М.И. МЕДВЕДЕВА, к.ф.-м.н., доцент
ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк. Украина
zemmrik@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИБКОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРЕНАЛАДКОЙ, НЕНАДЕЖНЫМ ОБОРУДОВАНИЕМ, ПОТЕРЕЙ ЗАКАЗА И ОСОБЫМ ПОВЕДЕНИЕМ В СВОБОДНОМ СОСТОЯНИИ

В работе исследована система массового обслуживания с переналадкой прибора после окончания обработки всех имевшихся в системе изделий, ненадежным прибором, выходящим из строя, как в рабочем, так и в свободном разогретом состоянии, причем предполагается, что при выходе прибора из строя в рабочем состоянии требование, находящееся на обслуживании, теряется. Предполагается, что имеется только одна бригада, выполняющая как переналадку, так и ремонт оборудования, которое выходит из строя.

Ключевые слова: *гибкая производственная система, система массового обслуживания, переналадка в конце производственного цикла, ненадежный прибор, аутсорсинг, инсорсинг*

M.I. Medvedeva

Simulation of a flexible manufacturing system with changeover, unreliable equipment, loss of order and special behavior in the free state

We have studied the queuing system with changeover device after processing all the available products in the system, unreliable device facing down, as in working and free hot condition, and it is assumed that the output of the meter in working condition, the requirement located on the service is lost. It is assumed that there is only one team that performs as changeovers, and repair of equipment, which fails.

Keywords: *flexible manufacturing system, queuing system changeover at the end of the production cycle, unreliable instrument, outsourcing, insourcing*

Одной из основных проблем современной науки и техники, а также и экономики является проблема повышения надежности работы обслуживающего оборудования. При этом, под надежностью понимают способность обслуживающего устройства (оборудования) завершить поставленную задачу в соответствии в предъявленными требованиями в за установленный промежуток времени [1]. Необходимость повышения надежности производственного оборудования обусловлена тем, что ненадежное оборудование приводит к большим затратам на его обслуживание, простоям оборудования, срывам поставок заказов и т.д. Это приводит к потерям предприятием прибыли и снижением его конкурентоспособности.

Увеличивающаяся сложность производственных систем приводит к снижению их надежности, но при практическом применении данных систем, наоборот, повышаются требования к надежности этих систем. Как известно, одним из путей повышения надежности сложной системы заключается в разработке оптимальных методов обслуживания этой системы в ходе ее эксплуатации [2]. В связи с этим, возникает достаточно широкий круг задач, связанных как с созданием сложных технических систем, так и разработкой условий их функционирования, профилактическим обслуживанием в процессе эксплуатации, организацией и проведением ремонтных работ, заменой изношенного оборудования и др. При этом одной из основных задач является задача разработки математических моделей реальных технических и экономических систем, процесса их функционирования, технического и технологического обслуживания.

Следует отметить тот факт, что в настоящее время работа большинства предприятий организована по принципу гибких производственных систем и поэтому современная теория управления такими предприятиями уделяет большое внимание проблемам организации и контроля, как надежности функционирования производственного оборудования, так и вопросам хранения оптимального размера запасных частей или агрегатов. Кроме того, должны решаться задачи определения оптимально-необходимого числа обслуживающих бригад (или мастеров), рационального планирования профилактических работ и переналадки обслуживающего оборудования.

Следовательно, для того, чтобы обеспечить эффективное функционирование производства, необходимо не только правильно организовать сам производственный процесс производства, но и правильно подобрать необходимый для этого обслуживающий персонал. При этом одной из основных функций оптимального управления производством является планирование и оптимизация загрузки оборудования с учетом его ремонта и переналадки. Это позволяет определить как потребности в оборудовании, так и в трудовых ресурсах [3].

Вопросы моделирования гибких производственных систем как систем массового обслуживания с ненадежным прибором и вопросы, связанные с рациональной организацией ремонтных работ, рассматривались в работах Б. Гнеденко, Ю. Беляева, А. Соловьева, Н. Румянцева [2; 3]. В данной работе рассмотрен еще один вариант организации функционирования самой гибкой производственной системы и ремонта оборудования.

Рассмотрим гибкую производственную систему, функционирование которой может быть описано с помощью одноканальной системы массового обслуживания. При этом предполагается, что оборудование является ненадежным и может выйти из строя в любой случайный момент времени (оборудование может находиться как в рабочем, так и в свободном состояниях). Заявка, находящаяся на обслуживании в момент выхода прибора из строя, теряется. В соответствии с техническими особенностями, требуется не только восстановление отказавшего оборудования, но и его переналадка перед началом производственного цикла. Обслуживается оборудование одной бригадой, которая проводит и ремонт, и переналадку. Функционирование рассматриваемой системы проходит по следующей схеме: если после окончания обслуживания i-ой заявки в системе нет очереди (заявок), то прибор переходит в свободное состояние («свободен – неготов»). Если в состоянии «свободен – неготов» прибор выходит из строя, то возможны два варианта поведения прибора:

а) если за время восстановления прибора в систему не поступило заказов, то он вновь переходит в состояние «свободен – неготов»;

б) если за время восстановления прибора в систему поступил заказ, то он немедленно переходит в состояние переналадки, т.е. предполагается, что одновременно выполняется и восстановление прибора и переналадка. Длительность переналадки имеет показательный закон распределения с параметром $\nu > 0$.

Рассматриваемая система может находиться в следующих состояниях:

(0) – прибор свободен, но не готов к обслуживанию заявок (требуется его переналадка);

$(1,\ 0)$ – прибор свободен и готов к обслуживанию заявок;

$(1,\ k)$ – обслуживается очередная заявка и в системе k $(k \geq 1)$ требований;

$(0,\ k)$ – прибор вышел из строя и восстанавливается, причем в системе k $(k \geq 0)$ заявок;

$(0^*,\ k)$ – прибор находится на переналадке и в системе k $(k \geq 0)$ требований;

$(2,\ 0)$ – прибор вышел из строя в нерабочем состоянии (в состоянии (0)) и не готов к обслуживанию (требуется его восстановление, переналадка).

Анализируемая система может быть представлена с помощью размеченного графа состояний и переходов (рис. 1).

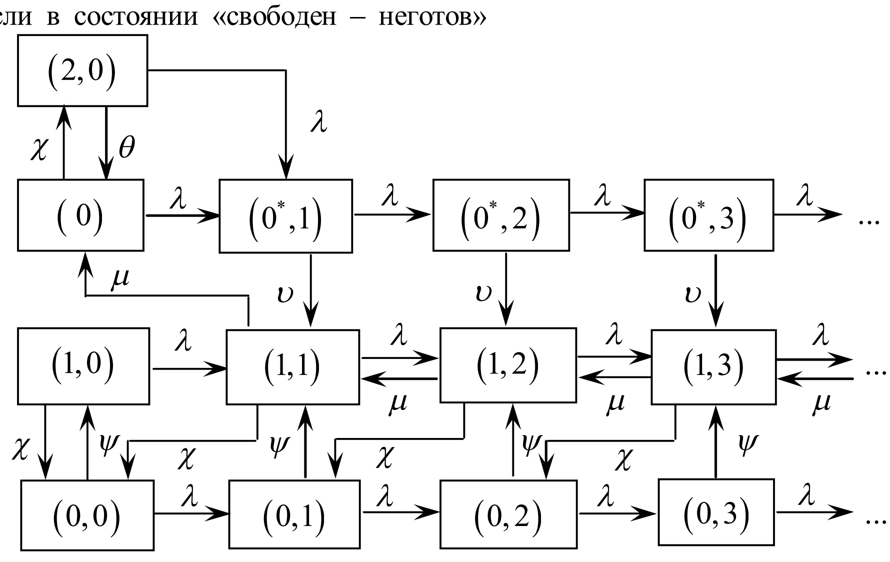

Рис. 1. Размеченный граф состояний системы с особым свободным состоянием

На графе состояний используются следующие обозначения:

θ $(\theta > 0)$ – параметр показательного закона распределения, характеризующего длительность восстановления прибора, если прибор находился в свободном состоянии;

$\mu(\mu > 0)$ – параметр показательного закона распределения, которому подчиняется длительность обслуживания заявки;

$\lambda(\lambda > 0)$ – интенсивность простейшего входящего потока, т.е. вероятность того, что за промежуток времени $\Delta t(\Delta t \geq 0)$ в систему поступит k заявок, вычисляется по формуле $P_k(\Delta t) = \dfrac{(\lambda \Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$;

$\nu(\nu > 0)$ – параметр показательного закона распределения, характеризующего длительность переналадки;

$\chi(\chi > 0)$ – параметр показательного закона распределения, характеризующего момент выхода прибора из строя;

$\psi(\psi > 0)$ – параметр показательного закона распределения, характеризующего длительность восстановления прибора, если прибор находился в рабочем состоянии.

Пусть $\xi(t)$ – стационарный случайный процесс с фазовым пространством *E*, где $E = \{(0);(2,0),(0,k), k \geq 0; (0^*,e), e \geq 1; (1,m), m \geq 0\}$.

Стационарные вероятности состояний случайного процесса $\xi(t)$ будем обозначать следующим образом:

$$P_0 = \mathrm{P}\{\xi(t) = (0)\}; \quad P_{20} = \mathrm{P}\{\xi(t) = (2,0)\};$$

$$P_{0k} = \mathrm{P}\{\xi(t) = (0,k)\}, \quad k \geq 0;$$

$$P_{0^*k} = \mathrm{P}\{\xi(t) = (0^*,k)\}, \quad k \geq 1;$$

$$P_{1k} = \mathrm{P}\{\xi(t) = (1,k)\}, \quad k \geq 0.$$

С помощью размеченного графа состояний и переходов (рис. 1) составим системы бесконечных однородных уравнений, которым удовлетворяют стационарные вероятности случайного процесса $\xi(t)$:

$$\begin{cases} -(\lambda+\upsilon)P_{0^*1} + \lambda P_0 + \lambda P_{20} = 0, \\ -(\lambda+\upsilon)P_{0^*2} + \lambda P_{0^*1} = 0, \\ -(\lambda+\upsilon)P_{0^*k} + \lambda P_{0^*,k-1} = 0, \quad k > 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(\lambda+\psi)P_{00} + \chi P_{10} + \chi P_{11} = 0, \\ -(\lambda+\psi)P_{01} + \lambda P_{00} + \chi P_{12} = 0, \\ -(\lambda+\psi)P_{0k} + \lambda P_{0,k-1} + \chi P_{1,k+1} = 0, \quad k \geq 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(\lambda+\chi)P_{10} + \psi P_{00} = 0, \\ -(\lambda+\chi+\mu)P_{11} + \lambda P_{10} + \upsilon P_{0^*1} + \psi P_{01} + \mu P_{12} = 0, \\ -(\lambda+\chi+\mu)P_{1k} + \lambda P_{1,k-1} + \upsilon P_{0^*k} + \psi P_{0k} + \mu P_{1,k+1} = 0, \quad k \geq 2. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \delta = \frac{\upsilon}{\mu}, \quad \beta = \frac{\psi}{\mu}, \quad \gamma = \frac{\chi}{\mu}, \quad \theta = \frac{\eta}{\mu}.$$

Тогда, представленные выше системы бесконечных однородных уравнений можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} -(\rho+\delta)P_{0^*1} + \rho P_0 + \rho P_{20} = 0, \\ -(\rho+\delta)P_{0^*k} + \rho P_{0^*,k-1} = 0, \quad k \geq 2; \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -(\rho+\beta)P_{00} + \gamma P_{10} + \gamma P_{11} = 0, \\ -(\rho+\beta)P_{0k} + \rho P_{0,k-1} + \gamma P_{1,k+1} = 0, \quad k \geq 1; \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} -(\rho+\gamma)P_{10} + \beta P_{00} = 0, \\ -(1+\rho+\gamma)P_{1k} + \rho P_{1,k-1} + \delta P_{0^*k} + \beta P_{0k} + P_{1,k+1} = 0, \quad k \geq 1. \end{cases} \tag{3}$$

Кроме того, несложно проверить справедливость равенств:

$$-(\rho+\theta)P_{20} + \gamma P_0 = 0 \tag{4}$$

и

$$-(\rho+\gamma)P_0 + \theta P_{20} + P_{11} = 0. \tag{5}$$

Предполагая, что справедливы равенства (4)-(5), найдем решение систем уравнений (1)-(3). Решение находим с помощью следующих производящих функций:

$$a_0(z) = \sum_{k \geq 0} P_{0k} Z^k,$$

$$a_0^*(z) = \sum_{k \geq 1} P_{0^*k} Z^k,$$

$$a_1(z) = \sum_{k \geq 0} P_{1k} Z^k.$$

Умножим обе части уравнений систем (1)-(3) на z $(|z| \leq 1)$ в соответствующей степени и просуммируем уравнения каждой из систем. Тогда после элементарных преобразований соответственно получим равенства:

$$a_0^*(z) = \frac{\rho z(P_0 + P_{20})}{\rho + \delta - \rho z}, \qquad (6)$$

$$z(\rho+\beta-\rho z)a_0(z) - \gamma a_1(z) = \gamma(z-1)P_{10} \qquad (7)$$

и

$$\left(\rho z^2 - z(1+\rho+\gamma)+1\right) a_1(z) + \delta z a_0^*(z) + \beta z a_0(z) = (1-z)P_{10} + zP_{11} \qquad (8)$$

Из первых уравнений систем (1)-(3), а так же уравнений (4) и (5) составляем новую систему:

$$\begin{cases} -(\rho+\beta)P_{00} + \gamma P_{10} + \gamma P_{11} = 0, \\ -(\rho+\gamma)P_{10} + \beta P_{00} = 0, \\ -(\rho+\theta)P_{20} + \gamma P_0 = 0, \\ -(\rho+\gamma)P_0 + \theta P_{20} + P_{11} = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Можно показать, что решение системы (9) относительно стационарных вероятностей $P_{00}, P_{10}, P_{11}, P_{20}$ имеет вид:

$$P_{00} = \frac{\gamma(\rho+\gamma)(1+\theta+\gamma)}{(\rho+\theta)(\rho+\beta+\gamma)} P_0,$$

$$P_{10} = \frac{\beta\gamma(\rho+\theta+\gamma)}{(\rho+\theta)(\rho+\beta+\gamma)} P_0,$$

$$P_{11} = \frac{\rho(\rho+\theta+\gamma)}{\rho+\theta} P_0,$$

$$P_{20} = \frac{\gamma}{\rho+\theta} P_0.$$

Тогда, подставив найденные значения P_{10} и P_{11} в равенства (7) и (8), соответственно получаем:

$$z(\rho+\beta-\rho z)a_0(z) - \gamma a_1(z) = \frac{\beta\gamma^2(\rho+\theta+\gamma)(z-1)}{(\rho+\theta)(\rho+\beta+\gamma)} P_0 \qquad (10)$$

и

$$\left(\rho z^2 - z(1+\rho+\gamma)+1\right)a_1(z) + \delta z a_0^*(z) + \beta z a_0(z) = \\ = \frac{(\rho+\theta+\gamma)\left[\beta\lambda(1-z) + \rho z(\rho+\beta+\gamma)\right]}{(\rho+\theta)(\rho+\beta+\gamma)} P_0. \qquad (11)$$

Чтобы упростить дальнейшее изложение, введем ряд обозначений:

$$d_1(z) = z(\rho+\beta-\rho z);$$

$$d_2(z) = \rho z^2 - z(1+\rho+\gamma)+1;$$

$$d_3(z) = \frac{\beta\gamma^2(\rho+\theta+\gamma)(z-1)}{(\rho+\theta)(\rho+\beta+\gamma)};$$

$$d_4(z) = (1-z)P_{10} + zP_{11} - \delta\rho a_0^*(z) = \frac{(1-z)(\rho+\theta+\gamma)}{(\rho+\theta)}\left[\frac{\beta\gamma}{\rho+\beta+\gamma} + \frac{\rho z}{\rho+\delta-\rho z}\right]$$

Из уравнений (10)-(11) составляем новую систему, которая с учетом введенных обозначений имеет вид:

$$\begin{cases} d_1(z)a_0(z) - \gamma a_1(z) = d_3(z)P_0, \\ \beta z a_0(z) + d_2(z)a_1(z) = d_4(z)P_0. \end{cases} \qquad (12)$$

Легко показать, что решение системы уравнений (12) есть:

$$a_0(z) = \frac{d_2(z)d_3(z) + \gamma d_4(z)}{d_1(z)d_2(z) + \gamma\beta z} P_0 \qquad (13)$$

и

$$a_1(z) = \frac{d_1(z)d_4(z) - \beta z d_3(z)}{d_1(z)d_2(z) + \gamma\beta z} P_0. \qquad (14)$$

Таким образом, все стационарные вероятности и производящие функции выражены через P_0. Для вычисления стационарной вероятности P_0 воспользуемся условием нормировки вида:

$$a_0(1) + a_0^*(1) + a_1(1) + P_0 + P_{20} = 1.$$

Из первого уравнения системы (12) следует, что:

$$a_1(1) = \frac{\gamma}{\beta} a_0(1).$$

Тогда после несложных преобразований условие нормировки можно представить следующим образом:

$$\left(\frac{\rho+\theta+\gamma}{\rho+\theta}\right)\left(\frac{\rho+\delta}{\delta}\right)P_0 + \left(\frac{\beta+\gamma}{\gamma}\right)a_0(1) = 1 \qquad (15)$$

Следовательно, задача нахождения стационарной вероятности P_0 сводится к определению значения $a_0(1)$. Для вычисления производящей функции $a_0(z)$ в точке $z=1$ воспользуемся равенством (13). Переходя к пределу при $z \to 1$, из равенства (13) получим:

$$a_0(1) = \frac{\gamma(\rho+\theta+\gamma)\left(\delta\beta\gamma(1+\gamma) + \rho(\delta+\rho)(\rho+\beta+\gamma)\right)}{\delta(\rho+\theta)(\rho+\beta+\gamma)\left(\beta\gamma - \rho(\beta+\gamma)\right)} P_0$$

Следовательно, условие нормировки принимает вид:

$$\frac{\beta\gamma(\rho+\theta+\gamma)\left(\delta(1+\gamma)(\beta+\gamma) + (\rho+\delta)(\rho+\beta+\gamma)\right)}{\delta(\rho+\theta)(\rho+\beta+\gamma)\left(\beta\gamma - \rho(\beta+\gamma)\right)} P_0 = 1 \cdot$$

Из последнего равенства:

$$P_0=\frac{\delta(\rho+\theta)(\rho+\beta+\gamma)(\beta\gamma-\rho(\beta+\gamma))}{\beta\gamma(\rho+\theta+\gamma)(\delta(1+\gamma)(\beta+\gamma)+(\rho+\delta)(\rho+\beta+\gamma))}.$$

Тогда все стационарные вероятности принимают положительное значение при условии, что:

$$\rho<\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}.$$

Замечание 1. Предположим, что длительность восстановления прибора, вышедшего из строя в нерабочем состоянии, имеет показательный закон с параметром υ, т.е. совпадает с параметром показательного распределения, характеризующего длительность переналадки. Тогда $\theta=\delta$ и вероятность P_0^1 того, что оборудование находится в состоянии (0) – «свободен – неготов», равна

$$P_0^1=\frac{\delta(\rho+\delta)(\rho+\beta+\gamma)(\beta\gamma-\rho(\beta+\gamma))}{\beta\gamma(\rho+\delta+\gamma)(\delta(1+\gamma)(\beta+\gamma)+(\rho+\delta)(\rho+\beta+\gamma))}.$$

Замечание 2. Предположим теперь, что $\eta=\psi$, т.е. длительность восстановления не зависит от того, в каком состоянии (рабочем или нет) оборудование вышло из строя. Тогда $\theta=\beta$ и вероятность P_0^2 того, что оборудование находится в состоянии (0) равна:

$$P_0^2=\frac{\delta(\rho+\beta)(\beta\gamma-\rho(\beta+\gamma))}{\beta\gamma(\delta(1+\gamma)(\beta+\gamma)+(\rho+\delta)(\rho+\beta+\gamma))}.$$

Несложно заметить, что:

$$P_0=\frac{(\rho+\theta)(\rho+\beta+\gamma)}{\rho+\theta+\gamma}K,$$

$$P_0^1=\frac{(\rho+\delta)(\rho+\beta+\gamma)}{\rho+\delta+\gamma}K,$$

$$P_0^2=(\rho+\beta)K,$$

где

$$K=\frac{\delta(\beta\gamma-\rho(\beta+\gamma))}{\beta\gamma(\delta(1+\gamma)(\beta+\gamma)+(\rho+\delta)(\rho+\beta+\gamma))}.$$

Кроме того, легко можно проверить, что:

$$P_0^2=\frac{\gamma(\beta-\delta)}{\rho+\delta+\gamma}+P_0^1.$$

Следовательно,

$$\mathrm{si\,gn}\left(P_0^2-P_0^1\right)=\begin{cases}1, \text{ если } \psi>\upsilon,\\ 0, \text{ если } \psi=\upsilon,\\ -1, \text{ если } \psi<\upsilon.\end{cases}$$

Выпишем основные вероятности для случая $\theta=\delta$ и $\theta=\beta$:

– вероятность того, что прибор вышел из строя, находясь в нерабочем состоянии:

$$P_{20}^1=\frac{\gamma}{\rho+\delta}P_0^1=\frac{\gamma(\rho+\beta+\gamma)}{\rho+\delta+\gamma}K,$$

$$P_{20}^2=\frac{\gamma}{\rho+\beta}P_0^2=\gamma K$$

и $$\sin g\left(P_{20}^2-P_{20}^1\right)=\begin{cases}1, \text{ если } \psi>\upsilon,\\ 0, \text{ если } \psi=\upsilon,\\ -1, \text{ если } \psi<\upsilon.\end{cases}$$

– вероятность того, что прибор обслуживает заявку и в системе нет требований:

$$P_{10}^1=\beta\gamma K \text{ и } P_{10}^2=\beta\gamma K,$$

т.е. вероятности совпадают.

– вероятность того, что прибор вышел из строя и находится на восстановлении:

$$a_0^1(1)=a_0^2(1)=\frac{\delta\beta\gamma(1+\gamma)+\rho(\delta+\rho)(\rho+\beta+\gamma)}{\delta(1+\gamma)(\beta+\gamma)+(\delta+\rho)(\rho+\beta+\gamma)}.$$

Таким образом, найдены все стационарные вероятности состояний рассматриваемой системы. Это позволяет найти все необходимые характеристики производственно-логистической системы. Кроме того, рассмотренные варианты длительности восстановления оборудования позволяют выбрать наиболее оптимальный процесс функционирования системы, а также решать вопросы целесообразности вывода ремонтной бригады на аутсорсинг.

Литература

1. Radio-Electronics-Television Manufacturers Association, 1955, Electronic. Applications Reliability Review, v. 3, № 1, May, p.18.
2. Гнеденко Б.В. Математические методы в теории надежности / Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д. Соловьев. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
3. Румянцев Н.В. Моделирование гибких производственно-логистических систем: монография / Н.В. Румянцев. – Донецк: ДонНУ, 2004. – 235 с.

References

1. Radio-Electronics-Television Manufacturers Association, 1955, Electronic. Applications Reliability Review, v. 3, № 1, May, p.18.
2. Gnedenko B.V. Matematicheskie metodi v teorii nadeznosti / B.V. Gnedenko, Ju.K. Belyaev, A.D. Soloviev. – M.: Nauka, 1965. – 524 p.
3. Rumyantsev N.V. Modelirovanie gibkih proizvodstvenno-logisticheskih system: monografia / N.V. Rumyantsev. – Donetsk: DonNU, 2004. – 235 p.

Статья поступила в редакцию 2.04.2014