

Деформированное состояние вертикальных стержней конструкций с учетом собственного веса

Шевченко Ф. Л.

Донецкий национальный технический университет, Донецк, Украина

Поступила в редакцию 10.03.11, принята к печати 18.03.11

Аннотация

На основании дифференциального уравнения Бесселя рассматривается влияние собственного веса вертикальных стержней конструкций на их напряженно-деформированное состояние и устойчивость.

Ключевые слова: вес, стержень, устойчивость.

Собственным весом конструкций небольших размеров практически всегда пренебрегают по сравнению с полезной нагрузкой. Такими конструкциями являются балки, рамы, фермы, арки. В весьма гибких горизонтальных стержнях, т.е. в нитях пренебрегают изгибом и рассчитывают их на продольное усилие, возникающее от собственного веса и полезной нагрузки. В вертикальных стержнях больших длин собственный вес учитывается, но, как правило, не учитывается его влияние на напряженно деформированное состояние. Учет вертикальной нагрузки от постоянного значения продольных усилий не равноценный влиянию постоянной распределенной нагрузки в виде собственного веса, который приводит к линейно переменным продольным усилиями и поэтому замена собственного веса условной усредненной нагрузкой не соответствует действительному напряженно-деформированному состоянию длинных вертикальных стержней. Такой недостаток расчета объясняется сложностью дифференциального уравнения изогнутой оси стержня при действии собственного веса и использованию в расчетах известных функций Бесселя и других аналогичных рядов, зависящих от вида поперечной нагрузки.

Однако, учет собственного веса крайне необходим при расчете на продольно-поперечный изгиб и устойчивость длинных вертикальных стержней, испытывающих растяжение или сжатие. Такой расчет можно найти в учебных пособиях [1–3], суть которого с иллюстрацией на конкретных примерах приводится в настоящей статье.

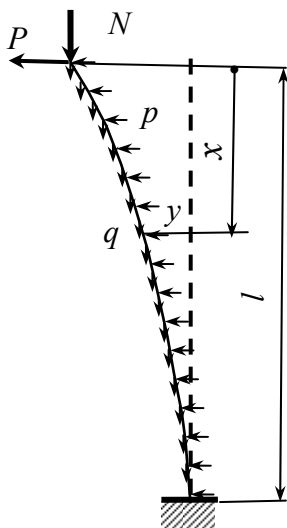


Рис. 1. Расчетная схема стержня

Для составления дифференциального уравнения изогнутой оси вертикального стержня с учетом собственного веса интенсивностью q и произвольной равномерно распределенной нагрузки интенсивностью p и сосредоточенных сил P и N (рис. 1), рассмотрим сумму проекций внешней нагрузки и поперечной силы

$$Q = EJ \frac{d^3 y}{dx^3}$$

на угол $\theta = \frac{dy}{dx}$:

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} + q \left(x + \frac{N}{q} \right) \frac{dy}{dx} = P + px. \quad (1)$$

Заменой текущей координаты x новой безразмерной координатой z

$$z = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{q}{EJ} \left(x + \frac{N}{q}\right)^3}, \quad x = \sqrt[3]{\frac{9 EJ}{4 q}} z^2 \quad (2)$$

с учетом формул дифференцирования функции $y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{3q}{2EJ}} z \cdot y', \quad (3)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{3q}{2EJ}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} z^{-1/3} y' + z^{2/3} y''\right), \quad (4)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{3q}{2EJ} \left(\frac{1}{9z} y' - y'' - z'''\right). \quad (5)$$

дифференциальное уравнение (1) примет вид уравнения Бесселя

$$\frac{d^3 y}{dz^3} + \frac{1}{z} \cdot \frac{d^2 y}{dz^2} + \left(1 - \frac{1}{9z^2}\right) \frac{dy}{dz} = \frac{2}{3qz} R + \frac{p}{q} \sqrt[3]{\frac{2EJ}{3qz}}, \quad (6)$$

где обозначено

$$R = P - \frac{p}{q} N. \quad (7)$$

Так получаем неоднородное уравнение Бесселя

$$9z^2 y''' + 9zy'' + (9z^2 - 1)y' = az + bz^{5/3}. \quad (8)$$

с грузовыми коэффициентами

$$a = \frac{6R}{q}, \quad b = 9 \frac{p}{q} \sqrt[3]{\frac{2 EJ}{3 q}}.$$

Решение уравнения (6), (8) известно в цилиндрических функциях первого рода дробного порядка

$$y'(z) = C_1 J_{1/3}(z) + C_2 J_{-1/3}(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad (9)$$

где используются функции Бесселя порядка $k = \pm \frac{1}{3}$ действительного аргумента z

$$J_{1/3}(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{1/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n! \Gamma(3n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \right], \quad (10)$$

$$J_{-1/3}(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-1/3}}{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n! \Gamma(3n-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \right].$$

Частное решение уравнения (7) представляется в рядах

$$f_1(z) = aC(z) \quad \text{и} \quad f_2(z) = b\Phi(z): \quad (11)$$

$$C(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3z)^{2n}}{\Gamma[9(2n+1)^2 - 1]}. \quad (12)$$

$$\Phi(z) = \frac{z^{5/3}}{24} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 9^{n-1}}{\prod [(6n-1)^2 - 1]} z^{2(n-1)} \right]. \quad (13)$$

Интегрируя (9), получаем уравнение изогнутой оси стержня

$$y(z) = C_1 A(z) + C_2 B(z) + aD(z) + bF(z) + C_3. \quad (14)$$

Здесь введены обозначения интегралов функций Бесселя и частных интегралов правой части дифференциального уравнения:

$$A(z) = \int J_{1/3}(z) dz = \frac{3 \left(\frac{z}{2}\right)^{4/3}}{\prod \left(\frac{1}{3}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(3n+2)n! \prod (3n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad (15)$$

$$B(z) = \int J_{-1/3}(z) dz = \frac{3 \left(\frac{z}{2}\right)^{2/3}}{\prod \left(-\frac{1}{3}\right)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(3n+1)n! \prod (3n-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \right], \quad (16)$$

$$D(z) = \int C(z) dz = \frac{z^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3z)^{2n}}{(n+1) \prod [9(2n+1)^2 - 1]}, \quad (17)$$

$$F(z) = \int \Phi(z) dz = \frac{1}{8} z^{8/3} \left[\frac{1}{8} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 9^{n-1}}{2(3n+1) \prod [(6n-1)^2 - 1]} z^{2(n-1)} \right]. \quad (18)$$

Дифференцируя (9) и используя зависимости

$$\frac{dJ_n}{dz} = -\frac{n}{z} J_n + J_{n-1}, \quad \frac{dJ_n}{dz} = \frac{n}{z} J_n - J_{n+1}, \quad (19)$$

$$E(z) = \frac{dC(z)}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)(3z)^{2n}}{\prod [9(2n+1)^2 - 1]}, \quad (20)$$

$$F(z) = \frac{d\Phi(z)}{dz} = \frac{z^{8/3}}{8} \left[\frac{1}{8} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 9^{n-1}}{2(3n+1) \prod [(6n-1)^2 - 1]} z^{2(n-1)} \right] \quad (21)$$

получаем кривизну

$$y''(z) = -C_1 \frac{1}{3z} J_{1/3}(z) + C_1 J_{-2/3}(z) - C_2 \frac{1}{3z} J_{-1/3}(z) - C_2 J_{2/3}(z) + aE(z) + bF(z). \quad (22)$$

и уравнение изгибающих моментов

$$M(z) = EJ \sqrt{\left(\frac{3qz}{2EJ}\right)^2} \left\{ C_1 J_{-2/3}(z) - C_2 J_{2/3}(z) + \frac{1}{3z} [aC(z) + b\Phi(z)] + aE(z) + bF(z) \right\}. \quad (23)$$

Постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3 вычисляются из граничных условий, т.е. условий закрепления стержня на опорах.

Так, для вертикального консольного стержня в защемлении при $x = l, z_1 = z(l)$ прогиб и угол поворота сечения равны нулю, что в соответствии (9)-(14) приводит к системе уравнений:

$$C_1 J_{1/3}(z_1) + C_2 J_{-1/3}(z_1) = f_1(z_1) + f_2(z_1) = 0, \quad (24)$$

$$C_1 A(z_1) + C_2 B(z_1) + aD(z_1) + bF(z_1) + C_3 = 0. \quad (25)$$

Условие на верхнем торце стержня при $x=0$ и $z_0=0$ (при $N=0$) согласно (23) приводит к зависимости

$$C_1 3z_0^{2/3} J_{-2/3}(z_0) - C_2 3z_0^{2/3} J_{2/3}(z_0) + z_0^{2/3} [aC(z_0) + b\Phi(z_0)] + 3z_0^{2/3} [aE(z_0) + bF(z_0)] = 0, \quad (26)$$

где обозначены грузовые коэффициенты:

$$\alpha(z_0) = aC(z_0) + b\Phi(z_0), \quad \beta(z_0) = \frac{1}{3z_0} [aC(z_0) + b\Phi(z_0)] + [aE(z_0) + bF(z_0)]. \quad (27)$$

Решая совместно (24) и (27) получаем значения постоянных интегрирования:

$$C_1 = -\frac{\alpha(z_0)J_{2/3}(z_0) + \beta(z_0)J_{-1/3}(z_1)}{J_{1/3}(z_1)J_{2/3}(z_0) + J_{-1/3}(z_1)J_{-2/3}(z_0)}, \quad (28)$$

$$C_2 = \frac{\beta(z_0)J_{1/3}(z_1) - \alpha(z_0)J_{-2/3}(z_0)}{J_{1/3}(z_1)J_{2/3}(z_0) + J_{-1/3}(z_1)J_{-2/3}(z_0)}.$$

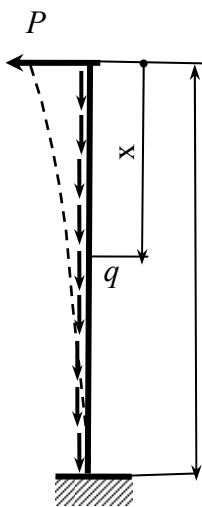


Рис. 2. Расчетная схема консоли, нагруженной сосредоточенной силой

Теперь из (25) легко найти постоянную C_3 и составить расчетные уравнения перемещений и внутренних силовых факторов.

В качестве примера рассмотрим вертикальный стержень, жестко защемленный в нижнем сечении и свободный в верхнем, при загрузении его сосредоточенной силой P , рис. 2.

В этом случае $N = p = 0$, $R = P$, грузовые коэффициенты

$$(8) \quad a = 6P/q, \quad b = 0, \quad \text{коэффициенты постоянных интегрирования} \\ \alpha(z_0) = aC(z_0), \quad \beta(z_1) = \frac{aC(z_1)}{3z_1} + aE(z_1). \quad \text{Так как при } x=0 \quad z_1=0,$$

то функция Бесселя $J_{-2/3}(z_1) = \infty$, (при $k = -\frac{2}{3}$, см. рис. 3)

$$J_{-2/3}(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-1/3}}{\prod\left(-\frac{1}{3}\right)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n! \prod(3n-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \right]$$

Следовательно, согласно (28) $C_1 = 0$, а

$$C_2 = -\frac{\alpha(z_0)J_{-2/3}(z_1)}{J_{-1/3}(z_0)J_{-2/3}(z_1)} = -\frac{6P}{q} \frac{C(z_0)}{J_{-1/3}(z_0)}$$

Зная C_2 находим постоянную C_3

$$C_3 = -C_2 B(z_0) - aD(z_0).$$

Подставляя C_2 , C_3 в (14) получаем уравнению изогнутой оси стержня

$$y(z) = -\frac{6P}{q} \frac{C(z_0)}{J_{-1/3}(z_0)} [B(z) - B(z_0)] + \frac{6P}{q} [D(z) - D(z_0)]. \quad (29)$$

При $x=l$, $z_1=0$, $B(z_1)=D(z_1)=0$, находим максимальный прогиб

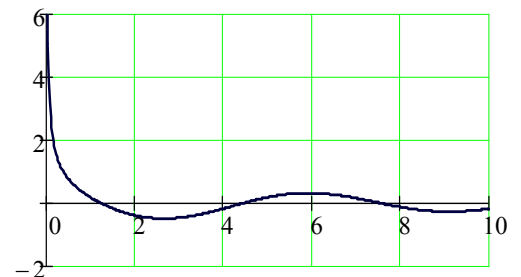


Рис. 3. График функции Бесселя $J_{-2/3}(z)$

$$y_{\max} = \frac{6P}{q} \left[\frac{C(z_0)B(z_0)}{J_{-1/3}(z_0)} - D(z_0) \right]. \quad (30)$$

Без учета собственного веса, при $q = 0$ $y_0 = \frac{Pl^3}{3EJ}$. Но из (2) $EJ = \frac{4ql^3}{9z_0^2}$.

Следовательно, прогиб стержня без учета собственного веса можно представить в виде $y_0 = \frac{3Pz_0^2}{4q}$.

Так легко вычислить коэффициент увеличения прогиба от собственного веса стержня интенсивностью q

$$\frac{y_{\max}}{y_0} = \frac{8}{z_0^2} \left[\frac{C(z_0)B(z_0)}{J_{-1/3}(z_0)} - D(z_0) \right]. \quad (31)$$

В таблице приведены значения прогибов стержня жесткостью $EJ = 6,28 \cdot 10^6$ Нм² различных длин с погонным весом $q = 490$ Н/м, при нагружении его сосредоточенной силой $P = 100$ Н.

Таблица. Значения прогибов вертикального стержня при нагружении его сосредоточенной силой при сжатии и растяжении собственным весом

l, м	10	20	25	30	35	40	45	46	46,48
$y_0(P)$	$5,3 \cdot 10^{-3}$	0,042	0,083	0,143	0,228	0,34	0,484	0,516	∞
$y_{сж}$	$5,358 \cdot 10^{-3}$	0,046	0,098	0,195	0,393	0,923	5,091	16,163	∞
$y_{раст}$	$5,255 \cdot 10^{-3}$	0,039	0,072	0,114	0,161	0,21	0,258	0,267	∞
$y_0(q)$	0,00995	0,159	0,389	0,806	1,493	2,547	4,080	4,455	∞
$y_{сж}$	0,01	0,177	0,481	1,190	2,936	8,369	55,92	184,56	∞

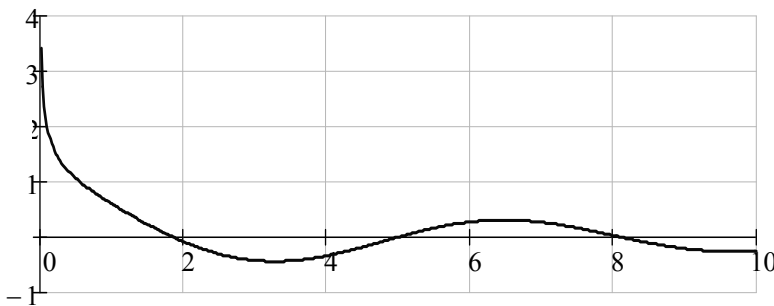


Рис.4. График функции Бесселя $J_{-1/3}(z)$

Из формулы (31) следует, что при $J_{-1/3}(z_0) = 0$ возникают бесконечно большие прогибы, рис.4. Значит, критическую длину стержня можно найти, положив $J_{-1/3}(z_0) = 0$. Первый корень функции $J_{-1/3}$ $z_0 = 1,866$, что соответствует коэффициенту приведения длины стержня

$$\mu = \frac{2\pi}{3z_0} = \frac{2\pi}{3 \cdot 1,866} = 1,122 \text{ и}$$

значению критической длины

$$l_{кр} = \sqrt[3]{\frac{9 EJ}{4 q} z_0^2} = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 6,28 \cdot 10^6}{4 \cdot 490} 1,866^2} = 46,48 \text{ м.}$$

В случае изгиба с растяжением распределенной продольной нагрузкой в третьем слагаемом дифференциального уравнения (6) изменяется знак, что приводит к модифицированному уравнению Бесселя и его решение будет представлено в аналогичных, но модифицированных функциях Бесселя, т.е. функциями (10) – (21) мнимого аргумента zi :

$$I_{1/3}(z) = -iJ_{1/3}(zi) = -i \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{1/3}}{\prod\left(\frac{1}{3}\right)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n! \prod(3n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \right], \quad (32)$$

$$I_{1/3}(z) = -iJ_{1/3}(zi) = -i \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{1/3}}{\prod\left(\frac{1}{3}\right)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n! \prod(3n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \right], \quad (33)$$

$$I_{1/3}(z) = -iJ_{1/3}(zi) = -i \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{1/3}}{\prod\left(\frac{1}{3}\right)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n! \prod(3n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \right], \quad (34)$$

$$B(zi) = -\frac{3\left(\frac{z}{2}\right)^{2/3}}{\prod\left(-\frac{1}{3}\right)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(3n+1)n! \prod(3n-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \right], \quad (35)$$

$$C(zi) = zi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3z)^{2n}}{\prod[9(2n+1)^2 - 1]}, \quad (36)$$

$$D(z) = -\frac{z^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3z)^{2n}}{(n+1)\prod[9(2n+1)^2 - 1]}. \quad (37)$$

Если стержень загружен горизонтальной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью p , то расчетные формулы выводятся аналогичным путем, но с учетом грузового

коэффициента (8) $b = 9 \frac{p}{q} \sqrt{\frac{2 EJ}{3}}$ и коэффициентов (27) в постоянных интегрирования (28):

$\alpha(z_0) = b\Phi(z_0)$, $\beta(z_0) = b \frac{1}{3z_0} \left[\frac{1}{3z_0} \Phi(z_0) + F(z_0) \right]$. Таким путем найдем коэффициент возрастания прогиба

$$\Psi = b \left[\Phi(z_0) \frac{B(z_0)}{J_1(k, z_0)} - F(z_0) \right] \quad (38)$$

по отношению к прогибу невесомого стержня $y(q) = \frac{ql^4}{8EJ}$.

Результаты расчета стержня загруженного сосредоточенной силой с учетом растяжения собственным весом приведены в четвертой строке таблицы, откуда видно, как снижаются прогибы в этом случае.

Расчетные прогибы стержня от распределенной боковой нагрузки интенсивностью $p = 50$ Н/м приведены в последних двух строках таблицы.

Из приведенных примеров расчета вертикальных сжатых или растянутых собственным весом стержней следует существенное влияние собственного веса на прочность, жесткость и устойчивость конструкций. Это влияние следует учитывать при расчетах наземных высотных сооружений башенного типа и подводных конструкций типа транспортных трубопроводов подводных добычных комплексов и земснарядов, бурильных труб

Библиографический список

1. Шевченко Ф.Л. Механика упругих деформируемых систем, часть 1. Напряженно-деформированное состояние стержней: Учебное пособие с грифом МОН. Донецк, 2006, - 293 с.
2. Шевченко Ф.Л. Механика упругих деформируемых систем, часть 2. Сложное напряженное состояние. Учебное пособие с грифом МОН. Донецк, РВВ ДонНТУ, 2007, - 306 с.
3. Шевченко Ф.Л., Царенко С.М. Задачі з опору матеріалів. /Навчальний посібник з грифом Міносвіти України. – Донецьк, ДонНТУ, 2011, 354 с.

© Шевченко Ф. Л., 2011.

Анотація

На підставі диференціального рівняння Бесселя розглядається вплив власної ваги вертикальних стрижнів конструкцій на їх напружений-деформований стан і стійкість.

Ключові слова: вага, стрижень, стійкість.

Abstract

On the basis of the differential equation Bessel examines the impact of its own weight of vertical rods designs on their stress-strain state and stability.

Keywords: weight, rod, stability.