

УДК 681.3

Исследование сходимости мултистартового субградиентного метода оптимизации в пространстве вейвлет преобразования

Г.Ю. Щербакова, В.Н. Крылов

Одесский национальный политехнический университет, г. Одесса
Galina_onpu@mail.ru victor_krylov@inbox.ru

Abstract

Shcherbakova G. Yu., Krylov V. N. Multi-Start Sub Gradient Optimization Method in the Wavelet Transformed Domains Convergence Investigation. Multi-start sub gradient iterated optimization method in the wavelet transformed domain convergence is investigated. The convergence of this method in a mean squared sense and with probability one is proved. This method allows noise stability raising, error, local extreme and initial point search sensitiveness reducing.

Методы оптимизации используются при решении большинства задач науки и техники. При решении задачи оптимизации определяют критерий или функционал качества и метод его оптимизации. Метод оптимизации выбирают в зависимости от особенностей формирования и свойств функционала качества, который может быть явно не известен, может обладать зашумленной, многоэкстремальной поверхностью, поверхностью типа «овраг». Для решения таких задач разработаны итеративные регулярные и субградиентные методы оптимизации. Однако для обоих подходов характерен ряд противоречивых особенностей. Регулярные поисковые методы обладают высокой точностью, но (в связи с особенностями оценки градиента) у них низкая помехоустойчивость, высокая чувствительность к локальным экстремумам и начальной точке поиска. Для субградиентных методов оптимизации характерны высокие погрешность и помехоустойчивость. Для уменьшения влияния помех в субградиентных методах применяют подход, использующий вейвлет преобразование (ВП) [1]. Целевая функция при оптимизации, как правило, пространственно неоднородна, а глобальные и локальные экстремумы представляют собой локализованное явление. Адекватным аппаратом анализа таких функций является ВП [2,3]. Однако разработанный в работе [1] метод имеет высокую погрешность. Для снижения влияния указанных выше недостатков авторами предложен мултистартовый субградиентный итеративный метод оптимизации в пространстве ВП [4,5].

Целью работы является исследование сходимости этого метода оптимизации.

В общем случае критерий оптимальности $J(c) = E\{Q(x, c)\}$ при оптимизации в явной форме не известен, но

известны $Q(x, c)$ - реализации функционала качества. Здесь $c = (c_1, \dots, c_N)$ - вектор переменных, $x = (x_1, \dots, x_N)$ - случайный процесс, E - оператор математического ожидания [6].

Если функционал $Q(x, c)$ разрывен, недифференцируем или зависит от c неявно, тогда градиент реализации функционала качества

$$\nabla_c Q(x, c) = \left(\frac{\partial Q(x, c)}{\partial c_1}, \frac{\partial Q(x, c)}{\partial c_2}, \dots, \frac{\partial Q(x, c)}{\partial c_N} \right)$$

в итеративных регулярных методах оценивается приближенно с помощью разности $\tilde{\nabla}_{c^+} Q(x[n], c[n-1], a[n]) =$

$$\begin{aligned} &= (Q(x[n], c[n-1] + a[n]e_1), \dots, \\ &Q(x[n], c[n-1] + a[n]e_N)) / 2a - \quad (1) \\ &(Q(x[n], c[n-1] - a[n]e_1), \dots, \\ &Q(x[n], c[n-1] - a[n]e_N)) / 2a \end{aligned}$$

Здесь a - скаляр;

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_N = (0, 0, \dots, 1)$$

базисные векторы [6].

Однако такая оценка градиента отличается низкой помехоустойчивостью. Это обуславливает низкую помехоустойчивость регулярных поисковых методов оптимизации. Для повышения помехоустойчивости разработаны субградиентные методы оптимизации с высокими помехоустойчивостью и погрешностью. Для

решения проблем этих методов – дальнейшего повышения помехоустойчивости и снижении погрешности – авторами предложен и исследован мультистартовый субградиентный итеративный метод оптимизации в пространстве ВП [4,5]. Условия сходимости этого метода для одномерного случая определяются в этой работе.

Мультистартовый субградиентный метод оптимизации в пространстве ВП формулируется следующим образом.

Непрерывное вейвлет – преобразование (ВП) многомерной реализации функционала качества $Q(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ по переменной $c_i, i = 1, \dots, N$, определяется по формуле

$$(Q(\mathbf{x}, \mathbf{c}), \psi^{s,b}) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{x}, \mathbf{c}), \psi^{s,b}(c_i) dc_i, \quad (2)$$

$$\text{где } \psi^{s,b}(c_i) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{c_i - b}{s}\right);$$

s – параметр масштаба; b – параметр сдвига [7].

Предполагается, что в (2) вейвлет $\psi(c_i)$ – нечетная функция [2,8]. Обозначим $s[n]$ – масштаб вейвлета на n - итерации поискового метода оптимизации. Полученная при дискретизации последовательность учитывает нечетность функции $\psi(c_i)$

$$\alpha[n] = (-\alpha_{s_\alpha}[n], \dots, -\alpha_1[n], \alpha_1[n], \dots, \alpha_{s_\alpha}[n]) \quad (3)$$

Тогда выражение (2) будет

$$(Q(x, c), \psi^{s,c_i[n]}) = \sum_{m=1}^{s_\alpha} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_-^+} Q(x[n], c[n-1], a[n-m]),$$

где $\tilde{V}_{c_-^+} Q(x[n], c[n-1], a[n-m])$ определяется формулой (1), а параметр сдвига выбран как $b = c_i[n]$, так как вейвлет-преобразование вычисляется в окрестности приближения к точке оптимума на n -й итерации [2].

Мультистартовый поисковый метод оптимизации в пространстве ВП определяется итерационной схемой

$$c[n] = c[n-1] - \gamma[n] \sum_{m=1}^{s_\alpha} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_-^+} Q(\cdot), \quad (4)$$

где $Q(\cdot) = Q(x[n], c[n-1], a[n-m])$.

Здесь $\alpha_m[n], m = 1, \dots, s_\alpha$ – компоненты вектора $\alpha[n]$, полученного в результате дискретизации вейвлет-функции, полученной путем снятия ограничений на вид вейвлет-функции в итерационной схеме алгоритма регулярного итерационного поиска в пространстве ВП [2, 9].

В процедуре реализации мультистартового метода оптимизации используется оценка градиента реализации $\tilde{V}_{c_-^+} Q(\mathbf{x}, \mathbf{c})$, которая зависит от случайного процесса \mathbf{x} , векторы $\mathbf{c}[n]$ также являются случайными. Оценка значения функционала качества $Q(\mathbf{x}(c), c)$ это сумма истинного значения функционала качества $J(c)$ и помехи $x(c)$

$$Q(x(c), c) = J(c) + x(c), \quad (5)$$

где c^* – точка оптимума функционала качества $J(c)$, зависящего от переменной $c \in [A, B]$; A, B – некоторые постоянные. Для доказательства сходимости процедуры знание значений A, B необязательно, однако показано, что если значение A известно хотя бы приближенно, процесс поиска оптимума может быть ускорен [10].

Оценка значения функционала качества $Q(x, c)$ вычисленная по результатам измерения c помехами для любого $c \in [A, B]$ должна быть несмещенной и эффективной [10]. Условие несмещенности формулируется как

$$J(c) = E\{Q(x, c)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x, c) p(x) dx, \quad (6)$$

где $p(x)$ – плотность распределения случайного процесса x .

Выполнение этого условия дает возможность (при достаточно большом количестве наблюдений) определить, по какую сторону от точки оптимума c^* по направлению поиска расположено c [10].

Условие эффективности, то есть условие ограниченности дисперсии оценки формулируется как

$$\sigma^2(c) = E\{(Q(x, c) - J(c))^2\} < \sigma^2 < \infty \quad (7)$$

Во всех точках, где это условие нарушается, независимо от числа наблюдений невозможно установить направление дальнейшего поиска [10].

Для доказательства сходимости мультистартового субградиентного поискового итеративного метода оптимизации в пространстве ВП применялась известная методика [10, 11], согласно которой любая процедура стохастической аппроксимации рассматривается как свободный от ошибок метод последовательных приближений, но с наложенной на него случайной составляющей. В соответствии с этой методикой в схеме (4) выделяют случайную составляющую и анализируют независимо от регулярной составляющей.

Тогда с учетом (5) итерационная схема (4) принимает вид

$$\begin{aligned} c[n] &= c[n-1] - \gamma[n] \sum_{m=1}^{s_\alpha} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_-^+}(\cdot) = \\ &= (c[n-1] - \gamma[n] \times \\ &\times \sum_{m=1}^{s_\alpha} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_-^+}(J(c[n-1], a[n-m]))) - \\ &- \gamma[n] \sum_{m=1}^{s_\alpha} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_-^+}(x(c[n-1], a[n-m])), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{c_-^+}(\cdot) &= \tilde{V}_{c_-^+}(J(c[n-1], a[n-m]) + \\ &+ x(c[n-1], a[n-m])), \\ \tilde{V}_{c_-^+} x(c[n-1], a) &= \\ &= x(c[n-1] + ae_1, \dots, c[n-1] + ae_N) - \\ &- x(c[n-1] - ae_1, \dots, c[n-1] - ae_N). \end{aligned}$$

Обозначим свободное от ошибок (помех) преобразование как $T(c[n-1])$.

Тогда

$$\begin{aligned} T(c[n-1]) &= c[n-1] - \gamma[n] \times \\ &\times \sum_{m=1}^{s_\alpha} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_-^+}(J(c[n-1], a[n-m])), \end{aligned}$$

а случайную составляющую

$$- \gamma[n] \sum_{m=1}^{s_\alpha} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_-^+}(x(c[n-1], a[n-m]))$$

обозначим $r[n]$. Тогда итерационная схема (4) примет вид

$$c[n] = T(c[n-1]) + r[n-1].$$

Для сходимости метода оптимизации в среднеквадратическом смысле и с вероятностью «единица» достаточно выполнения двух условий [10,11]: оценка случайной составляющей должна быть несмещенной, то есть ее математическое ожидание $E\{r[n]\}$ должно быть равно нулю; сумма дисперсий помех должна быть конечной при любой возможной бесконечной процедуре поиска:

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\{r^2[n]\} < \infty. \quad (8)$$

Из соотношения (6) с учетом, что наблюдения будут несмещенными, только если математическое ожидание оценки равно оцениваемому параметру, следует

$$\begin{aligned} E\{r[n]\} &= E\{-\gamma[n] \times \\ &\times \sum_{m=1}^{s_\alpha} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_-^+}(x(c[n-1], a[n-m]))\} = \\ &= -\gamma[n] \times \\ &\times E\left\{ \sum_{m=1}^{s_\alpha} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_-^+} Q(\cdot) - J(\cdot) \right\} = \\ &= -\gamma[n] \sum_{m=1}^{s_\alpha} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_-^+} (E\{Q(\cdot)\} - J(\cdot)) = 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{c_-^+} Q(\cdot) &= \\ &= \tilde{V}_{c_-^+} Q(x(c[n-1], a[n-m]), c[n-1], a[n-m]), \\ J(\cdot) &= J(c[n-1], a[n-m]). \end{aligned}$$

Тогда оценка случайной составляющей удовлетворяет условию несмещенности.

Для доказательства сходимости ряда (8), сумма дисперсий помех представляется [2]

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} E\{r^2[n]\} &= \sum_{n=1}^{\infty} E\{\cdot\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^2[n] E\left\{ \left(\sum_{m=1}^{s_\alpha} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_-^+}(\cdot) \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\tilde{V}_{c_-^+}(\cdot) = \tilde{V}_{c_-^+}(x(c[n-1], a[n-m])),$$

$$E\{\cdot\} = E\left\{\left(-\gamma[n] \sum_{m=1}^{s_a} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_{\pm}}(\cdot)\right)^2\right\}.$$

После применения неравенства Коши-Буняковского [2] с учетом (7)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} E\{r^2[n]\} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^2[n] E\{\cdot\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^2[n] \times 2 \sum_{m=1}^{s_a} \alpha_m^2[n] \times \sum_{\substack{m=-s_a \\ m \neq 0}}^{s_a} E\{x^2(\cdot)\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$x^2(\cdot) = x^2(c[n-1], \text{sgn}(m)a[n-|m|]),$$

$$E\{\cdot\} = E\left\{\sum_{\substack{m=-s_a \\ m \neq 0}}^{s_a} \alpha_{|m|}^2[n] \sum_{\substack{m=-s_a \\ m \neq 0}}^{s_a} x^2(\cdot)\right\}.$$

Математическое ожидание величины квадрата ошибки на n -й итерации представляет собой дисперсию ошибки $\sigma^2(c)$ в соотношении (6.1), где было обусловлено, что $\sigma^2(c) < \sigma^2 < \infty$, то есть дисперсия помехи ограничена на интервале определения c . Тогда [2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\{r^2[n]\} < \infty, \text{ и}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\{\cdot\} < \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^2[n] \times 2 \sum_{m=1}^{s_a} \alpha_m^2[n] \times 2s_a \sigma^2$$

если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma^2[n] \times 2 \sum_{m=1}^{s_a} \alpha_m^2[n] = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^2[n] \|\alpha[n]\|^2 < \infty.$$

Здесь

$$E\{\cdot\} = E\{r^2[n]\}.$$

То есть сумма дисперсий конечна при любой бесконечной процедуре поиска (второе условие сходимости метода оптимизации в схеме Дворецкого [11] доказано).

При анализе сходимости регулярной составляющей учитывают две возможности:

- точка $c[n]$ удалена от точки оптимума c^* на расстояние большее, чем

$$\gamma[n] \left| \sum_{m=1}^{s_a} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_{\pm}}(J(c[n-1], a[n-m])) \right| \text{ и}$$

нет опасности перехода за нее;

- значение $c[n]$ приблизилось к значению c^* настолько, что при следующей итерации точка $c[n+1]$ перейдет через точку оптимума по направлению поиска на расстояние $|c[n+1] - c^*| > |c[n] - c^*|$ [2,10].

Рассмотрим первую возможность. Обозначим через $v[n]$ - абсолютную величину расстояния, на которое $c[n]$ приблизится к c^* на n -й итерации. Для сходимости процесса поиска в этом случае надо, чтобы итерационная схема (4) удовлетворяла условию

$$\begin{aligned} |c[n] - c^*| &= \\ &= |T(c[n-1]) - c^*| \leq |c[n-1] - c^*| - \quad (9) \\ &- v[n] \end{aligned}$$

При этом требуют, чтобы сумма $\sum_{n=1}^{\infty} v[n]$ была неограниченной (ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v[n]$ расходился), но $\lim_{n \rightarrow \infty} v[n] = 0$; однако $v[n] = 0$ нежелательно, ибо процесс поиска может остановиться, не дойдя до цели [10]. При необходимости, когда $c[n]$ стремится к точке, отличной от c^* , суммарное корректирующее воздействие может быть большим [10].

Для доказательства (9) вводятся две последовательности положительных чисел $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$ [10],

причем если $|c[n] - c^*| > \epsilon_n$, то ρ_n - инфимум множества величин [2,10]

$$\left| \sum_{m=1}^{s_a} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_{\pm}}(J(c[n-1], a[n-m])) \right|,$$

то есть

$$\left| \sum_{m=1}^{s_\alpha} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_-^+} (J(c[n-1], a[n-m])) \right| > \rho_n.$$

Тогда, если $c[n]$ отстоит сравнительно далеко от c^* , то абсолютная величина расстояния, на которое $c[n]$ приблизилось к c^* , будет не меньше $\gamma[n]\rho_n$.

Так как сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma[n]$ предполагается бесконечной (ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma[n]$ расходится), ρ_n выбирается таким образом, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma[n]\rho_n$ расходился. Так как $c[n]$ удалено

от c^* и нет опасности перехода за точку оптимума, то

$$\left| c[n] - c^* \right| > \gamma[n] \times \left| \sum_{m=1}^{s_\alpha} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_-^+} (J(c[n-1], a[n-m])) \right|.$$

Тогда для доказательства справедливости условия (9) оценивается выражение

$$\begin{aligned} \left| T(c[n]) - c^* \right| &= \\ &= \left| c[n] - \gamma[n] \sum_{m=1}^{s_\alpha} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_-^+} (J(\cdot)) - c^* \right| = \\ &= \left| c[n] - c^* \right| - \\ &- \gamma[n] \left| \sum_{m=1}^{s_\alpha} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_-^+} (J(\cdot)) \right| < \left| c[n] - c^* \right| - \\ &- \gamma[n]\rho_n. \end{aligned}$$

Здесь

$$v[n] = \gamma[n]\rho_n, \quad J(\cdot) = J(c[n-1], a[n-m]).$$

При рассмотрении второй возможности ($c[n]$ близко к оптимальному значению c^*) учитывают, что следующая коррекция может привести к переходу за точку оптимума или даже увеличить расстояние до него [10]. Максимум расстояния до точки оптимума на n -й итерации обозначается через Δ_n [2]. Для сходимости процесса поиска при

достаточно больших n должны выполняться условия [2,10]

$$\left| T(c[n-1]) - c^* \right| \leq \Delta_n \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0 \quad (10)$$

При доказательстве учитывается, что переход за точку оптимума возникает, если коррекция превосходит по абсолютной величине расстояние $|c[n] - c^*|$, то

$$\text{есть} \left| \gamma[n] \sum_{m=1}^{s_\alpha} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_-^+} (J(\cdot)) \right| > |c[n] - c^*|,$$

где $J(\cdot) = J(c[n-1], a[n-m])$.

Предполагается, что

$$\left| \sum_{m=1}^{s_\alpha} \alpha_m[n] \tilde{V}_{c_-^+} (J(\cdot)) \right| < A |c[n] - c^*| + B < \infty, \quad (11)$$

где A, B - константы (5).

Назначение этого предположения – исключить при возрастании номера итераций n колебания точек $c[n]$ вокруг точки оптимума c^* при поиске. Тогда

$$\left| T(c[n-1]) - c^* \right| < (\gamma[n]A - 1) |c[n] - c^*| + \gamma[n]B.$$

Далее, повторяя известные выкладки [2,10], можно сделать заключение о том, что при достаточно больших значениях n итерационная схема (4) удовлетворяет условиям (10). Таким образом, если справедливо (11), а также

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma^2[n] \|\alpha[n]\|^2 < \infty, \quad \text{и} \quad \text{ряд} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma[n] \text{ расходится, то итерационная схема (4)}$$

мультистартового субградиентного поискового метода оптимизации в пространстве ВП удовлетворяет условиям сходимости в среднеквадратическом смысле и с вероятностью «единица» к точке оптимума c^* .

Мультистартовый субградиентный метод оптимизации в пространстве ВП с параметрами: масштаб ВП; начальное

приближение к точке оптимума; пороговые значения для критерия останова и максимального числа итераций заключается в следующем [6].

Инициализируются параметры метода.

Вычисляется ВП в начальной точке и значение шага $\gamma[n]$. На первом этапе для оценки субградиента используется взвешенная сумма значений минимизируемой функции с вейвлет-функцией Хаара в окрестности, определяемой длиной ее носителя N . Такой поиск позволяет достичь окрестности глобального экстремума с погрешностью, определяемой асимметрией целевой функции. Для снижения погрешности на втором этапе оптимизации для оценки субградиента используется взвешенная сумма с гиперболической вейвлет функцией $\Psi(i) = \frac{1}{\alpha x}$, регуляризованной по лифтинговой схеме [12]. В качестве начальной точки используется результат предыдущего этапа. Вычисляют гиперболическую функцию $\Psi(i)$ для $i = \overline{1, N}$, и минимизируемая функция $J[x]$ взвешивается с функцией $\Psi(i)$

$$\text{HWT}(x) = J[x] * \Psi(i), \quad (12)$$

где * – операция взвешенного суммирования.

Если найденная на этом этапе координата минимума отличается от результата предыдущего этапа не более чем на δ (заданное значение точности поиска координат оптимума), процесс поиска оптимума заканчивается. Если координата минимума отличается от результата предыдущего этапа более чем на δ , масштаб α увеличивается на 1, пока не выполнится условие окончания поиска оптимума. При таком поиске последовательно переходят от оптимизации с помощью вейвлета Хаара, способного обеспечить высокую помехоустойчивость, к оптимизации с помощью дифференциатора, способного дать максимальную точность (так как при $\alpha \rightarrow \infty$ взвешивающая функция $\frac{1}{\alpha x}$ стремится к дифференциатору).

Разработанный метод оптимизации был проверен экспериментально [5].

Оценка увеличения скорости сходимости относительно метода градиентного спуска проводилась с помощью функционала качества в виде «оврага Розенброка». Разработанный метод позволил достичь оптимума в 1,7 раза быстрее (по количеству итераций) по сравнению с методом градиентного спуска.

Оценка пониженной чувствительности разработанного метода оптимизации к локальным экстремумам и стартовой точке поиска проводилась с помощью функции Швифеля. Точка старта выбиралась случайным образом. Метод градиентного спуска отыскивал ближайший к стартовой точке минимум. Разработанный метод оптимизации обеспечивает вероятность обнаружения глобального минимума 0,8.

Оценка помехоустойчивости метода проводилась в два этапа с использованием функционала в виде функции Де Йонга $f(x) = x^2$. На первом этапе принималось $x \in (-5,12; 5,12)$, глобальный минимум $f(x) = 0$, $x = 0$. При отношении сигнал/шум по амплитуде до 1,05 (помеха распределена по нормальному закону с нулевым средним и среднеквадратическим отклонением от 0 до 40000, максимальное значение тестируемой функции $f(x) = 42000$) метод позволяет выйти в область глобального минимума.

Метод опробован при классификации реперных знаков в системе автоматизированного позиционирования фотошаблонов (ФШ) интегральных микросхем (ИС) [1, 5, 7, 10, 13].

Выводы

Исследована сходимость мультистартового субградиентного метода оптимизации в пространстве вейвлет преобразования, позволяющего повысить помехоустойчивость и точность при низкой чувствительности к локальным экстремумам.

Литература

1. Крылов В.Н., Щербакова Г.Ю., Козина Ю.Ю., Волошин В.В. Помехоустойчивая классификация реперных знаков в пространстве гиперболического вейвлет-преобразования // Міжнародна наукова конференція «Інтелектуальні системи прийняття рішень та прикладні аспекти інформаційних технологій ISDMIT'2007». — Том 3. — Євпаторія. — 2007. — С.153 — 155.
2. Полякова М.В. Исследование субградиентного поискового метода адаптации в пространстве вейвлет-преобразования // Тр. Одес. политехн. ун-та. — Одесса, 2007. — Вып. 1(27). — С. 207 — 213.

3. Полякова М.В., Крылов В.Н. Характеристика локальной регулярности функций с помощью обобщенных вейвлет-функций // Тр. Одес. политехн. ун-та. — Одесса, 2005.— Вып. 2(24). — С. 192 — 198.
4. Щербакова Г.Ю., Крылов В.Н. Мультистартовый субградиентный метод обучения нейронных сетей в пространстве вейвлет-преобразования // Сборник научных трудов Донецкого национального технического университета серии «Информатика, кибернетика и вычислительная техника» — Донецк, 2009. — Вып. 10 (153) — С. 202-206.
5. Крылов В.Н., Щербакова Г.Ю. Субградієнтний ітеративний метод оптимізації в просторі вейвлет-перетворення // Збірник наукових праць Військового інституту Київського національного університету ім. Т. Шевченка. К.: ВІКНУ — 2008. — Вип. № 12. — С.56 — 60.
6. Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. — М.: Наука, 1968. — 398 с.
7. Krylov V., Antoshchuk S., Shcherbakova G. The integrated circuits photomasks images alignment for automated optical inspection system // DAAAM International Scientific Book 2007. — P.287—294.
8. Антошук С.Г., Николенко А.А., Ткаченко Е.В. Анализ базисных функций вейвлет-преобразования при многомасштабном контурном представлении изображений // Електромашинобудування та Електрообладнання. К.: Техніка — 2009. — Вип. 72. — С.15 — 19.
9. Антошук С.Г. Теоретичні та реалізаційні основи створення адаптивно-критеріальних систем побудови інформаційних технологій обробки візуальної інформації в АСУ: Автореф. дис. д-ра техн. наук: 05.13.06 / Одес. нац. політехн. ун-т. — Одеса, 2005. — 32 с.
10. Уайлд Д.Д. Методы поиска экстремума. Пер. с англ. А.Н. Кабалева, Е.П. Маслова, В.Д. Спиридонова. Под ред. А.А. Фельдбаума. М.: Наука., 1967. — 267 с.
11. Dvoretzky A. On stochastic approximation // Proc. 3rd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability / J. Neyman (ed.) — Berkeley: University of California Press, 1956. — V.1. — P. 39 — 55.
12. Krylov V.N., Polyakova M.V. Contour images segmentation in space of wavelet transform with the use of lifting // Optical-electronic informatively-power technologies. — 2007. — №2 (12). — P.48 — 58.
13. Крылов В.Н., Щербакова Г.Ю., Козина Ю.Ю., Волошин В.В. Помехоустойчивая классификация реперных знаков в пространстве гиперболического вейвлет-преобразования // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник праць. — Вип. 6 (52). — Дніпропетровськ, 2007. — С. 125 — 130.

Поступила в редакцію 28.12.2009