УДК 004.42

А.Я. Аноприенко, канд. техн. наук, профессор,
С.В. Иваница,
Аль Рабаба Хамза
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк, Украина
anoprien@cs.dgtu.donetsk.ua, isv@cs.dgtu.donetsk.ua

Анализ времени выполнения арифметических операций над интервальными числами в СКА Mathematica

Проведена оценка временных затрат при реализации арифметических операций с вещественными числами в СКА Mathematica с использованием традиционных и интервальных вычислений. Проведены исследования при выполнении циклических вычислений для каждой из простейших арифметических операций. Получены аппроксимирующие зависимости и рассчитан коэффициент увеличения временных затрат при переходе к интервальным вычислениям.

Ключевые слова: интервал, вещественное число, арифметические операции, система компьютерной алгебры

Введение

В связи с возрастанием объемов обработки больших массивов данных и возрастающей актуальностью получения при этом достоверных результатов, возрастает потребность не только вычисления приближенных решений различных задач, но и гарантированных оценок их близости к точным решениям.

Поэтому интерес к интервальному анализу, как к одному из разделов вычислительной математики, в последнее время растет, поскольку он является, прежде всего, методом автоматического контроля ошибок округления при компьютерных вычислениях. Основная идея интервального анализа состоит в замене арифметических операций и вещественных функций над вещественными числами интервальными операциями и функциями, преобразующими интервалы, содержащие эти числа. Ценность интервальных решений заключается в том, что они содержат точные решения исходных задач [1].

Еще на заре развития интервальной математики были осуществлены первые эксперименты по реализации интервальных вычислений на ЭВМ. К настоящему времени обозначился переход от SC-языков (от английского словосочетания «Scientific Computations», т. е. «научные вычисления», под которыми в этом случае понимают различные языки программирования, специально спроектированные с учетом требований интервальных вычислений) к «интервальному» программному обеспечению, что является отражением набирающей силу тенденции объединения численно-интервальных и компьютерно-алгебраических систем программирования [2, 3]. Использование символьно-аналитических преобразований дает возможность в ряде случаев улучшить точность самого интервального вычисления. На этом этапе интервальные типы данных появились в ряде известных систем компьютерной алгебры, в том числе и в среде Wolfram Mathematica [4].

В данной работе проведены ряд тестов с целью определения затрат машинного времени на обработку данных, представленных вещественными и интервальными числами в системе компьютерной алгебры (СКА) Mathematica (версии 7.0.1). Следует отметить, что поддержка интервальной арифметики появилась в среде Mathematica, начиная с версии 3.0.1 [4] (дата релиза 29 июля 1997 года), которую от исследуемой версии отделяет более 12 лет эффективного развития СКА сотрудниками компании Wolfram Research.

Исследования проводились на персональном компьютере, имеющем следующие параметры: CPU DualCore AMD Athlon 64 X2, 2800 MHz 5400+; 2048 MB RAM.

Целью данной работы является:

- определение коэффициента увеличения времени при выполнении арифметических операций;
- графическое представление зависимости временных затрат $t(n)$ количества операций n при расчете функции f, аргумент которой задан как числовыми значениями — x, так и интервальными — X;
- определение коэффициентов аппроксимирующих функций.

Особенности интервальных арифметических операций

Интервал — это замкнутый числовой промежуток, который выражается своими крайними значениями. Эти значения называют границами интервала: левая граница — минимальное значение определенного числового промежутка; правая граница — его максимальное значение.

Под интервальным числом X (которое часто называют просто интервалом) обычно понимают вещественный отрезок $[\underline{x}, \overline{x}]$, где $\underline{x} \le \overline{x}$ и принадлежащий множеству интервальных чисел $\boldsymbol{IR}$. При $\underline{x} = \overline{x} = X$ интервальное число X отождествляется с вещественным числом $x \in \boldsymbol{R}$, следовательно $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{IR}$.

Под шириной интервала X понимают величину, определяющую разницу его границ:

$$wid(X) = \overline{x} - \underline{x}. \quad (1)$$

Над интервалами X_i и X_j определенны арифметические операции. Пусть $X_i, X_j \in \boldsymbol{IR}$, тогда

$$X_i * X_j = \{x_i * x_j \mid x_i \in X_i,\, x_j \in X_j\}, \quad (2)$$

где знак (*) — одна из операций сложения, вычитания, умножения и деления. При делении интервал $X_j = [\underline{x}_j, \overline{x}_j]$ не должен содержать ноль.

На рис. 1 приведена графическая интерпретация интервальных операций, которая наглядно демонстрирует взаимодействие границ интервалов, а также изменение ширины интервала-результата по отношению к ширине интервалов операндов.

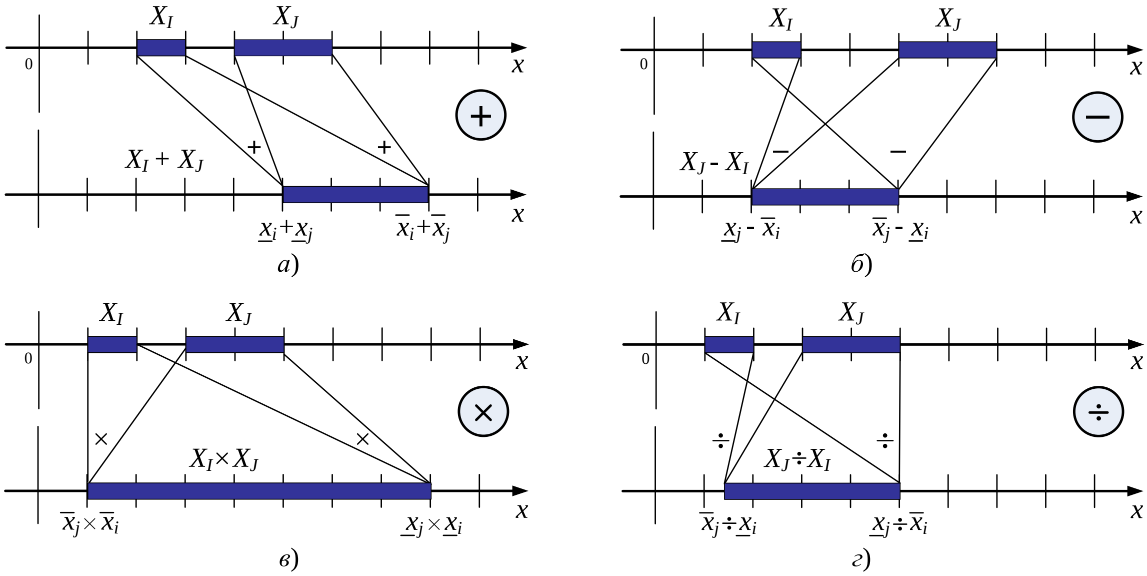

Рисунок 1 — Графическая интерпретация интервальных арифметических операций (*а* – сложение, *б* – вычитание, *в* – умножение, *г* – деление)

При этом операциями сложения и умножения интервалов

$$X_i + X_j = [\underline{x}_i, \overline{x}_i] + [\underline{x}_j, \overline{x}_j]; \quad (3)$$

$$X_i \times X_j = [\underline{x}_i, \overline{x}_i] \times [\underline{x}_j, \overline{x}_j] \quad (4)$$

можно выразить операции вычитания и деления:

$$X_i - X_j = [\underline{x}_i, \overline{x}_i] + [-1, -1] \times [\underline{x}_j, \overline{x}_j]; \quad (5)$$

$$X_i / X_j = [\underline{x}_i, \overline{x}_i] \times [1/\underline{x}_j, 1/\overline{x}_j],\ 0 \notin X_j. \quad (6)$$

Для оценки ширины интервала-результата справедливы следующие равенства:

$$wid(X_i + X_j) = wid(X_i) + wid(X_j); \quad (7)$$

$$wid(X_i - X_j) = wid(X_i) + wid(X_j); \quad (8)$$

$$wid(X_i \times X_j) \ge \ge \max\{|X_i| \times wid(X_j), |X_j| \times wid(X_i)\}; \quad (9)$$

$$wid(X_i / X_j) \le \le \{|X_i| \times wid(X_j), |X_j| \times wid(X_i)\}. \quad (10)$$

Равенства (3)–(6), и, в некоторой степени, равенства (7)–(10), подтверждают, что арифметические операции над интервалами требуют больше машинного времени, чем аналогичные операции над вещественными числами. При этом операции интервального вычитания и деления выполняются дольше интервальных операций сложения и умножения соответственно.

Выбор функции подсчета времени вычислений

Для проведения эксперимента, определяющего время выполнения вычислительного процесса, важным этапом является выбор средства фиксации временных отсчетов, отвечающей определенным требованиям к точности замеров. Для СКА Mathematica эксперименты проводились путем замера времени выполнения определенного участка программного кода, следовательно, для подсчета времени вычислений были привлечены функции, определенные также в исследуемом пакете.

Для выбора функции подсчета времени вычислений рассматривались три функции времени:

- **SessionTime[ ]** возвращает количество секунд реального времени, которые прошли с начала запуска сессии Mathematica;
- **TimeUsed[ ]** возвращает общее количество секунд времени работы центрального процессора при вычислении текущей сессии Mathematica;
- **Timing[*expr*]** рассчитывает *expr*, и возвращает список времени в секундах, вместе с полученным результатом.

На рис. 2 приведены вычисления функции Растригина [5] с использованием замеров времени работы программы указанными тремя функциями времени. Результаты показали, что функция SessionTime возвращает значение времени с самым высоким классом точности. Поэтому все временные замеры при проведении экспериментов производились данной функцией.

```
b1 = SessionTime[];
a1 = TimeUsed[];
x = Interval[{1.4999, 1.5001}]; n = 500000
Timing[Sum[((x)^2 - 10*Cos[2 π*x]), {i, 1, n}] + 10*n]
 a2 = TimeUsed[] ;
b2 = SessionTime[];
a2 - a1
b2 - b1
Null

500000

{34.616 Second, Interval[{1.11248×10^7, 1.11252×10^7}]}

34.616

34.6632609
```

Рисунок 2 — Фрагмент программного кода для вычисления функции Растригина с приведенными результатами расчета и замера времени выполнения фрагмента функциями TimeUsed, Timing и SessionTime

Циклическое выполнение арифметических операций

Для анализа времени выполнения арифметических операций над интервалами и вещественными числами вычислялись следующие функции сложения (f_1), вычитания (f_2), умножения (f_3) и деления (f_4):

$$f_1(a) = \sum_{i=1}^{n} a; \qquad (11)$$

$$f_2(a) = \sum_{i=1}^{n} (-a); \qquad (12)$$

$$f_3(a) = \prod_{i=1}^{n} a; \qquad (13)$$

$$f_4(a) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{a}\right). \qquad (14)$$

В функциях (11)–(14) в качестве аргумента a может выступать как интервал X, так и вещественное число — x.

Расчет производится по циклу от начального значения n_1 до конечного n_2 с шагом p. После каждого перебора значений от $i = 1$ до n_i фиксируется время вычисления. Таким образом, производится $(n_2 - n_1) / p$ временных замеров. Такая последовательность вычислений производится отдельно для интервальных и вещественных значений.

На рис. 3 приведены результаты расчетов функций $f_{1-4}(X)$ и $f_{1-4}(x)$ для вещественного значения $x = 1.5$ и его интервального окружения $X = [1.4999, 15001]$ при $n_1 = 50\,000$, $n_2 = 1\,000\,000$, $p = 50\,000$. Проведена аппроксимация полученных наборов значений и получены линейные аппроксимирующие функции $y_{1-4} = k_{1,2}\,n$ для каждой арифметической операции, где k_1 — коэффициент пропорциональности аппроксимирующей функции для вещественных чисел, k_2 — коэффициент пропорциональности аппроксимирующей функции для интервалов.

Средние значения времени выполнения арифметических операций с указанием коэффициентов пропорциональности аппроксимирующих функций для вещественных и интервальных функций (11)–(14) приведены в табл. 1.

Отношение коэффициентов k_2 / k_1 показывает, во сколько раз интервальные вычисления выполняются дольше традиционных.

На основании полученных результатов можно отметить, что прирост во времени на обработку интервалов по сравнению с вещественными числами меньше при делении и умножении, чем при сложении и вычитании. Это связано с тем, что алгоритмы программной реализации операций умножения и деления (система Mathematica использует машинно-независимое ядро математических операций — Kernel [6]) сами по себе достаточно «трудоемкие», в том числе и для вещественных чисел.

На рис. 4 показаны характеристики работы ядра Mathematica (MathKernel.exe), показывающие уровень загрузки центрального процессора и объем оперативной памяти во время выполнения арифметических операций над вещественными числами и интервалами.

Шкала системного мониторинга настроена следующим образом — в одном столбце ячеек сетки отражены выделенные ресурсы для работы ядра в течение 250 мс машинного времени. В окне шкалы CPU Usage History первый пик (не превышающий 17% нагрузки процессора) — загрузка ядра системы Mathematica, которое сразу выделяет для своих нужд 20,7 MB оперативной памяти. Второй (средний) и третий (самый широкий) пики — вычисления вещественных чисел интервалов.

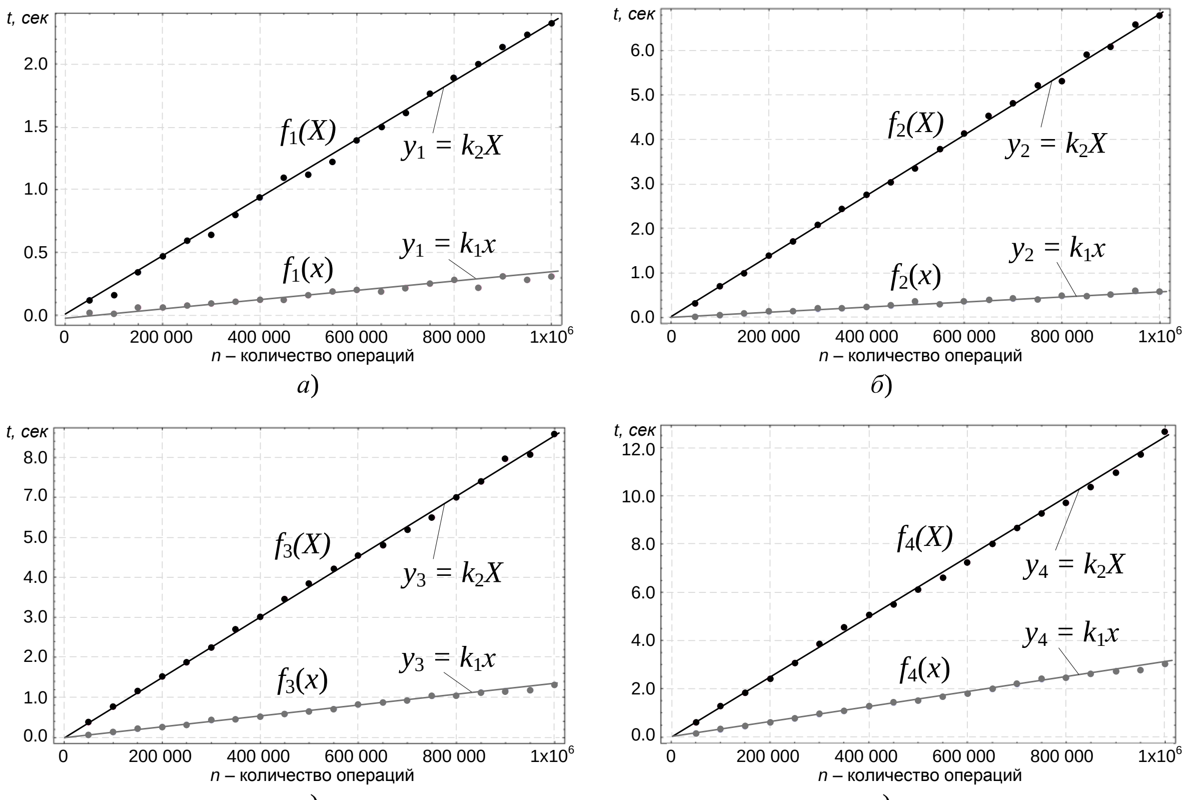

Рисунок 3 — Графическое представление результатов при арифметических операциях для вещественных и интервальных значений
(арифметическая операция: *а* – сложение, *б* – вычитание, *в* – умножение, *г* – деление)

Таблица 1 — Результаты исследования временных затрат при проведении арифметических операций с вещественными числами и интервалами

Арифметическая операция	Среднее время t при расчете функции, сек		Коэффициент аппроксимирующей функции		
	$f(x)$	$f(X)$	k_1	k_2	k_2 / k_1
Сложение	0.16485	1.21795	3.1414×10^{-7}	2.3326×10^{-6}	7.426
Вычитание	0.3086	3.60	5.9948×10^{-7}	6.8557×10^{-6}	11.436
Умножение	0.68985	3.96095	1.3312×10^{-6}	7.5361×10^{-6}	5.661
Деление	1.6047	6.4711	3.0974×10^{-6}	1.232×10^{-5}	3.978

По результатам мониторинга ядра математических операций можно заключить, что

1) уровень загрузки процессора не превышает 50% (так как в исследованиях использовался двухъядерный процессор, то процессом MathKernel использовалось только одно (!) ядро с его 100%-ной загрузкой);

2) при математических расчетах наблюдается достаточно интенсивный рост используемой оперативной памяти, причем при операциях сложения и умножения требуется меньше памяти, чем при вычитании и делении;

3) после окончания расчетов (ядро находится в «режиме ожидания») оперативная память процессом не освобождается.

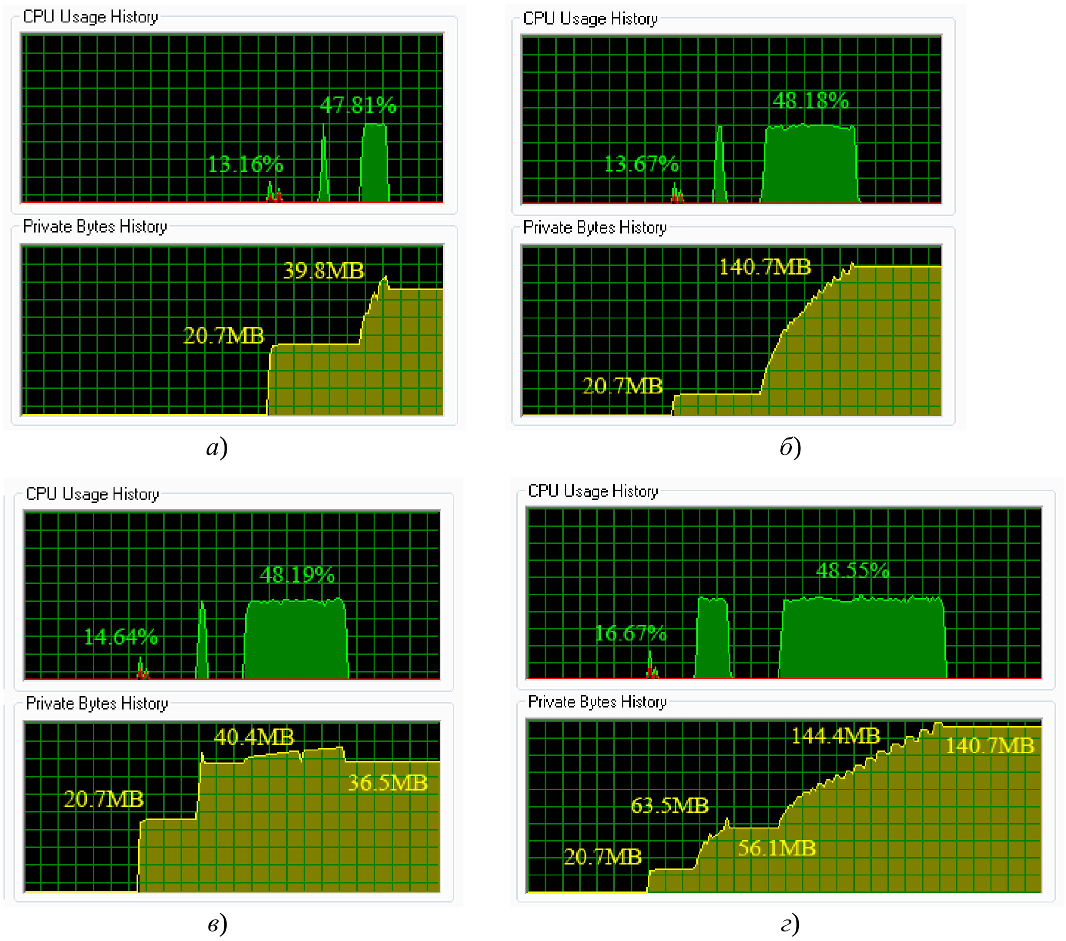

Рисунок 4 — Системный мониторинг процесса MathKernel.exe при выполнении операций сложения (*а*), вычитания (*б*), умножения (*в*) и деления (*г*)

Заключение

В работе была рассмотрена возможность СКА Mathematica обрабатывать интервальные значения с учетом требуемого на интервальные вычисления количества машинного времени и объема выделяемых ресурсов. В результате проведения исследования получен ряд количественных показателей и зависимостей (табл. 1, рис. 3, 4), в частности отношение времени выполнения интервальных и традиционных операций, благодаря которым удалось установить, что, например, что интервальная операция вычитания выполняется примерно в 11 раз дольше операции вычитания вещественных чисел.

Как известно, деление выполняется намного медленнее, чем умножение. В свою очередь операция умножения намного медленнее операций сложения или вычитания [7, с. 209]. Этот факт полностью соответствует полученным результатам. Кроме того, полученные значения среднего времени при расчете функции $f(X)$ (табл. 1) полностью подтверждают, что СКА Mathematica использует алгоритмы реализации указанных в (3), (4) интервальных операций также и для частичной реализации алгоритмов операций (5) и (6). Поэтому операции вычитания и деления интервалов требуют больше машинного времени на выполнение, чем соотносящиеся с ними интервальные операции сложения и умножения.

Оценки изменения ширины интервала (7)–(10) указывают на необходимость «верификации» (сужения границ) результата после применения группы арифметических операций над интервальными операндами, что также требует значительных затрат машинного времени. Однако, использование интервалов как основного объекта данных, позволяет интервальным вычислениям избежать многих ошибок, связанных с потерей точности полученных результатов, в том числе ошибок округления при вычислениях с числами с плавающей запятой на цифровых ЭВМ.

Таким образом, на основании выполненных исследований можно сделать вывод, что существующие реализации интервальных вычислений позволяют успешно решать многие практические задачи, имеющие неопределенность в исходных данных, но при этом время обработки увеличивается примерно на порядок.

Список литературы

1. Добронец Б.С. Интервальная математика: учеб. пособие / Б.С. Добронец. – Красноярск: Краснояр. гос. ун-т., 2004. – 216 с.
2. Numerical toolbox for verified computing I: Basic numerical problems / [Hammer R., Hocks M., Kulisch U., Ratz D.]. – Berlin-Heidelberg: Springer, 1993. – 337 p.
3. C–XSC. A C++ class library for extended scientific computing / [Klatte R., Kulisch U., Wiethoff A., Lawo C.]. – Berlin etc.: Springer Verlag, 1993. – xvi, 270 p.
4. Wolfram Research: Mathematica, Technical and Scientific Software [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.wolfram.com.
5. Rastrigin function. From Wikipedia, the free encyclopedia [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://en.wikipedia.org/wiki/Rastrigin_function.
6. Компьютерная математика Mathematica: электронный учебник [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://clubmt.ru/Book_Mat/GL1/Index4.htm.
7. Клюшин Д.А. Полный курс С++. Профессиональная работа / Д.А. Клюшин. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 672 с.: ил.

Надійшла до редакції 10.10.2012

О.Я. Анопрієнко, С.В. Іваниця, Аль Рабаба Хамза
Донецький національній технічний університет

Аналіз часу виконання арифметичних операцій над інтервальними числами в СКА mathematica.

Проведено оцінку часових витрат при реалізації арифметичних операцій з числами в СКА Mathematica з використанням традиційних та інтервальних обчислень. Проведено дослідження при виконанні циклічних обчислень для кожної з найпростіших арифметичних операцій. Отримані апроксимуючі залежності та розрахований коефіцієнт збільшення часових витрат при переході до інтервальних обчислень.

Ключові слова: інтервал, дійсне число, арифметичні операції, система комп'ютерної алгебри

A. Anopriyenko, S. Ivanitsa, A.R. Hamza
Donetsk National Technical University

Analysis of the Arithmetic Operations Time on Interval Numbers in CAS mathematica.

We estimated the time spent for implementing arithmetic operations with real numbers in CAS Mathematica using conventional and interval arithmetics. During cyclic calculations we studied each of the elementary arithmetic operations. We obtained approximating dependences and calculated the coefficient of the increase of the time spent during the transition to interval computation.

Keywords: interval, real number, computer algebra system