\delta)}. \quad (10)$$

Замечание. Необходимым условием существования стационарного распределения вероятностей является выполнение условий:

$$\rho<1, \; \nu>0.$$

Отметим следующую организационно-экономическую интерпретацию полученных результатов, а именно:

а) вероятность P_0 можно интерпретировать как часть времени, в течение которого ГПС находится в отключенном состоянии, т.е. не тратятся никакие материальные или переменные затраты;

б) вероятность $P_{0^*0}+P_{0^*1}=\dfrac{\rho+\beta}{\delta}P_0$ есть доля времени, в течение которого ГПС находится в состоянии переналадки. В это время система затрачивает определенные ресурсы на ее проведение. Пусть C_1 – затраты ГПС в единицу времени на проведение переналадки;

в) вероятность P_{10} – доля времени, в течение которого ГПС простаивает в готовом, рабочем состоянии и поэтому также расходуются материальные ресурсы. Пусть C_2 – затраты на поддержание ГПС в рабочем состоянии в единицу времени;

г) величина равная $a(1)$ характеризует вероятность того, что прибор занят обслуживанием заказов. Пусть C_3 – расходы ГПС на обработку заказов в единицу времени;

д) вероятность $P_{0^*0} + P_{0^*1} = \frac{\rho+\beta}{\delta} P_0 = P_{отк}$ определяет вероятность получения клиентом отказа в обслуживании;

е) величина $\lambda(1-P_{отк})$ определяет абсолютную пропускную способность системы или среднее число требований, обслуживаемых ГПС в единицу времени. Если C_4 – доход, получаемый системой в единицу времени от обслуживания одной заявки.

Тогда доход, получаемый системой от обслуживания заявок (клиентов) в единицу времени, равен

$$L(\rho,\delta,\beta,C_1,C_2,C_3,C_4)=\lambda C_4(1-P_{отк})-C_1P_0^*-C_2P_{10}-C_3a(1)\Rightarrow \max \quad (11)$$

Для максимизации (11) необходимо минимизировать функционал:

$$L_1(\rho,\delta,\beta,C_1,C_2,C_3,C_4)=\lambda C_4P_{отк}+C_1P_0^*-C_2P_{10}-C_3a(1). \quad (12)$$

Вероятность P_0 можно преобразовать к виду:

$$P_0 = \frac{\rho\delta(1-\rho)}{a+b\beta}, \quad (13)$$

где $a = \rho\delta + \rho(1-\rho)(\rho+\delta)$,

$b = \rho(1-\rho)+\delta$.

После подстановки выражений (3), (4), (9), (13) в (12), оно принимает вид

$$L_1(\rho,\delta,\beta,C_1,C_2,C_3,C_4)=\frac{\left(\frac{C_1+\lambda C_4}{\delta}+\frac{C_2}{\rho}+\frac{C_3}{1-\rho}\right)\cdot\rho\delta(1-\rho)(\rho+\beta)}{a+b\beta} \quad (14)$$

Выражение (14) представляет собой дробно-рациональную функцию, зависящую от многих переменных. Оптимальное (минимальное) значение по переменной β достигается при $\beta = 0$.

Преобразуя соотношение (14) к виду

$$L_1(\rho,\delta,\beta,C_1,C_2,C_3,C_4)=\frac{(\rho(1-\rho)(C_1+\lambda C_4)+\delta(1-\rho)C_2+\rho\delta C_3)(\rho+\beta)}{a+b\beta}$$

можно определить оптимальное значение загрузки ρ, при котором доход будет максимален.

Итак, построенный функционал (15) позволяет определить оптимальные характеристики управляемой гибкой производственной системы.

Литература

1. Румянцев Н.В. Моделирование гибких производственно-логистических систем: Монография / Н.В. Румянцев. – Донецк: Изд-во Юго-Восток, 2004. – 235 с.
2. Румянцев Н.В. Гибкие логистические системы с переналадкой в начале периода занятости и потерей требований / Н.В. Румянцев // Науковий журнал «Бізнес Інформ». – 2012. – № 4. – Харків: ФОП Александрова К.М.; ВД «ИНЖЕК», 2012. – С. 25-27.
3. Румянцев Н.В. Гибкие логистические системы с переналадкой в конце периода занятости и потерей требований / Н.В.Румянцев // Науковий журнал «Бізнес Інформ». – 2012. – № 5. – Харків: ФОП Александрова К.М.; ВД «ИНЖЕК», 2012. – С. 51-54.
4. Технологические основы гибких производственных систем / В.А. Медведев и др. – М.: Высшая школа, 1999. – 252 с.

References

1. Rumyantsev N.V. Modelirovanie gibkih proizvodstvenno-logisticheskih system: monografia / N.V. Rumyantsev. – Donetsk: DonNU, 2004. – 235 p.
2. Rumyantsev N.V. Gibkie proizvodstvenno-logisticheskie systemi s perenaladkoj v nachale perioda zanjatosti I poterej trebovanij / N.V. Rumyantsev // Naukovij zurnal «Biznes-Inform», № 4, 2012. – Harkiv: FOP Aleksandrova K.M., VD «INZEK», 2012. – P. 25-27.
3. Rumyantsev N.V. Gibkie proizvodstvenno-logisticheskie systemi s perenaladkoj v konze perioda zanjatosti I poterej trebovanij / N.V. Rumyantsev //Naukovij zurnal «Biznes-Inform», № 5, 2012. – Harkiv: FOP Aleksandrova K.M., VD «INZEK», 2012. – P. 51-54.
4. Tehnologicheskie osnovi Gibkih proizvodstvenih system. Uchebnoe posobie/ V.A. Medvedev [i drugie]. – M.: Vishaja shkola, 1999. – 252 p.

Статья поступила в редакцию 26.03.2014