

УДК 004.67

Оценка параметров многоразрядных чисел с плавающей точкой для выполнения операций высокой точности

Бабков В.С., Пехотин Е.В.
Донецкий национальный технический университет
victor.babkov@gmail.com

Abstract

Babkov V., Pehotin E. Estimation of parameters of multidigit floating point numbers for implementation high precision calculations. In work approach to the estimation of parameters for multidigit numbers in a format with a floating point is offered. A job performance is the system of linked criteria for the selection of effective presentation of multidigit number at implementation of calculations of high precision.

Введение

Выполнение вычислений с высокой точностью – задача, которая возникает в инженерных и научных расчетах в различных областях [1]: моделирование в физике, химии, астрономии и т.д. На практике наиболее часто возникающей проблемой является выбор между диапазоном представления величин и точностью вычислений (т.е. потерей точности и накоплением ошибок при выполнении вычислительных операций).

Общепринятым стандартом для представления чисел в формате с плавающей точкой и выполнения операций над ними является стандарт IEEE754 [2].

За последние два-три десятка лет в литературе неоднократно поднималась проблема достоверности компьютерных вычислений [3-6]. Несмотря на существование стандарта, есть исследования [7-9], которые показывают, что использование современных подходов к представлению в компьютере действительных чисел приводит к:

- нерациональному расходованию вычислительных ресурсов;
- малой достоверности результатов сложных математических расчетов, особенно с накоплением ошибки;
- плохим соответствием модели представления действительных чисел реальным потребностям различных отраслей знаний.

Особенно серьезными данные проблемы становятся тогда, когда вычисления – это составляющая процесса моделирования сложных, дорогостоящих и опасных объектов в области энергетики, космических исследований, и т.д. В этом случае недостоверность результата вычислений может приводить к аварийным ситуациям, техногенным катастрофам и т.п. Как

упоминается в [10], «математическая модель будет адекватной и работоспособной лишь в том случае, если погрешности вычислений контролируются».

В связи с вышесказанным, тема работы, посвященная отысканию путей для определения эффективно представляющих форматов действительных чисел, является актуальной.

Особенности чисел с плавающей точкой

Рисунок 1 демонстрирует общее представление чисел с плавающей точкой.

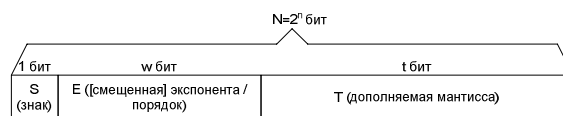


Рисунок 1 – Общий вид числа с плавающей точкой

Обычно разрядность ячейки данных $n = 2^L$, при этом L – кол-во удвоенный единичного объема, а также кол-во комбинаций L элементов, имеющих 2 состояния (3:8, 4:16, 5:32, 6:64, 7:128). Также $1+w+t = N$.

Для обычной экспоненты значения порядка лежат в диапазоне: $D[E] = [-2^{w-1}; 2^{w-1}-1]$

Обычно используется смещенная экспонента. Пусть:

P_{min}, P_{max} – минимальное и максимальное значения порядка;

w – размерность порядка (кол-во бит под порядок);

$bias$ – прибавляемое смещение.

На рис. 2 показан переход от порядка к характеристике.

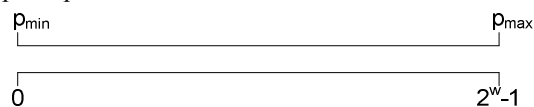


Рисунок 2 – Схема преобразования порядка

Из рисунка 2 можно сделать следующие выводы.

Знаковый диапазон порядка превратился в правильный беззнаковый, т.е. отрицательные числа в обоих случаях меньше положительных, либо $a, b \in D[E] \ \& \ a \leq b \in Proj[a] \leq Proj[b]$ ($Proj$ – операция проецирования на новый диапазон);

Можно использовать и другие диапазоны порядков, т.к. благодаря смещению все они все равно будут переведены в положительную полуплоскость и, соответственно, представлены на беззнаковом аппарате АЛУ процессора, достаточно лишь, чтобы выполнялось условие $p_{max} - p_{min} = 2^w - 1$ (или $p_{max} - p_{min} + 1 = 2^w$).

Для получения смещения необходимо составить и решить систему уравнений аффинного преобразования одномерного пространства. Т.к. нам известны 2 точки и оба интервала равномерны (что означает, что имеется равенство модулей разностей любых двух соседних элементов любых двух подинтервалов данного интервала: $a, b \in D[X] \ \& \ i, j: |k_{i+1} - k_i| = |s_{j+1} - s_j|$, где X – интервал, либо $a, b \in D[X] \ \& \ i, j: |k_{i+1} - k_i| = |k_{j+1} - k_j|$), то преобразование будет выполняться с помощью прямой вида

$$x_2 = b_0 + b_1 * x_1$$

$$\begin{cases} x_2 = b_0 + b_1 * x_1 \\ x_2(p_{min}) = 0 \\ x_2(p_{max}) = 2^w - 1 \\ p_{max} - p_{min} = 2^w - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 + b_1 * p_{min} = 0 \\ b_0 + b_1 * p_{max} = p_{max} - p_{min} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b_0 = -b_1 * p_{min} \\ b_1(p_{max} - p_{min}) = p_{max} - p_{min} \end{cases} \Rightarrow \\ b_1 = 1 \Rightarrow b_0 = -p_{min} = 2^w - p_{max} - 1 \Rightarrow$$

$$x_2 = x_1 + bias, \quad bias = -p_{min} = 2^w - p_{max} - 1$$

Итак, смещение $bias = -p_{min}$. Например, для смещения обычной экспоненты необходимо смещение $bias = -(-2^{w-1}) = 2^{w-1}$. Следует отметить, что при $x_1 = 0: x_2 = x_1 + bias = 0 + bias = bias$.

Назовем **характеристикой** величину $q = p + bias$. Будем представлять значение экспоненты числа с плавающей точкой с помощью характеристики.

Рассмотрим один из возможных интервалов значений экспоненты: $D[E] = [1 - 2^{w-1}; 2^{w-1}]$

Он является зеркализацией обычного интервала, т.е. $p_{min} = -p_{max}^g, p_{max} = -p_{min}^g$. Дело в том, что эти интервалы идентичны на промежутке $[1 - 2^{w-1}; 2^{w-1} - 1]$ и отличаются только восприятием числа 2^{w-1} . Это число, у которого в $w-1$ (самом старшем) бите стоит 1, а в остальных – 0. По правилам знаковых чисел, это число

отрицательное и его абсолютное значение равно $2^w - 2^{w-1} = 2^{w-1}$, т.е. представление абсолютного значения числа совпадает с самим числом. Поэтому можно сказать, что это число является своим абсолютным значением и записать его в положительный полуинтервал. В тоже время, благодаря использованию смещенной мантиисы это число становится беззнаковым $2^w - 1$, что позволяет избежать нарушения правил перевода чисел из дополнительного кода в обычный (т.е. получения абсолютных значений знаковых чисел). Благодаря такому подходу удваивается диапазон представления целых чисел;

Применение смещения не изменяет свойств интервала.

Доказательство: пускай $a, b \in D[E]$ имеется операция $P(a, b)$. Тогда, если утверждение S применимо к $P(a, b)$, то оно применимо и к $P(a', b')$. Т.к. a, b – любые, то мы можем задать $a' = bias + a, b' = bias + b$.

Следует отметить, что в стандарте на кодирование чисел с плавающей точкой IEEE-754 [2] используют именно смещенную экспоненту на интервале $[1 - 2^{w-1}; 2^{w-1}]$.

Мантииса может быть представлена в нормализованном виде $1.0 + \epsilon$, где $\epsilon < 1$.

Постулат 1. Любое целое число можно представить в виде числа с плавающей точкой в данном формате при условии, что разность между номерами самого старшего и самого младшего единичных битов будет меньше размера мантиисы, а номер самого старшего единичного разряда числа не превосходит p_{max} .

Доказательство. Пусть $L[M]$ – размер используемой мантиисы (а через M будем обозначать любую допустимую мантиису, т.е. любую двоичную комбинацию размером $L[M]$). Необходимо представить число X в двоичном виде. У любого двоичного числа (кроме 0) будет хотя бы одна значащая 1 в представлении.

Для 0: значение мантиисы возьмем 0.0, значение порядка может быть любое (в том числе и 0).

Для чисел, отличных от 0: найдем номер разряда самой старшей значащей 1, обозначив его через z . По условию $z \leq p_{max}$, поэтому может быть допустимым для данного формата порядком представляемого числа. Разделим число на 2^z , или, что то же самое: сдвинем значение представление числа вправо через двоичную точку на z разрядов. Мы получим $m = X / 2^z$, у

которой целая часть будет равна 1 – старшему единичному биту X , а дробная – остальным битам X . Дополнив m справа нулями до $L[M]$ (по условию их количество не превзойдет длины мантиисы, т.к. один единичный бит будет у нас всегда, то количество дополняющих нулей будет лежать в интервале $[0, L[M] - 1]$), получим M – мантиису числа. Итак,

$$X = \frac{X}{2^z} 2^z = M * 2^p$$

где

$$M = \frac{X}{2^z} - \text{мантисса представляемого}$$

числа,

$p = z - \text{порядок представляемого числа. } \odot$

Следствие 1. Любое отличное от 0 представимое целое число может быть представлено в виде $1.0 + \varepsilon$, где $\varepsilon < 1$.

Т.к. любое число можно представить в формате с плавающей точкой, причем мантисса такого числа может быть выражена в виде $1.0 + \varepsilon$, то мы можем сэкономить 1 разряд, подразумевая 1.0 и не отображая его в представлении числа. Таким образом, размер мантиссы увеличится на 1 разряд, что приведет к увеличению точности на 1 разряд.

При этом появляется проблема – как представить бесконечности, 0 и ненормализованные числа (которые в данном FP-формате нельзя представить в виде $1.0 + \varepsilon$, а только $0.0 + \varepsilon$ из-за ограничений хранения порядка). Можно пойти 2 путями:

- хранить полную мантиссу;
- использовать 2 граничных значения порядка, как специальные, и кодировать с помощью них особые случаи.

Теперь необходимо описать форматы $0.0 + \varepsilon$ и $1.0 + \varepsilon$ для дальнейшей работы с ними.

Формат $1.0 + \varepsilon$, называемый нормализованным, определяет представление числа a в виде $a = (1.0 + \varepsilon_a) \cdot 2^{p_a}$, при этом $p_a \in [p_{\min}, p_{\max}]$ – целое, $0 \leq \varepsilon < 1$, при этом ε является мантиссой числа, а 1.0 подразумевается. Постулат 1 определяет числа, представимые в данном формате.

Формат $0.0 + \varepsilon$, называемый полным или свободным, определяет представление числа a в виде $a = (0.0 + \varepsilon_a) \cdot 2^{p_a}$, при этом $p_a \in [p_{\min}, p_{\max}]$ – целое. Для наложения ограничения на ε необходимо определить значение двоичной точки. Например, мы можем представить число 12.5 (десятичная с/с) в таких видах:

$$\begin{cases} 1250.0 \cdot 10^{-2} \\ 125.0 \cdot 10^{-1} \end{cases} \begin{cases} 12.5 \cdot 10^0 \\ 1.25 \cdot 10^1 \end{cases} \begin{cases} 0.125 \cdot 10^2 \\ 0.0125 \cdot 10^3 \end{cases}$$

Однако, при использовании левых форм у нас в мантиссе будут излишние данные – лидирующие нули, при этом из-за них мы будем терять в точности (т.к. лидирующие нули будут требовать места в мантиссе). Поэтому левое представление не подходит для использования в качестве представляющего.

При использовании правого представления мы в числах порядка p_{\min} будем терять значимые биты точности (т.к. $1250.0 \cdot 10^{p_{\min}} = 1.25 \cdot 10^3 \cdot 10^{p_{\min}} = 1.25 \cdot 10^{p_{\min}+3}$, т.е. вид

числа $1.xx \cdot 10^{yy}$ дает возможность при той же длине порядка представить несколько дополнительных порядков малых чисел).

К верхнему среднему мы можем применить те же рассуждения, тогда остается только представление в виде $1.xx \cdot 10^{yy}$. Эти же рассуждения справедливы и для двоичной с/с с той поправкой, что вид числа становится $1.xxxx \cdot 2^{yy}$, т.е. в формате $1.0 + \varepsilon$.

Итак, будем располагать двоичную точку между старшим и предыдущим разрядом мантиссы, т.е. между 2^{t-1} и 2^{t-2} разрядами (отсчет по рисунку 1 с 0 справа налево).

Теперь имеется некоторое различие между полным и свободным форматом $0.0 + \varepsilon$. Для полного формата обязательно наличие лидирующей единицы в первом разряде, т.е. мантисса числа $\varepsilon = 1.0 + \varepsilon^*$, $0 \leq \varepsilon^* < 1$ – это формат $1.0 + \varepsilon$, но только с явно присутствующей в мантиссе лидирующей единицей. У свободного формата условие такого типа отсутствует.

Эффективно-представляющий формат для чисел с плавающей точкой

Теперь можно ввести понятие **эффективно-представляющего формата** – при данных значениях длин порядка $w = w_0$ и мантиссы $t = t_0$ (соответственно, общий размер числа $N = N_0 = 1 + t_0 + w_0$) формат является эффективно-представляющим, если он эффективно использует все w_0 битов порядка и t_0 битов мантиссы, т.е. имеет такое свойство: количество представимых форматом **различных** чисел равно общему числу двоичных чисел разрядностью N_0 (булеану от N_0).

У эффективно-представляющих форматов имеется исходящее из их определения преимущество перед другими: они представляют максимальное количество различных чисел, которые можно представить имеющейся разрядностью.

Лемма 1. Все числа, представимые в формате $1.0 + \varepsilon$, является различными или любое число, представимое в формате $1.0 + \varepsilon$, представимо в нем единственным образом.

Доказательство. Т.к. число a представимо в формате $1.0 + \varepsilon$, то его можно представить в виде $a = (1.0 + \varepsilon_a) \cdot 2^{p_a}$, причем $0 \leq \varepsilon_a < 1.0$, p_a – целое (по определению формата).

Данное разложение является единственным, и его единственность вытекает именно из данного ограничения:

$$0 \leq \varepsilon_a < 1.0 \odot$$

$$1 \leq 1.0 + \varepsilon_a < 2 \odot$$

$$2^{p_a} \leq (1.0 + \varepsilon_a) * 2^{p_a} < 2 * 2^{p_a} = 2^{p_a+1} \odot$$

$$\begin{aligned} 2^{p_a} &\leq a < 2^{p_a+1} \textcircled{*} \\ p_a &\leq \log_2 a < p_a + 1 \textcircled{*} \\ 0 &\leq \log_2 a - p_a < 1 \textcircled{*} \end{aligned}$$

пусть

$$\begin{aligned} \log_2 a &= p_a + \gamma \textcircled{*} \\ 0 &\leq p_a + \gamma - p_a < 1 \textcircled{*} \\ 0 &\leq \gamma < 1 \textcircled{*} \lfloor \gamma \rfloor = 0. \end{aligned}$$

Но т.к. p_a – целое (по определению формата), то $\lfloor p_a \rfloor = p_a$ (по определению операции) и

$$\begin{aligned} \lfloor p_a + \gamma \rfloor &= \lfloor p_a \rfloor + \lfloor \gamma \rfloor + \lfloor (p_a - \lfloor p_a \rfloor) + (\gamma - \lfloor \gamma \rfloor) \rfloor = \\ &= p_a + 0 + \lfloor (p_a - p_a) + (\gamma - 0) \rfloor = \\ &= p_a + \lfloor 0 + \gamma \rfloor = p_a, \end{aligned}$$

с другой стороны $\lfloor p_a + \gamma \rfloor = \lfloor \log_2 a \rfloor$, откуда $p_a = \lfloor \log_2 a \rfloor$ и т.к. a – единственно, то и p_a – единственно (причем эта единственность – односторонняя, т.к. $\textcircled{*} p_a^* : p_a^* = \lfloor \log_2 a \rfloor \& p_a^* \neq p_a$, но при этом $\exists a^* : \lfloor \log_2 a \rfloor = \lfloor \log_2 a^* \rfloor$ и $|a - a^*| < 1$).

Значит, мы можем по a единственным образом определить p_a . Однако по p_a мы не можем единственным образом определить a , но можем определить множество A : $A(p_a) = \{a_i | p_a \leq \log_2 a_i < p_a + 1\}$.

Пусть для данного множества $\log_2 a_i = p_a + \gamma_{a_i}$. Т.к. p_a однозначным образом определяется по a_i ($p_a = \lfloor \log_2 a_i \rfloor$), то и $\gamma_{a_i} = \log_2 a_i - p_a = \log_2 a_i - \lfloor \log_2 a_i \rfloor$ однозначным образом определяется по a_i , а значит, и единственно для данного a_i .

Следовательно, для любого a можно однозначно определить p_a и γ_a .

Но т.к. $\lfloor \log_2 a \rfloor = \log_2 a - \gamma_a$, то

$$\frac{a}{2^{p_a}} = \frac{a}{2^{\lfloor \log_2 a \rfloor}} = \frac{a}{2^{\log_2 a - \gamma_a}} = \frac{a}{2^{\log_2 a} \cdot 2^{-\gamma_a}} = \frac{a}{a} \cdot 2^{\gamma_a} = 2^{\gamma_a}$$

и т.к. γ_a – уникально для данного a , то и 2^{γ_a} уникально для данного a $\textcircled{*} \frac{a}{2^{p_a}}$ также уникально для данного a . С другой стороны $\frac{a}{2^{p_a}} = 1.0 + \varepsilon_a \Rightarrow \varepsilon_a = \frac{a}{2^{p_a}} - 1.0 = 2^{\gamma_a} - 1.0$, что означает, что ε_a также уникально для данного a .

По ε_a можно однозначно установить конкретный элемент множества $A(p_a)$: $\varepsilon_a = 2^{\gamma_a} - 1.0 \Rightarrow \gamma_a = \log_2(1.0 + \varepsilon_a)$, а γ_a уникален для каждого элемента в пределах множества $A(p_a)$ и определяет этот элемент.

В результате получаем формулы расчета p_a и ε_a :

$$\begin{cases} p_a = \lfloor \log_2 a \rfloor \\ \varepsilon_a = \frac{a}{2^{p_a}} - 1.0 \end{cases}$$

Итак, имеем p_a , для данного a однозначным образом определяющее множество $A(p_a)$, которое включает в себя a , и ε_a , однозначно определяющее элемент a в данном множестве $A(p_a)$.

При этом и p_a , и ε_a однозначным образом определяются по a , откуда следует, что:

- подтверждено однозначное соответствие $(p_a, \varepsilon_a) \rightarrow a$, вытекающее из определения формата ($a = (1.0 + \varepsilon_a) \cdot 2^{p_a}$);

- доказано однозначное соответствие $a \rightarrow (p_a, \varepsilon_a)$, тогда $a \leftrightarrow (p_a, \varepsilon_a)$ и, следовательно, $\forall a \exists! p_a \in \mathbb{N}, \varepsilon_a \in [0;1) : a = (1.0 + \varepsilon_a) \cdot 2^{p_a}$. $\textcircled{*}$

Следствие 1. Алгоритм преобразования из Постулата 1 преобразует число a в формат $1.0 + \varepsilon$ единственным образом.

Утверждение 1. Формат $1.0 + \varepsilon$ является эффективно-представляющим.

Доказательство. По лемме 1 все числа формата $1.0 + \varepsilon$ являются различными. Т.к. формат не накладывает никаких ограничений ни на мантиссу, ни на порядок, ни на знак числа, это значит, что:

- для представления дробной части значения числа используются все биты мантиссы, а количество различных значений мантиссы равно булеану от ее длины, т.е. 2^{l_0} ;

- для представления порядка числа используются все биты порядка, а количество различных значений порядка равно соответственно булеану его длины, т.е. 2^{n_0} ;

- знак – это элемент множества $\{+, -\}$, мощность которого равна 2, при этом каждое представляемое число имеет знак.

Соответственно, всего в формате может быть представлено $2 \cdot 2^{n_0} \cdot 2^{l_0} = 2^{1+n_0+l_0} = 2^{N_0}$ различных чисел. $\textcircled{*}$

Утверждение 2. Формат $0.0 + \varepsilon$ не является эффективно-представляющим.

Доказательство. Формат $0.0 + \varepsilon$ – это формат полного представления числа, что предполагает наличие двоичной точки в мантиссе между старшим и предыдущим разрядами, что дает ограничение $0 \leq \varepsilon < 2$. Действительно, в старшем разряде может быть либо 0, либо 1, а предельные случаи для оставшихся разрядов – это все 0 (левая граница), либо все 1 ($2 - 2^{-l}$). Итак, возможны два случая.

ε представляється вільно. В цьому випадку $a = 0$. С іншої сторони $a = (0.0 + \varepsilon) \cdot 2^p \Rightarrow 0 = \varepsilon \cdot 2^p$, але т.к. $2^p \neq 0 \forall p \in N$, то $\varepsilon = 0$. С іншої сторони, $\forall p \cdot 2^p = 0$, т.е. число $a = 0$ можна представити в усіх існуючих порядках, а таких у нас $C_p = p_{\max} - p_{\min} + 1$, і 0 можна представити з допомогою C_p образів, а не єдинично, що порушує умову 1 ефективно-представляючого формату.

ε представляється в вигляді $\varepsilon = \varepsilon^* + \gamma$, при цьому $\varepsilon^* \cap \gamma = 0$ – це означає, що деякі разряди мантиси задаються фіксованим образом. Тут існують два випадки – частини чисел всі рівно продовжують представлятися не єдиничним образом що зводиться до випадку 1, або всі числа представимі єдиничним образом. Нехай $\gamma = 1.0$. Згідно з постулатом 1 будь-яке представиме число можна представити в вигляді $1.0 + \varepsilon^*$. Отримуємо представлення в форматі $1.0 + \varepsilon$ і за лемою 1 в даному представленні будь-яке число представляється єдиничним образом. Однак, т.к. ми явною образом зберігаємо старшу 1 в першому разряді, то насправді для представлення чисел використовуються не всі t біти мантиси, а $t-1$, а 1 разряд займає 1. В цьому випадку ми зможемо представити булеан не від N_0 , а від N_0-1 різних чисел, що суперечить умові ЕП-формату. ©

Отже, як базовий формат представлення чисел з плаваючою точкою рекомендується використовувати ефективно-представляючий формат $1.0 + \varepsilon$.

Слід зауважити, що будь-яке число формату $0.0 + \varepsilon$ може бути представлено в форматі $1.0 + \varepsilon$ абсолютно без втрати точності і доказательство даного твердження базується на інженерній особливості останнього [2].

Система зв'язуючих критеріїв

Далі необхідно скласти систему, виражає залежність представлення чисел з плаваючою точкою від розмірів порядку і мантиси представлення. Для цього введемо визначення:

G_{\min} – мінімальне представиме форматом значення;

G_{\min}^{abs} – мінімальне представиме форматом абсолютне значення (т.е. найбільш близьке до 0 представиме значення, відмінне від нього);

G_{\max} – максимальне представиме форматом значення; $G_{\max}^{abs} \equiv G_{\max}$, очевидно, що $G_{\max} = -G_{\min}$;

G_{\max}^M – найбільш представима мантиса, одночасно мантиса G_{\min} і G_{\max} , звідси випливає, що $G_{\max} = G_{\max}^M \cdot 2^{p_{\max}}$,

$$G_{\min} = -G_{\max} = -G_{\max}^M \cdot 2^{p_{\max}};$$

G_{\min}^M – мінімальна представима мантиса, одночасно мантиса G_{\min}^{abs} , звідси випливає, що

$$G_{\min}^{abs} = G_{\min}^M \cdot 2^{p_{\min}};$$

G_{Δ}^M – мінімальний приріст мантиси, т.е. найменше можливе змінення мантиси числа, відображене форматом; зазвичай, $G_{\Delta}^M = 2^{-t}$ для формату $1.0 + \varepsilon$, і $G_{\Delta}^M = 2^{-t+1}$ при повному представленні мантиси, одночасно вона зазвичай є мантисою G_{\min}^M : $G_{\Delta}^M = G_{\min}^M$;

G_{Δ}^p – мінімальний приріст чисел порядку p , фактично, являє собою абсолютне значення різниці між двома сусідніми представимими форматом числами (мантисою даного числа буде G_{Δ}^M , а порядком $-p$ \otimes $G_{\Delta}^p = G_{\Delta}^M \cdot 2^p$).

Нехай $p_{\Delta}^p = \frac{G_{\Delta}^p}{2}$ – точність представлення числа порядку p [11].

Можливо розрахувати K – кількість представимих даним форматом чисел.

В одному порядку ми маємо всього

$$K^M = \frac{(G_{\max}^M - G_{\min}^M + G_{\Delta}^M)}{G_{\Delta}^M} = \frac{(G_{\max}^M - G_{\min}^M)}{G_{\Delta}^M} + 1$$

комбінацій мантис, т.е. чисел.

Всього комбінацій порядку $K^E = p_{\max} - p_{\min} + 1$.

У кожного числа існує знак – елемент множини $S = \{+, -\}$, $|S| = 2$.

Отже, всього чисел

$$K = 2 * K^M * K^E = 2 \cdot \left(\frac{G_{\max}^M - G_{\min}^M}{G_{\Delta}^M} + 1 \right) \cdot (p_{\max} - p_{\min} + 1).$$

При цьому G_{\min}^M , G_{\max}^M і G_{Δ}^M залежать від N – розмірності елемента множини зберігання і S – системи відображення числа на множину зберігання.

Складемо відповідну систему для загального випадку:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{\min} = -G_{\max}^M \cdot 2^{p_{\max}} \\ G_{\max} = G_{\max}^{abs} = +G_{\max}^M \cdot 2^{p_{\max}} \\ G_{\min}^{abs} = +G_{\min}^M \cdot 2^{p_{\min}+1} \\ G_{\min}^M = G_{\Delta}^M \\ G_{\Delta}^p = G_{\Delta}^M \cdot 2^p, p_{\min} \leq p \leq p_{\max} \\ p_{\Delta}^p = \frac{G_{\Delta}^p}{2} \\ K = 2 * K^M * K^E = 2 \cdot \left(\frac{G_{\max}^M - G_{\min}^M}{G_{\Delta}^M} + 1 \right) \cdot (p_{\max} - p_{\min} + 1) \end{array} \right.$$

Добавив в нее для конкретного формата зависимости крайних значений порядка и мантиссы от их битовой длины, получим систему зависимостей между крайними значениями формата и длинами его составляющих. Для формата $1.0 + \varepsilon$ это:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{\min} = -(1.0 + G_{\max}^M) \cdot 2^{p_{\max}} \\ G_{\max} = G_{\max}^{abs} = +(1.0 + G_{\max}^M) \cdot 2^{p_{\max}} \\ G_{\min}^{abs} = +G_{\min}^M \cdot 2^{p_{\min}+1} \\ G_{\min}^M = G_{\Delta}^M \\ G_{\Delta}^p = G_{\Delta}^M \cdot 2^p, p_{\min} \leq p \leq p_{\max} \\ G_{\Delta}^M = 2^{-t} \\ G_{\max}^M = 1 - G_{\Delta}^M = 1 - 2^{-t} \\ P_{\Delta}^p = \frac{G_{\Delta}^p}{2} \\ K = 2 * K^M * K^E = 2 * \left(\frac{G_{\max}^M - G_{\min}^M}{G_{\Delta}^M} + 1 \right) (p_{\max} - p_{\min} + 1) \\ p_{\max} - p_{\min} = 2^w - 1 \\ q = -p_{\min} \\ N = 1 + t + w \end{array} \right.$$

Здесь q – характеристика формата. В соответствии со стандартом IEEE-754 в эту систему могут быть добавлены еще 2 уравнения:

$$\begin{cases} p_{\min} = 1 - 2^{w-1} \\ p_{\max} = 2^{w-1} \end{cases}$$

Выводы

В результате исследования получена система, выражающая зависимость граничных значений и точности формата представления $1.0 + \varepsilon$ от длин его составляющих – мантиссы и порядка. Полученные зависимости могут быть использованы на практике для реализации программных библиотек для математических расчетов, ориентированных на получение достоверных результатов с максимально эффективным представлением чисел в заданной разрядности.

Литература

1. У. Кулиш, Д. Рац, Р. Хаммер, М. Хокс Достоверные вычисления. Базовые численные методы. Изд-во: «Регулярная и хаотическая динамика», - 2005. – 496 с.
2. IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic (Revision of IEEE Std 754-1985) // IEEE Computer Society. – 2008. – P: 70.
3. Wilkinson J. H. Modern error analysis // SIAM Rev. — 1971. — Vol. 13, № 4. — P. 548–568.
4. Moore R. E. Interval analysis. — Englewood Cliffs; Prentice Hall, 1966. — 145 p.
5. Moore R. E. Methods and applications of interval analysis. — Philadelphia; SIAM, 1979. — xi, 190 p.
6. Alefeld G., Herzberger J. Introduction to interval computations. — New York etc.; Academic Press, 1983. — xviii, 333 p.; Рус. перев.; Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления: Пер. с англ. — М.: Мир, 1987. — 356 с.
7. Добронев Б. С., Шайдуров В. В. Двусторонние численные методы. — Новосибирск; Наука, 1990. — 208 с.
8. Yohe J. M. Portable software for interval arithmetic // Fundamentals of numerical computation (computer-oriented numerical analysis) / Ed.: G. Alefeld, R. D. Grigorieff. — Wien etc.: Springer-Verlag, 1980. — (Computing; Suppl. 2). — P. 211–229.
9. Klatte R., Kulisch U., Wiethoff A., Lawo C., Rauch M. C-XSC. A C++ class library for extended scientific computing. — Berlin etc.: Springer Verlag, 1993. — 270 p.
10. Nickel K. Can we trust the results of our computing? // Mathematics for Computer Science; Proc. Symposium held in Paris, March 16–18, 1982. — S. 1.; Association française pour la cybernetique et technique (AFCET), 1982. — P. 167–175
11. Верещагин Н.К., Шень А. Математическая логика и теория алгоритмов: Часть 1. Начала теории множеств. – М.: Изд-во МЦНМО, - 2008. – 128 с.

Поступила в редакцию 30.03.2010