УДК 622.24.053

Докт. техн. наук УЛИТИН Г.М. (ДонНТУ)

КОЛЕБАНИЯ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ КАК ГИДРОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ

При технологических режимах бурения бурильная колонна взаимодействует с жидкой средой — промывочной жидкостью или находится в безграничной водной среде (море). Многими авторами учтено и исследовано влияние трения сопротивления жидкости на колебания колонны. Например, сопротивление жидкости поперечным колебаниям исследовано в работе [1], продольным — в монографиях [2,3]. В то же время, насколько известно автору, не была решена задача о колебаниях связанной гидроупругой системы: колонна — жидкость.

В качестве модели гидроупругой системы рассмотрим упругий стержень длиною l (колонна), погруженный в жидкость, заполняющей цилиндрический резервуар радиуса R (скважина) и введем цилиндрическую систему координат (x, r, θ) (рис. 1).

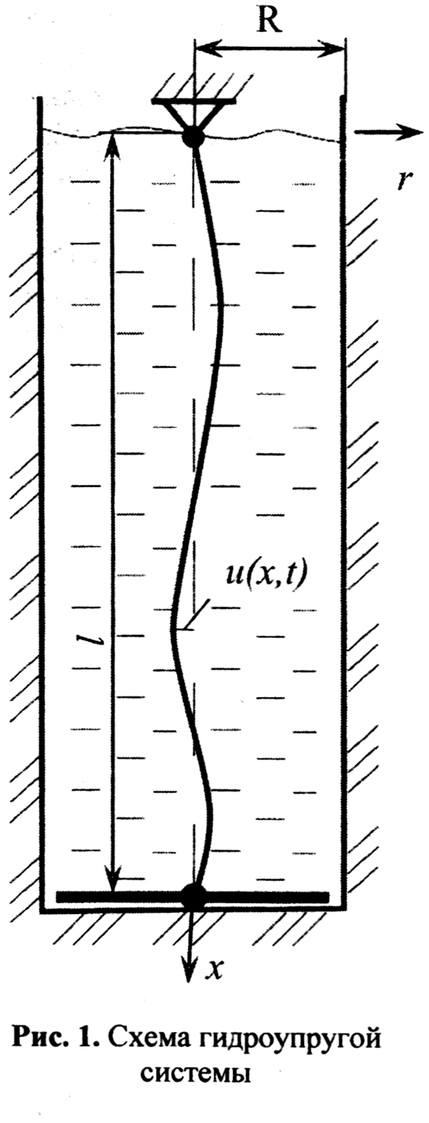

Рис. 1. Схема гидроупругой системы

Задача об исследовании такой системы сводится [4] к совместному решению граничной задачи для потенциала скоростей жидкости $\Phi(x, r, \theta, t)$:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=0; \qquad (1)$$

$$\Phi\big|_{x=0}=0; \frac{\partial\Phi}{\partial r}\bigg|_{r=R}=0; \frac{\partial\Phi}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0; \frac{\partial\Phi}{\partial r}\bigg|_{r=u}=\frac{\partial u}{\partial t},$$

и граничной задачи для поперечных колебаний $u(x,t)$ бурильной колонны:

$$EJ\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mp T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=q(x,t); \qquad (2)$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0; u''(0,t)=u''(l,t)=0,$$

где $m-$ погонная масса бурильной колонны, $EJ-$ ее изгибная жесткость, $T-$ продольная сила растяжения (сжатия).

Первое граничное условие задачи (1) не учитывает влияние поверхностных волновых движений жидкости на динамические характеристики системы, что допустимо для глубин $l/R > 1$ [5]. Динамическое давление на стержень определим из линеаризованного интеграла Коши:

$$q(x,t)=-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}\bigg|_{r=u(x,t)}, \qquad (3)$$

где $\rho-$ плотность жидкости.

Методом Фурье получим решение граничной задачи (1), удовлетворяющее первым трем граничным условиям:

$$\Phi(x,r,\theta,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{jn}(t)\left(ch\lambda_{jn}(x-l)-ch\lambda_{jn}l\right)J_n(\lambda_{jn}r)\cos n\theta, \tag{4}$$

где $\varphi_{jn}(t)$ – пока неопределенные функции времени. $J_n(z)$ – функции Бесселя первого рода. $\lambda_{jn}=\mu_{jn}/R, \mu_{jn}$ – корни уравнения $\mu J_{n-1}(\mu)=nJ_n(\mu)$.

Выражение для поперечных колебаний упругого стержня представим в виде:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}y_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{5}$$

что позволяет удовлетворить граничным условиям задачи (2).

Будем считать, что колебания малы и происходят в плоскости $\theta=0$. Подставим выражение для потенциала скоростей (4) и форму колебаний (5) в третье граничное условие задачи (1). Используя асимптотические представления для функций Бесселя при малых значениях аргумента, получим:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varphi_j(t)\lambda_j}{2\Gamma(2)}\left(ch\lambda_j(x-l)-ch\lambda_j l\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\dot{y}_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{6}$$

где $\lambda_j=\mu_j/R, \mu_j$ – корни уравнения $\mu J_0(\mu)=J_1(\mu), \Gamma(z)$ – гамма-функция.

К уравнению (6) применим метод Бубнова-Галеркина по системе функций $\left\{\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}$. Получим систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{p}\alpha_{jk}\varphi_j=\dot{y}_k,\ \ k=1,2,\dots,p, \tag{7}$$

где $\alpha_{jk}=\dfrac{\lambda_j}{2l}\displaystyle\int_0^l\left(ch\lambda_j(x-l)-ch\lambda_j l\right)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$

Из системы (6) определим функции:

$$\varphi_j=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{p}\beta_{jk}\dot{y}_k,\quad j=1,2,\dots,p, \tag{8}$$

где β_{jk} – алгебраические дополнения матрицы $\|\alpha_{jk}\|$, $\Delta=det\|\alpha_{jk}\|$.

Подставим выражение для поперечных колебаний (5) и динамическое давление (3) с учетом формулы (8) во вторую граничную задачу (2):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(m\ddot{y}_k+\left(EJ\frac{k^4\pi^4}{l^4}\pm T\frac{k^2\pi^2}{l^2}\right)y_k\right)\sin\frac{k\pi x}{l}=-\rho\sum_{j=1}^{\infty}\dot{\varphi}_j\left(ch\lambda_j(x-l)-ch\lambda_j l\right) \tag{9}$$

Если в выражение (9) подставить значения функций φ_j (8) и применить метод Бубнова-Галеркина по системе функций $\left\{\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}$, то получим систему дифференциальных уравнений вида:

$$\xi_{nn}\ddot{y}_n + \sum_{k=1}^{p}{}' \xi_{nk}\ddot{y}_k + \kappa_n^2 y_n = 0,\ \ n = 1,2,...,p, \tag{10}$$

где знак штрих над суммой означает пропуск при суммировании члена соответствующего значению $k = n$.

Полагая $y_n = a_n e^{i\omega t}$, из системы (10) получаем однородную систему алгебраических уравнений для определения собственных частот ω и форм $\{a_n\}$ колебаний гидроупругой системы:

$$(\gamma_{nn} - \eta)a_n - \sum_{k=1}^{p}{}' \gamma_{nk} a_k = 0, \tag{11}$$

где $\gamma_{nk} = \dfrac{\xi_{nk}}{\kappa_n^2}; \eta = \dfrac{1}{\omega^2}$.

Система (11) имеет нетривиальное решение, если

$$det\|\gamma_{nk} - \eta\delta_{nk}\| = 0, \quad n, k = 1,2,...,p,$$

где δ_{nk} – символ Кронекера.

Ввиду громоздкости формул выражения для коэффициентов ξ_{nk}, κ_n здесь не приводятся. Таким образом, задача свелась к определению собственных значений и собственных векторов матрицы $\|\gamma_{nk}\|$.

Из анализа коэффициентов ξ_{nk}, κ_n следует, что учет гидроупругости снижает значения собственных частот колебаний бурильной колонны.

Библиографический список

1. **Грэм Д., Фрост М., Уилхойт Д.** Анализ движения колонны бурильных труб при глубоком бурении. Вынужденное поперечное движение // Конструирование и технология машиностроения. Сборник трудов американского общества инженеров-механиков: Пер. с англ. — М.: Мир, 1965. — №2. — С. 40–48.

2. **Харченко Е.В.** Динамические процессы буровых установок. — Львов: Свиточ, 1991. — 176 с.

3. **Сароян А.Е.** Теория и практика работы бурильной колонны. — М.: Недра, 1990. — 264с.

4. **Мнев Е.Н., Перцев А.К.** Гидроупругость оболочек. — Л.: Судостроение, 1970 — 365с.

5. **Перехрест В.И., Улитин Г.М., Шевченко В.П.** Влияние волновых движений жидкости на упругие колебания цилиндрической оболочки // Теоретическая и прикладная механика, 1980. — № 11. — С. 83–87.