

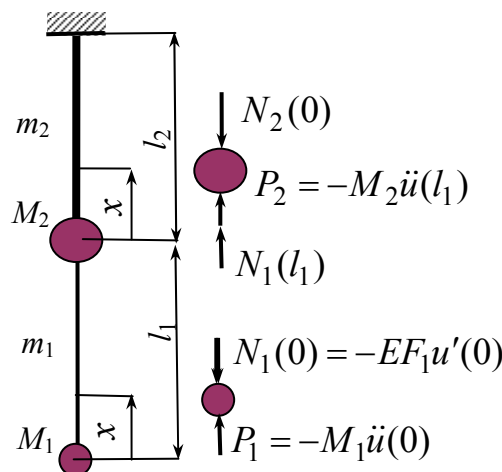
УДК 624.04(075.8)

Докт. техн. наук ШЕВЧЕНКО Ф. Л. (ДонНТУ)

**СОБСТВЕННЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ КАК СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

В случае стержней большой длины возникает целесообразность их изготовления ступенчато переменным сечением. Если масса стержня соизмерима с сосредоточенными массами, закрепленными на стержне, то в расчете на продольные колебания нужно учитывать силы инерции не только сосредоточенных масс, но и распределенных. Колебания таких систем с распределенными параметрами описываются волновым уравнением [1]

$$\ddot{u}(x,t) - c^2 u''(x,t) = 0, \quad c = \sqrt{EF/m} = \sqrt{E/\gamma}, \quad (1)$$



**Рис. 1.** Расчетная схема

где  $u(x,t)$  - перемещения поперечных сечений стержня с жесткостью на растяжение-сжатие  $EF$ , погонной массой  $m$  и плотностью материала  $\gamma$  (рис. 1).

Решение уравнения (1) методом Фурье  $u(x,t) = u(x)T(t)$  сводится к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям, одно из которых определяет гармонический закон продольных колебаний с собственными частотами  $\omega$  и сдвигом фазы  $\mu$

$$T(t) = C \sin(\omega t + \mu).$$

Второе уравнение

$$u''(x) + k^2 u(x) = 0, \quad k = \omega/c$$

определяет собственные формы деформаций и его решение может быть представлено в начальных параметрах

$$u(x) = u_0 \cos kx + \frac{N_0}{kEF} \sin kx, \quad (2)$$

т.е. через перемещение  $u_0$  и усилие  $N_0$  в начале координат.

Начальные параметры находятся из граничных условий и могут быть выражены один через другой  $D_n$ . Тогда уравнение движения сечений будет описываться собственными функциями  $X(x)$

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(x) X_n(x) \sin(\omega_n t + \mu_n). \quad (3)$$

Подчиняя уравнение перемещений (2) граничным условиям закрепления стержня, получим частотное уравнение, корни (собственные числа) которого дают возможность получить спектр частот собственных колебаний

$$\omega_n = k_n \sqrt{\frac{EF}{m}} = k_n \sqrt{\frac{E}{\gamma}}. \quad (4)$$

Известно, что собственные функции  $X_n(x)$  условно ортогональны [2]

$$\int_0^l m(x) X_n(x) X_m(x) dx = 0, \quad (5)$$

а при наличии сосредоточенных масс  $M_i$  в сечениях с координатой  $x_i$  условие ортогональности (5) потребует дополнительных слагаемых вида

$$\sum M_i X_n(x_i) X_m(x_i). \quad (6)$$

Подставляя (3) в (1), получим для двух гармоник различных номеров  $n$  и  $m$  дифференциальные уравнения

$$X_n''(x) = -k_n^2 X_n(x), \quad X_m''(x) = -k_m^2 X_m(x),$$

из которых интегрированием можно найти следующую дифференциальную зависимость [2]:

$$(k_n^2 - k_m^2) \int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = \left| X_n(x) X_m'(x) - X_m(x) X_n'(x) \right|_0^l. \quad (7)$$

Для стержня ступенчато-переменного сечения такие зависимости умножаются на жесткость участков и суммируются по длине стержня. Учитывая, что продольное усилие  $N_i = EF_i X_i'$ , для стержня ступенчато-переменного сечения участков зависимость (7) примет вид:

$$EF_i (k_n^2 - k_m^2) \int_0^l X_n(x) X_m'(x) dx = \left| X_n(x) N_m(x) - X_m(x) N_n(x) \right|_0^l. \quad (8)$$

Например, для двухступенчатого стержня (рис. 1) зависимость (8) примет вид:

$$\begin{aligned} & EF_1 (k_{1n}^2 - k_{1m}^2) \int_0^l X_{1n}(x) X'_{1m}(x) dx + EF_2 (k_{2n}^2 - k_{2m}^2) \int_0^l X_{2n}(x) X'_{2n}(x) dx = \\ & = \left| X_{1n}(x) N_{1m}(x) - X_{1m}(x) N_{1n}(x) \right|_0^{l_1} + \left| X_{2n}(x) N_{2m}(x) - X_{2m}(x) N_{2n}(x) \right|_0^{l_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для нижнего участка согласно (2) уравнение перемещений сечений имеет вид

$$u_1(x) = u_0 \cos k_1 x + \frac{N_0}{k_1 E F_1} \sin k_1 x. \quad (10)$$

Рассмотрим условие равновесия нижней массы  $N_0 = -P_1$  с учетом силы инерции

$$P_1 = -M_1 \ddot{u}_1(0) = M_1 \omega^2 u_0 = M_1 \frac{k_1^2 E F_1}{m_1} = \xi_1 \lambda_1 k_1 E F_1 u_0,$$

где обозначено  $\xi_1 = \frac{M_1}{m_1 l_1}$ ,  $\lambda_1 = k_1 l_1$  и учтено, что при положительном перемещении, когда  $x_1 > 0$ , усилие  $N_1(0) = N_0$  отрицательное.

Так из (2) находим собственные функции  $X_1(x)$  для нижнего участка

$$u_1(x) = u_0 (\cos k_1 x - \xi_1 \lambda_1 \sin k_1 x) = u_0 X_1(x). \quad (11)$$

Отсюда дифференцированием получаем уравнение внутренних усилий

$$N_1(x) = -E F_1 u_0 k_1 (\sin k_1 x + \xi_1 \lambda_1 \cos k_1 x) = E F_1 u_0 X_1'(x). \quad (12)$$

Для верхнего участка с учетом силы инерции массы  $M_2$

$$P_2 = -M_2 \ddot{u}_2(0) = M_2 \omega^2 u_2(0) = M_2 k_2^2 \frac{E F_2}{m_2} u_2(0) = \xi_2 \lambda_2 k_2 E F_2 u_1(l_1)$$

и начальных параметров  $u_0 X_1(l_1)$  и  $N_2(0) = N_1(l_1) - P_2$  получим уравнение перемещений сечений и собственные функции второго участка

$$u_2(x_2) = u_0 \left\{ (\cos \lambda_1 - \xi_1 \lambda_1 \sin \lambda_1) \cos k_2 x_2 - \left[ \frac{E F_1 k_1}{E F_2 k_2} (\sin \lambda_1 + \xi_1 \lambda_1 \cos \lambda_1) + \xi_2 \lambda_2 (\cos \lambda_1 - \xi_1 \lambda_1 \sin \lambda_1) \right] \sin k_2 x_2 \right\} = u_0 X_2(x_2) = u_0 (A \cos k_2 x_2 + B \sin k_2 x_2). \quad (13)$$

Здесь для сокращения записи для дальнейшего интегрирования собственных функций обозначены постоянные:

$$A = X_1(\lambda_1) = \cos \lambda_1 - \xi_1 \lambda_1 \sin \lambda_1, \quad B = \frac{F_1}{F_2} X_1'(\lambda_1) + \xi_2 \lambda_2 X_1(\lambda_1).$$

Теперь соответственно зависимости (9) изучим свойства собственных функций:

$$\begin{aligned} & E F_1 (k_{1n}^2 - k_{1m}^2) \int_0^{l_1} X_{1n}(x_1) X_{1m}(x_1) dx + E F_2 (k_{2n}^2 - k_{2m}^2) \int_0^{l_2} X_{2n}(x_2) X_{2m}(x_2) dx = \\ & = |X_{1n}(x_1) N_{1m}(x_1) - X_{1m}(x_1) N_{1n}(x_1)|_0^{l_1} + |X_{2n}(x_2) N_{2m}(x_2) - X_{2m}(x_2) N_{2n}(x_2)|_0^{l_2} = \\ & = X_{1n}(l_1) N_{1m}(l_1) - X_{1m}(l_1) N_{1n}(l_1) - X_{1n}(0) N_{1m}(0) + X_{1m}(0) N_{1n}(0) - \\ & \quad - X_{2n}(0) N_{2m}(0) + X_{2m}(0) N_{2n}(0). \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая стыковку участков, т.е.  $X_1(l_1) = X_2(0)$ , с использованием выражения для продольного усилия в конце первого участка (12), представим усилие в начале второго участка  $N_2(0) = N_1(l_1) - \xi_2 \lambda_2 k_2 E F_2 u_1(l_1)$  и правая часть равенства (14) примет вид:

$$\begin{aligned} & \underline{X_{1n}(l_1)N_{1m}(l_1)} - \underline{X_{1m}(l_1)N_{1n}(l_1)} + X_{1n}(0)EF_1k_{1m}\xi_1\lambda_{1m}X_{1m}(0) - \\ & - X_{1m}(0)EF_1k_{1n}\xi_1\lambda_{1n}X_{1n}(0) - \underline{X_{2n}(0)N_{1m}(l_1)} + X_{2n}(0)EF_2k_{2m}\xi_2\lambda_{2m}X_{1m}(l_1) + \\ & + \underline{X_{2m}(0)N_{1n}(l_1)} - X_{2n}(0)EF_2k_{2n}\xi_2\lambda_{2n}X_{1n}(l_1). \end{aligned}$$

Здесь подчеркнутые слагаемые взаимно уничтожаются, а тогда из равенства (14) после сокращения на  $EF_1$  получим зависимость

$$\begin{aligned} & \int_0^{l_1} X_{1n}(x_1)X_{1m}(x_1)dx + \frac{F_2}{F_1} \int_0^{l_2} X_{2n}(x_2)X_{2m}(x_2)dx = \\ & = \xi_1 l_1 X_{1n}(0)X_{1m}(0) + \frac{F_2}{F_1} \xi_2 l_2 X_{1n}(0)X_{1m}(0), \end{aligned}$$

указывающую на то, что на нижнем участке собственные функции ортогональны с весом  $\rho_1(x_1) = 1 + \xi_1 l_1 \delta(-x_1)$ , а на верхнем участке кроме веса  $\rho_2(x_2) = 1 + \xi_2 l_2 \delta(-x_2)$  нужно учитывать отношение жесткостей участков.

Учитывая равенство частот по участкам стержня, согласно (4) следует, что  $k_{1n} = k_{2n}$ , т.е. индексы волновых чисел можно опустить.

Подставляя собственные функции второго участка в условие защемления, при  $x_2 = l_2$   $u_2(l_2) = 0$ , на основании (13) получаем частотное уравнение

$$\operatorname{tg} \lambda_2 = \frac{\cos \lambda_1 - \xi_1 \lambda_1 \sin \lambda_1}{\frac{F_1}{F_2} (\sin \lambda_1 + \xi_1 \lambda_1 \cos \lambda_1) + \xi_2 \lambda_2 (\cos \lambda_1 - \xi_1 \lambda_1 \sin \lambda_1)}. \quad (15)$$

При отсутствии сосредоточенных масс, когда  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ , из (15) получаем известное частное решение [2]

$$\operatorname{tg} \lambda_1 \cdot \operatorname{tg} \lambda_2 = \frac{F_2}{F_1}. \quad (16)$$

Если стержень содержит один участок (верхний), то  $l_1 = 0$ ,  $\xi_1 = 0$ ,  $\lambda_1 = 0$ . Тогда из (15) получим известное частотное уравнение [1]

$$\operatorname{tg} \lambda_2 = \frac{1}{\xi_2 \lambda_2}.$$

Аналогичное частное решение будет при отсутствии верхнего участка, когда в (15) нужно положить  $F_2 = \infty$ ,  $\xi_2 = \infty$ .

Зная собственные функции (10), (13) можно найти квадрат нормы собственных функций

$$\Delta_n^2 = \int_0^{l_1} X_1^2(x) \rho_1(x) dx + \frac{F_2}{F_1} \int_0^{l_2} X_2^2(x) \rho_2(x) dx.$$

Подставляя сюда собственные функции (10). (13) с учетом интегрирования дельта-функции Дирака, получим:

$$\int_0^{l_1} [1 + \xi_1 l_1 \delta(-x)] X_1^2(x) dx = \frac{l_1}{2} \left[ 1 + \xi_1^2 \lambda_1^2 + 2\xi_1 \cos^2 \lambda_1 + \frac{1}{2\lambda_1} (1 - \xi_1^2 \lambda_1^2) \sin 2\lambda_1 \right],$$

$$\int_0^{l_2} [1 + \xi_2 l_2 \delta(-x)] X_2^2(x) dx = \frac{l_2}{2} X_1^2(l_1) \left( 1 + \frac{1}{2\lambda_2} \sin 2\lambda_2 \right) + \frac{l_2}{\lambda_2} X_1(l_1) \left( \frac{F_1}{F_2} X_1'(l_1) + \xi_2 \lambda_2 X_1(l_1) \right) \sin^2 \lambda_2 + \frac{l_2}{2} \left( \frac{F_1}{F_2} X_1'(l_1) + \xi_2 \lambda_2 X_1(l_1) \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{2\lambda_2} \sin 2\lambda_2 \right) + \xi_2 l_2 X_1^2(l_1)$$

Так находим квадрат нормы собственных функций  $\Delta_n^2 = \frac{l_1}{2} \bar{\Delta}_1^2$ , где обозначено безразмерное его значение

$$\bar{\Delta}_n^2 = 1 + \xi_1^2 \lambda_1^2 + 2\xi_1 \cos^2 \lambda_1 + \frac{1}{2\lambda_1} (1 - \xi_1^2 \lambda_1^2) \sin 2\lambda_1 + \frac{F_2 l_2}{F_1 l_1} \left[ X_1^2(l_1) \left( 1 + \frac{1}{2\lambda_2} \sin 2\lambda_2 \right) + \frac{2}{\lambda_2} X_1(l_1) \left( \frac{F_1}{F_2} X_1'(l_1) + \xi_2 \lambda_2 X_1(l_1) \right) \sin^2 \lambda_2 + \left( \frac{F_1}{F_2} X_1'(l_1) + \xi_2 \lambda_2 X_1(l_1) \right)^2 \times \left( 1 - \frac{1}{2\lambda_2} \sin 2\lambda_2 \right) + 2\xi_2 X_1^2(l_1) \right]. \quad (17)$$

Теперь можно решить задачу на собственные колебания двухступенчатого стержня, падающего со скоростью  $v$  и внезапно защемленного в верхнем сечении (рис. 1). Начальное условие требует наличия скорости движения  $v_0$  во всех сечениях, кроме защемления  $v(x,0) = v[1 - e(x_2 - l_2)]$ , т.е.

$$\sum u_0 \omega_n X_n(x) dx = [1 - e(x_2 = l_2)].$$

Это равенство нужно умножить на вес  $\rho(x)$ , собственные функции  $X_m(x)$  и проинтегрировать по участкам стержня

$$u_0 \omega_n \left[ \int_0^{l_1} [1 + \xi_1 l_1 \delta(-x_1)] X_{1n}(x) X_{1m}(x) dx + \frac{F_2}{F_1} \int_0^{l_2} [1 + \xi_2 l_2 \delta(-x_2)] X_{2n}(x) X_{2m}(x) dx \right] = v \int_0^{l_1} [1 + \xi_1 l_1 \delta(-x_1)] X_1(x) dx + \frac{F_2}{F_1} \int_0^{l_2} [1 + \xi_2 l_2 \delta(-x_2)] X_2(x) dx. \quad (18)$$

Интеграл левой части этого равенства представляет квадрат нормы собственных функций (17)  $\Delta_n^2 = \frac{l_1}{2} \bar{\Delta}_n^2$ .

Интегрируя правую часть равенства (18) с использованием собственных функций (10) (13), получим

$$\begin{aligned} v \frac{l_1}{\lambda_1} \left[ \sin \lambda_1 + \xi_1 l_1 (\cos \lambda_1 - 1) + \xi_1 \lambda_1 + \frac{F_2}{F_1} (A \sin \lambda_2 + B (\cos \lambda_2 - 1)) + A \frac{F_1 l_2}{F_2 l_1} \xi_2 \lambda_1 \right] = \\ = v \frac{l_1}{\lambda_1} \Phi_n. \end{aligned} \quad (19)$$

Так из условия (18) находим амплитудное динамическое перемещение нижнего конца стержня

$$u_0 = 2v l_1 \sqrt{\frac{\gamma}{E}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n}{\lambda_1^2 \bar{\Delta}_n^2}. \quad (20)$$

Зная начальный параметр  $u_0$ , по (10), (13) можно найти уравнения перемещений сечений стержня  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$ , а затем дифференцированием найти внутренние усилия  $N_i = EF_i u_i'(x)$  и напряжения  $\sigma_i(x) = N_i(x) / F_i$ .

Приведенный расчет может быть использован в расчетах бурильных колонн на ударные нагрузки при их опускании в скважину и внезапной остановке нижнего сечения в забое.

### Библиографический список

1. Шевченко Ф. Л. Будівельна механіка. Спеціальний курс. Динаміка пружних стержньових систем.: Навчальний посібник. – Донецьк: РВА ДонНТУ, 2000. с. 292.
2. Справочник. Прочность. Устойчивость. Колебания. Под общей редакцией И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. с.467.

© Шевченко Ф. Л., 2006

УДК 622.24.051.64

Канд. техн. наук БОГДАНОВ Р. К., член-корр. НАНУ ШУЛЬЖЕНКО А. А., канд. техн. наук ЗАКОРА А. П., канд. техн. наук ИСОНКИН А. М., инж. ГАРГИН В. Г., инж. ПАНОВ А. В (ИСМ им. В. Н. Бакуля НАН Украины)

### ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ АКТМ В ВИДЕ ЦИЛИНДРОВ В БУРОВОМ ИМПРЕГНИРОВАННОМ ИНСТРУМЕНТЕ

Поликристаллические материалы на основе алмаза (ПМА) были созданы в 70-х годах прошлого столетия и в самый короткий срок нашли широкое применение в качестве рабочих элементов в буровом инструменте.