УДК 004.925

О.Н.Романюк, М.М.Курінний,
Н.С.Костюкова, О.В.Мельник
Вінницький національний технічний університет
Донецький національний технічний університет
ran12345@mail.com

Високопродуктивна конусна модель піксела для антиаліайзингу відрізків прямих

Розглядається модель пікселя у вигляді конуса одиничного об'єму. Пропонується алгоритм, що не вимагає попереднього обчислення таблиць значень об'єму конуса і містить ту ж кількість операцій множення, що й алгоритм Гупти-Спроулла. Використання алгоритму дозволить поліпшити якість зображення

Піксель, конус, алгоритм Гупти-Спроулла, антіелайсінг

1. Вступ

Під час дискретизації неперервних зображень виникають спотворення, обумовлені недостатньою розподільною здатністю дискретної решітки. На неперервних краях об'єктів з'являються чітко виражені сходинки або зубці. Цей артефакт отримав назву ступінчастого ефекту чи ефекту аліайзингу [1]. Ефект аліайзингу суттєво погіршує якість сформованого зображення. Встановлено, що при використанні 17" монітора і розміщенні спостерігача на відстані 65 см від екрану для повного усунення ефекту аліайзингу потрібен монітор з роздільною здатністю як мінімум 4000x4000 пікселів, а для людей з рівнем зору вище середнього - взагалі 8000x8000 пікселів [2]. Сучасний рівень технологій поки що не в змозі забезпечити таку роздільну здатність. Таким чином, для забезпечення належної якості зображень необхідно використовувати спеціальні методи антиаліайзингу.

Метою даної статі є розробка ефективної моделі піксела для антиаліайзингу зображень, а також алгоритму усунення ступінчастості зображення крокової траєкторії відрізків прямих.

2. Аналіз існуючих методів та постановка задачі

Методи усунення ступінчастого ефекту розділяють на дві групи [1]. До першої групи відносяться методи, які базуються на збільшенні дискретизації [3]. В таких методах сцена спочатку розраховується з вищою роздільною здатністю, що дає можливість врахувати дрібні деталі, а при відображенні зменшується шляхом усереднення. Основний недолік даних методів полягає у великій обчислювальній складності, оскільки при збільшенні дискретизації в n разів, кількість пікселів (а отже і кількість обчислень на один піксель) збільшується в n^2 разів [3].

У методах другої групи піксель розглядається не як умовна точка, а як скінчена область, оскільки в реальних пристроях відображення піксель не є ідеальною точкою, а має певну форму [1]. При цьому інтенсивність пікселів на краях графічних об'єктів встановлюється пропорційно до площі тих частин пікселів, які покриваються цим об'єктом. Методи даної групи характеризуються меншою обчислювальною складністю і є більш прийнятними для випадків, коли необхідно генерувати зображення в реальному масштабі часу.

Складність обчислення площі покриття та якість результуючого зображення залежить від математичної моделі форми піксела. В більшості існуючих алгоритмів піксель розглядається як квадрат зі стороною, що дорівнює одиниці, оскільки при цьому значно спрощуються обчислення. Математична модель піксела, в якій останній розглядається як круг з діаметром, який дорівнює одиниці, більш адекватна реальності. Більш високу якість забезпечують моделі, які враховують, що інтенсивність світла, яке випромінює піксель, є максимальною в центрі піксела та зменшується при віддаленні від нього [3]. Найбільш простою серед них є модель, в якій інтенсивність кольору піксела максимальна в центрі і лінійно зменшується до нуля на відстані r від центра. Така модель отримала назву конічної [4].

При використанні конічної моделі інтенсивність кольору пікселів визначається таким чином. У центрі піксела встановлюється конус, висота і радіус якого підібрані так, щоб об'єм конуса дорівнював 1. Інтенсивність кольору точки встановлюється пропорційно до об’єму, який границя графічного примітиву відтинає від конуса, встановленого в центрі піксела. Приклад застосування конічної моделі для відрізка прямої показаний на рис. 1.

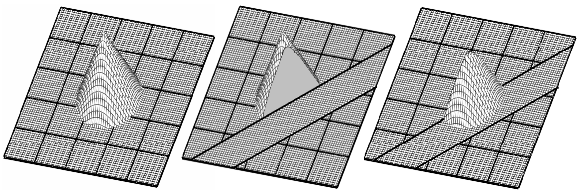

Рисунок 1- Приклад застосування конічної моделі для відрізка прямої

Одним з найбільш відомих алгоритмів антиаліайзингу відрізків прямих, який використовує конічну модель, є алгоритм Гупти-Спроула [3]. Для даного алгоритму радіус основи конуса r дорівнює одній дискреті. Вважається, що пряма має форму смуги, а відрізок прямої розглядається як прямокутник ширина якого дорівнює t. Об’єм, який відтинається прямою від конуса, залежить лише від відстані d між центром піксела та прямою і товщини прямої t [4]. Відповідно інтенсивність кольору піксела визначається за формулою:

$$I = F(d,t),$$

де d - відстань між прямою та центром піксела;

t - товщина прямої.

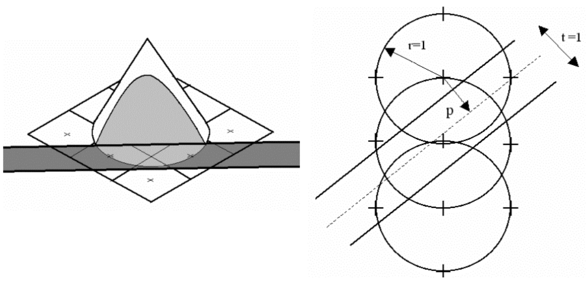

Рисунок 2 - Визначення інтенсивності пікселів згідно алгоритму Гупти-Спроула

Алгоритм на кожному кроці підсвічує три піксела: центральний та два його сусіда зверху та знизу (рис. 2).

Для обчислення виразу $F(d,t)$ застосовується чисельне інтегрування [4]. В алгоритмі Гупти-Спроула використовується таблиця заздалегідь розрахованих значень функції $F(d,t)$ для $t=1$. Основний недолік такого підходу полягає у тому, що для ліній різної товщини потрібно будувати окремі таблиці, що ускладнює апаратну реалізацію.

Отже, актуальними є питання пошуку шляхів обчислення об’єму перетину безпосередньо в циклі інтерполювання. Одним з можливих підходів є апроксимація функції $F(d,t)$ поліномом 2-го ступеня.

3. Результати досліджень

Об’єм частини конуса знаходиться за формулою:

$$F(d,t) = V(d+t) - V(d-t),$$

де $V(d)$ - об’єм, який відтинається від конуса площиною, перпендикулярною до основи конуса.

З рис. 3 видно, що об’єм $V(d)$ можна знайти за формулою:

$$V(d) = \int_0^d S(t)\,dt \qquad (1)$$

де $S(t)$ - площа поперечного перерізу конуса площиною, яка перпендикулярна до основи конуса і розміщена на відстані t від центра конуса (рис. 3); d - відстань між центром піксела і ідеальною прямою.

При знаходженні виразу $S(t)$ будемо використовувати рівняння конусу в системі координат, центр якої співпадає з центром конуса (рис. 3):

$$z(x,y) = \begin{cases} H - \dfrac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2},\ для\ \sqrt{x^2+y^2} \le R \\ 0,\ для\ \sqrt{x^2+y^2} > R \end{cases},$$

де H - висота конуса;

R - радіус конуса.

З рис. 3 видно, що площу поперечного перерізу $S(t)$ можна знайти, обчисливши наступний інтеграл:

$$S(t) = 2\cdot\int_0^{\sqrt{R^2-t^2}} z(x,t)\,dx = 2\cdot\int_0^{\sqrt{R^2-t^2}} \left(H - \frac{H}{R}\cdot\sqrt{x^2+t^2}\right)dx$$

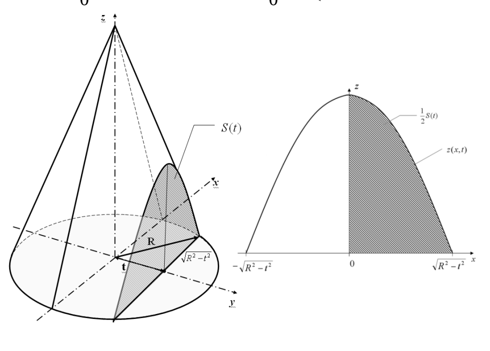

Рисунок 3 - Знаходження об’єму, який відтинається від конуса ідеальною площиною

Обчисливши інтеграл, отримуємо:

$$S(t) = H \cdot \sqrt{1-t^2} - H \cdot t^2 \cdot \ln\left(\sqrt{1-t^2}+1\right) + H \cdot t^2 \cdot \ln(t)$$

Підставивши останній вираз в (1), знаходимо:

$$V(d) = \int_a^d (H \cdot \sqrt{1-t^2} - -H \cdot t^2 \cdot ln\left(\sqrt{1-t^2}+1\right) + H \cdot t^2 \cdot ln(t))dt \quad (2)$$

Обчислимо даний інтеграл за методом адаптивної квадратури [5] для $d = 0{,}05;0{,}1;0{,}15....1$. Результати обчислень зведені в табл. 1.

Таблиця 1. Результати обчислення інтегралу (2)

V	d
0,024	0,05
0,047	0,1
0,070	0,15
0,092	0,2
0,112	0,25
0,132	0,3
0,150	0,35
0,166	0,4
0,181	0,45
0,195	0,5
0,207	0,55
0,217	0,6
0,226	0,65
0,234	0,7
0,239	0,75
0,244	0,8
0,247	0,8
0,249	0,9
0,250	0,95
0,250	1

Після апроксимації даних, наведених у таблиці 1, за допомогою методу найменших квадратів [5] було отримано такий поліном:

$$V_p(d) = -0{,}571 \cdot d^2 + 1{,}076 \cdot d - 6{,}774 \cdot 10^{-3}.$$

Наведений поліном відносно складний, тому доцільно використати більш простий з прийнятною точністю апроксимації. Дослідимо поліном:

$$V_{p1}(d) = -0{,}5 \cdot d^2 + 1 \cdot d.$$

На рис. 4 показані графіки залежності абсолютної похибки функцій $V_p(d)$ та $V_{p1}(d)$ від відстані d.

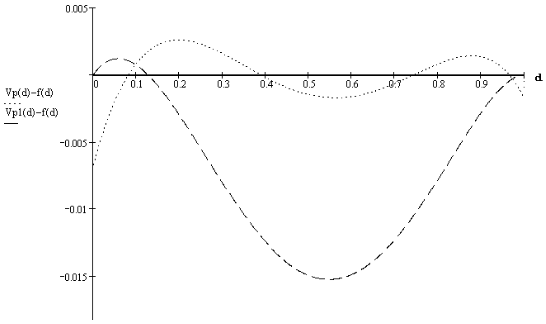

Рисунок 4 - Графіки залежності абсолютної похибки функцій $V_p(d)$ та $V_{p1}(d)$ від відстані d

Із графіка видно, що абсолютна похибка при використанні полінома $V_{p1}(d)$ не перевищує 1,5% від максимального рівня інтенсивності. При використанні 256 рівнів інтенсивності різниця в найгіршому випадку складе 4 рівня. Таку різницю людське око при нормальних умовах розрізнити не в змозі.

Для ефективного застосування конічної моделі необхідно зменшити обчислювальні витрати на знаходження відстані від центра піксела до прямої. Найбільш поширеними методами побудови відрізків прямих є методи, основані на використанні оцінювальних функцій [6]. Знайдемо зв'язок між оцінювальною функцією та відстанню від центра піксела до прямої.

В якості базового алгоритму використаємо алгоритм лінійної інтерполяції за методом оцінювальної функції з початковим значенням, яке дорівнює $\lfloor БП / 2 \rfloor$ [7].

Оцінювальна функція розраховується за формулами:

$$F_{i+1} = \begin{cases} F_i - МП, & якщо\ F_i \ge 0, \\ F_i + \Delta, & якщо\ F_i < 0, \end{cases}$$

де $F_0 = \lfloor БП / 2 \rfloor$, $\Delta = БП - МП$, БП – більший координатний приріст відрізка, МП - менший координатний приріст відрізка.

Якщо $F_i \ge 0$, то виконується крок по провідній координаті. Коли $F_i < 0$, то виконується комбінований крок (по обох координатах). Даний алгоритм забезпечує максимальну точність.

У загальному вигляді для даного алгоритму залежність оцінювальної функції від координат точки має вигляд:

$$F(x,y) = БП \cdot y - МП \cdot x + БП / 2 . \quad (3)$$

Із рис. 5 видно, що відстань від центра піксела до прямої можна знайти за формулою:

$$d = BC \cdot sin\alpha , \quad (4)$$

де α - кут нахилу прямої.

Відстань BC дорівнює

$$BC = \frac{МП}{БП} x - y .$$

Синус кута нахилу можна знайти за допомогою наступного виразу:

$$sin\,\alpha = \frac{БП}{\sqrt{БП^2 + МП^2}} .$$

Підставивши два останні вирази у вираз (4) отримуємо формулу для знаходження відстані від центра піксела до прямої:

$$d = \frac{МП \cdot x - БП \cdot y}{\sqrt{БП^2 + МП^2}} = \frac{БП/2 - (БП \cdot y - МП \cdot x + БП/2)}{\sqrt{БП^2 + МП^2}} =$$
$$= \frac{БП/2 - ОФ}{\sqrt{БП^2 + МП^2}}$$

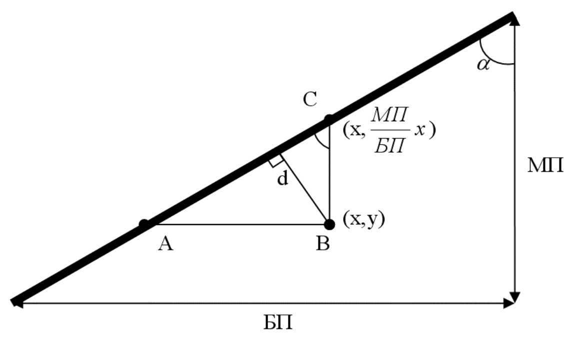

Рисунок 5 - Залежність між оцінювальною функцією та відстанню від точки до прямої

Розглянемо наступну модифікацію оцінювальної функції:

$$OF' = БП' \cdot y - МП' \cdot x + БП'/2 ,$$

де $$БП' = \frac{БП}{\sqrt{БП^2 + МП^2}} ,$$

$$МП' = \frac{МП}{\sqrt{БП^2 + МП^2}} .$$

Знак даної функції співпадає зі знаком функції (3), отже її можна використати замість оцінювальної функції (3) при визначені координат точок траєкторії. Таким чином інтерполювання відрізка прямої з параметрами *БП* і *МП* зводиться до інтерполювання за *ÁÏ* тактів відрізка прямої з параметрами *ÁÏ ′* і *Ì Ï ′*. При цьому знак оцінювальної функції використовується для визначення координат точок траєкторії, а значення оцінювальної функції визначає відстань від центра піксела до прямої.

Можна запропонувати такий алгоритм антиаліайзингу відрізка прямої для першого октанту.

1. Встановлюються початкові значення змінних:

   $T = \sqrt{БП^2 + МП^2}$; $x := 0$, $y := 0$

   $БП' = БП/T$

   $МП' = МП/T$; $OF' = БП'/2$;

   $\Delta = БП' - МП'$;

2. Поточні значення оцінювальної функції визначаються згідно виразів:

$$OF'_{i+1} = \begin{cases} OF'_i - МП', & якщо\ OF'_i \ge 0 \\ OF'_i + \Delta, & якщо\ OF'_i < 0 \end{cases}$$

3. Якщо $OF' \ge 0$, то виконується горизонтальний крок $x := x + 1$. Знаходиться відстань від центра піксела до прямої: $d = БП'/2 - OF'$;

4. Якщо $OF' < 0$, виконується діагональний крок $x := x + 1; y := y + 1$. Знаходиться відстань від центра піксела до прямої: $d = |OF'| - БП'/2$;

5. Для визначення інтенсивності кольору точок знаходять:

   $d_1 = |d| + t$; $d_2 = |d| - t$.

   якщо $d_1 > 1$ то $d_1 = 1$;

   якщо $d_2 < -1$ то $d_2 = -1$;

   якщо $d_1 \ge 0$ то $V_1 := 1/2 + (d_1 - 0{,}5 \cdot d_1^2)$,

   інакше $V_1 := 1/2 - (|d_1| - 0{,}5 \cdot d_1^2)$.

   якщо $d_2 \ge 0$ то $V_2 := 1/2 + (d_2 - 0{,}5 \cdot d_2^2)$,

   інакше $V_2 := 1/2 - (|d_2| - 0{,}5 \cdot d_2^2)$.

   $I = (V_1 - V_2) I_M$

6. Як і в алгоритмі Гупти-Спроула [4], крім основного піксела також заповнюється „нижній" і „верхній" пікселі. Для них інтенсивність кольору визначається аналогічно, з урахуванням того, що відстані від центра піксела до прямої знаходяться за формулами: $d_{верх} = d + БП'$, $d_{низ} = |БП' - d|$.

7. Кроки 2-6 виконуються до закінчення формування відрізка.

Приклад результату роботи алгоритму показано на рис. 6.

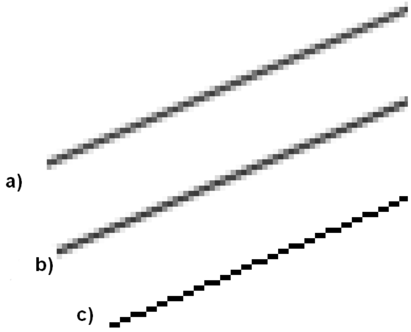

Рисунок 6 - Приклад роботи алгоритму. Відрізки прямих побудовані з використанням:
а) запропонованого алгоритму; b) алгоритму Гупти-Спроула; с) алгоритму Брезенхема.

4. Висновки

Запропонована модель не потребує використання таблиці заздалегідь розрахованих значень об'єму перетину, що робить більш простою її апаратну реалізацію. Крім того для розрахунків використовують таку ж кількість операцій типу „множення", як і в алгоритмі Гупти-Спроула наведеному в [4].

Запропонована модель і алгоритм антиаліайзингу зображень відрізків прямих можуть бути використані у системах генерації графічних зображень з метою покращення їх якості.ds.

Список літератури

1. Роджерс Д. Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс : пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 604 с.

2. William Leler Human Vision, Anti-aliasing, and the cheap 4000 Line Display / Leler William // ACM. – 1980. – Vol. 14. – P. 308–313.

3. Crow F.C. A Comparison of Antialiasing Techniques / F.C. Crow // IEEE CG & A. – 1981. – Vol. 1. – P. 40–47.

4. Gupta S. and R.F. Sproull. Filtering edges for gray-scale displays / S. Gupta, R.F. Sproull // Computer Graphics. – 1981. –Vol. 15. – No. 3. – P. 1–5.

5. Лященко М.Я. Чисельні методи: підручник / М.Я. Лященко, М.С. Головань. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.

6. Романюк О.Н. Методи та засоби антиаліайзингу контурів об'єктів у системах комп'ютерної графіки: монографія / О.Н. Романюк, М.С. Курінний. – Вінниця: УНІВЕСУМ-Вінниця, 2006. – 163 с.

7. Пєтух А.М. Інтерполяція в задачах контурного формоутворення: монографія / А.М. Пєтух, Д.Т. Обідник, О.Н. Романюк. – Вінниця: ВНТУ, 2007. – 103 с.

Надійшла до редколегії 11.06.2011

А.Н. РОМАНЮК, М.М. КУРИННЫЙ, Н.С. КОСТЮКОВА, О.В. МЕЛЬНИК

Винницкий национальный технический университет
Донецкий национальный технический университет

Конусная модель пикселя высокой производительности для антиэлайсинга отрезков прямых

Рассматривается модель пикселя в виде конуса единичного объема. Предлагается алгоритм, не требующий предварительного вычисления таблиц значений объема конуса и содержащий то же количество операций умножения, что и алгоритм Гупты-Спроулла. Использование алгоритма позволит улучшить качество изображения

Пиксель, конус, алгоритм Гупты-Спроулла, антиэлайсинг

O.N. ROMANYK, M.M. KURINNYI, N.S. KOSTYUKOVA, O.V. MELNYK

Vinnitsa National Technical University
Donetsk national technical university

Productive pixel cone model for line segment antialiazing

The paper considers the pixel model in the form of a cone with volume equal to 1. The proposed algorithm does not require pre-calculated table of cone volume values and contains the same number of multiplications as the Gupta-Sproul algorithm. The algorithm can improve image quality

Pixel, cone, Gupta-Sproul algorithm, antialiazing