УДК 004.272.2:519.63

О.А. Дмитриева, канд. техн.наук, доцент,
Л.П.Фельдман, докт.техн.наук, профессор,
Донецкий национальный технический университет,
dmitriv@r5.dgtu.donetsk.ua

Разработка и исследование параллельных коллокационных блочных методов

Разработаны параллельные коллокационные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрены вопросы генерации коэффициентов расчетных схем обобщенных коллокационных блочных методов, доказана устойчивость методов по начальным данным и по правой части. Параллельные коллокационные разностные формулы выводятся как для интегрирования на шаге, так и для блочных одношаговых и многошаговых многоточечных разностных схем. Предлагаемый подход является универсальным для получения разностных уравнений различных видов. Сгенерированные на основе такого подхода расчетные формулы для интегрирования на шаге эквивалентны неявным многостадийным методам, но обладают меньшей вычислительной сложностью и являются весьма эффективными при решении жестких уравнений.

Ключевые слова: задача Коши, точки коллокации, параллельный блочный метод, порядок аппроксимации, стадийный метод

Введение

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений представляют собой неотъемлемую часть моделирования динамических объектов, а их размер и сложность делает аппарат аналитических вычислений практически неприемлемым [1-2]. Проблема численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений является одной из базовых в вычислительной математике [3-5]. Такие задачи возникают как непосредственно в процессе математического моделирования [6-7], так и при генерации вторичных систем уравнений, например, при дискретизации задач математической физики методом прямых [8-9]. Более того, возможность привлечения к процессу моделирования мультипроцессорных систем породила необходимость в разработке эффективных параллельных численных методов для решения СОДУ, которые эффективно используют мощность таких систем [10-14].

Рассмотренные в [6,10] два типа коллокационных блочных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений: одношаговый и многошаговый, позволяют построить обобщенный подход к генерации коллокационных методов. При этом тип генерируемого блочного метода будет определяться количеством используемых опорных точек, или размерностью опорного блока [6,14]. Если в расчетной схеме для вычислений приближенных значений в следующем блоке используется только значение в последней точке предшествующего блока, будем говорить об одношаговом коллокационном блочном методе. Если используются все или несколько значений в точках предшествующего блока - многошаговом коллокационном блочном методе.

1. Обобщение метода построения коллокационных блочных методов

Для численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений понятие коллокации состоит в нахождении многочлена степени s, у которого в s заданных точках производные совпадают с векторным полем дифференциального уравнения. Пусть s - положительное натуральное число и $c_1, c_2, \dots, c_s$ - вещественные числа на отрезке [0,1]. Определим коллокационный многочлен $v(t)$ следующим образом:

$$v'(t_n + c_i\tau) = f\big(t_n + c_i\tau, v(t_n + c_i\tau)\big),$$
$$i = 1,2, \dots s, n = 0,1,2, \dots \qquad (1)$$

начальное условие

$$v(t_0) = x_0 \qquad (2)$$

Численное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения задается при этом

$$u_{n+1} = v(t_n + \tau). \qquad (3)$$

Если все узлы c_i различны, то тогда коллокационный метод (1) - (3) эквивалентен s

стадийному неявному методу Рунге - Кутта, у которого

$$a_{ij} = \int_0^{c_i} l_j(t)dt,\ \ b_j = \int_0^1 l_j(t)dt, i,j = 1,2,\dots,s,$$

где $l_j(t)$ являются базисными многочленами Лагранжа

$$l_j(t) = \prod_{n=1,n\neq j}^{s} \frac{t-c_n}{c_j-c_n}.$$

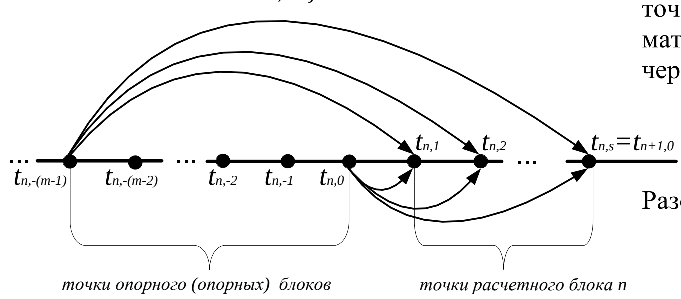

Рисунок 1 - Шаблон разностной схемы m-шагового s-точечного коллокационного блочного метода

Используя шаблон, приведенный на рис. 1, можно получить и более общие блочные коллокационные методы, выбрав в качестве точек коллокации

$$t_{n+j} = t_n + j\tau \in [t_{n-m+1}, t_{n+s}],$$
$$j = -(m-1), -(m-2), \dots, 0, 1, \dots s,$$

где m - целое неотрицательное число.

Рассмотрим вычислительные схемы для блоков, содержащих s узлов, при использовании вычисленных значений приближенного решения в m предшествующих блоку узлах (рис. 1). В случае многошагового блочного метода начальный блок будет содержать точки сетки, в которых заданы стартовые значения приближенного решения, необходимые для продолжения расчета.

Уравнения многошаговых разностных методов для блока из s точек при использовании вычисленных значений приближенного решения в m предшествующих блоку узлах, с учетом введенных выше обозначений можно записать в виде:

$$\frac{1}{\tau}\sum_{j=1-m}^{s} a_{i,j}u_{n,j} = \sum_{j=1-m}^{s} b_{i,j}f_{n,j}\,,\quad n = 1,2,\dots \quad (4)$$

Формулы (4) определяют m-шаговый s-точечный разностный метод. В нем множество точек

$$T_n^s = \{t_{n,1},\ t_{n,2}, \dots, t_{n,s}\},$$

в которых определяются приближенные значения решения. Множество

$$T_{n-1}^m = \{t_{n,1-m},\ t_{n,2-m}, \dots, t_{n,0}\}$$

содержит точки, приближенное значение решения в которых было вычислено на предыдущем этапе.

Для одношаговых методов, представляющих частный случай (4) если $m=1$, разностные уравнения имеют вид

$$\frac{1}{\tau}\sum_{j=0}^{s} a_{i,j}u_{n,j} = \sum_{j=0}^{s} b_{i,j}f_{n,j}\,,\quad n = 1,2,\dots \quad (5)$$

Формулы (5) определяют одношаговый s - точечный разностный метод. Обозначим матрицы коэффициентов системы уравнений (4) через

$$A = \{a_{i,j}\},\qquad B = \{b_{i,j}\},\ \ i = 1,2,\dots,s,$$
$$j = -(m-1), -(m-2), \dots, s.$$

Разобьем каждую из матриц на две части

$$A_1 = \{a_{i,j}\},\qquad B_1 = \{b_{i,j}\},\ \ i = 1,2,\dots,s,$$
$$j = -(m-1), -(m-2), \dots, 0$$
$$A_2 = \{a_{i,j}\},\qquad B_2 = \{b_{i,j}\},\ \ i = 1,2,\dots,s,$$
$$j = 1,2,\dots s.$$

Введем соответствующие вектора

$$U_n = \{u_{n,j}\},\qquad j = -(m-1), -(m-2), \dots, 0,$$
$$V_{n+1} = \{u_{n+1,j}\},\qquad n = 1,2,\dots, j = 1,2,\dots,s,$$
$$F_n = \{f_{n,j}\},\qquad j = -(m-1), -(m-2), \dots, 0,$$
$$F_{n+1} = \{f_{n+1,j}\},\qquad n = 1,2,\dots, j = 1,2,\dots,s.$$

В векторной форме уравнение (4) будет иметь вид

$$A_1U_n + A_2V_{n+1} =$$
$$= \tau(B_1F_n + B_2F_{n+1}),\qquad n = 1,2,\dots \quad (6)$$

Чтобы система однородных разностных уравнений, соответствующая (6) была линейно независима, потребуем, чтобы матрица

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,s} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \dots & a_{s,s} \end{bmatrix}$$

была невырожденной, и разрешим ее относительно V_{n+1}

$$V_{n+1} = QU_n + \tau(DF_n + GF_{n+1}), \quad (7)$$

где $Q = -A_2^{-1}A_1,\ D = A_2^{-1}B_1,\ G = A_2^{-1}B_2.$

Задав стартовые значения, полученные, например, с помощью явных формул Рунге – Кутта

$$U_0 = \{u_{0,j}\},\qquad j = 0,1,\dots,m-1,$$

необходимо на каждом последующем этапе решить нелинейное уравнение (7), определив последовательно вектора $V_1, V_2, \dots$

2. Генерация коэффициентов расчетных схем обобщенных коллокационных блочных методов

Представление общих блочных разностных многошаговых многоточечных уравнений в виде (7) будем называть канонической формой их записи. Получим коэффициенты уравнений, позволяющие представлять общие многошаговые многоточечные методы (4) в канонической форме (7). Каждое i-ое разностное уравнение

$$u_{n,i} = \sum_{j=1-m}^{0} q_{i,j}u_{n,j} + \tau\left(\sum_{j=1-m}^{0} d_{i,j}f_{n,j} + \sum_{j=1}^{s} g_{i,j}f_{n,j}\right) \quad (8)$$

содержит $2m+s$ неизвестных коэффициентов

$$q_{i,j},\ d_{n,j}, j = -(m-1), -(m-2), \dots, 0$$

и

$$g_{n,j}, \qquad j = 1,2,\dots,s.$$

Для их определения следует использовать $2m+s$ уравнений условий аппроксимации. Выражения для невязок на решении $x(t)$ исходного дифференциального уравнения имеют вид

$$r_{n,i} = \frac{1}{\tau}\left(-x_{n,i} + \sum_{j=1-m}^{0} q_{i,j}x_{n,j}\right) +$$

$$\sum_{j=1-m}^{0} d_{i,j}x'_{n,j} + \sum_{j=1}^{s} g_{i,j}x'_{n,j}, \ \ i = 1,2,\dots,s, \quad (9)$$

где $x_{n,j} = x(t_n + j\tau)$,
$x_{n-1,m} = x_{n,0}$,
$x'_{n,j} = x'(t_n + j\tau) = f(t_n + j\tau)$,
$x'_{n-1,m} = x'_{n,0}$.

Для *i-го* уравнения потребуем его аппроксимации в точке $t_{n,0}$

$$x_{n,j} = x(t_{n,0} + j\tau),$$
$$x'_{n,j} = x'(t_{n,0} + j\tau) = f(t_{n,0} + j\tau, x_{n,j}).$$

Раскладывая $x(t_{n,0} \pm j\tau)$ и $x'(t_{n,0} \pm j\tau)$ в ряды Тейлора в окрестности точки $t_{n,0}$, получим

$$x_{n,j} = x_{n,0} + \sum_{l=1}^{p} \frac{(j\tau)^l}{l!} x_{n,0}^{(l)},$$

$$x'_{n,j} = x_{n,0}^{(l)} + \sum_{l=2}^{p} \frac{(j\tau)^{l-1}}{(l-1)!} x_{n,0}^{(l)} + O(\tau^p),$$
$$j = -(m-1), -(m-1), \dots, s.$$

Подставляя эти разложения в выражение (9), будем иметь

$$r_{n,i} = \frac{1}{\tau}\left(x_{n,0}\left(-1 + \sum_{j=1-m}^{0} q_{i,j}\right)\right.$$
$$+\left(\frac{(j\tau)^l}{l!} + \sum_{j=1-m}^{0} q_{i,j} \sum_{l=1}^{p} \frac{(j\tau)^l}{l!}\right) x_{n,0}^{(l)} + \cdots \Bigg)$$
$$+$$
$$+x'_{n,0}\left(\sum_{j=1-m}^{0} d_{i,j} + \sum_{j=1}^{s} g_{i,j}\right)$$
$$+ \sum_{j=1-m, j\neq 0}^{0} d_{i,j} \sum_{l=2}^{p} \frac{(j\tau)^{l-1}}{(l-1)!} x_{n,0}^{(l)} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{s} g_{i,j} \sum_{l=2}^{p} \frac{(j\tau)^{l-1}}{(l-1)!} x_{n,0}^{(l)} + \cdots$$

После группировки членов с одинаковыми степенями по τ получим

$$r_{n,i} = \frac{x_{n,0}}{\tau}\left(-1 + \sum_{j=1-m}^{0} q_{i,j}\right) +$$
$$+x'_{n,0}\left(-i + \sum_{j=1-m}^{0} (jq_{i,j} + d_{i,j}) + \sum_{j=1}^{s} g_{i,j}\right) +$$
$$+\sum_{l=2}^{p} \frac{\tau^{l-1}}{(l-1)!}$$

$$\left(\sum_{j=1-m}^{0}\left(q_{i,j}\frac{j^l}{l} + g_{i,j}j^{l-1}\right) + \sum_{j=1}^{s} g_{i,j}\, j^{l-1}\right) x_{n,i-1}^{(l)}, \quad (10)$$

Приравняв нулю коэффициенты при τ^l в разложении (10), получим систему уравнений

$$\sum_{j=1-m}^{0} q_{i,j} = 1, \qquad i = 1,2,\dots,s,$$
$$\sum_{j=1-m}^{0} (jq_{i,j} + d_{i,j}) + \sum_{j=1}^{s} g_{i,j} = i;$$
$$\sum_{j=1-m}^{0}\left(q_{i,j}\frac{j^l}{l} + g_{i,j}j^{l-1}\right) + \sum_{j=1}^{s} g_{i,j}\, j^{l-1} = \frac{i^l}{l},$$
$$l = 2,3, \dots p, \quad (11)$$

Поскольку каждое i-ое разностное уравнение (8) содержит $2m+s$ неизвестных коэффициентов, то максимальный порядок аппроксимации рассматриваемого m-шагового s-точечного разностного метода равен

$$p = 2m + s - 1. \quad (12)$$

Каноническая форма одношаговых многоточечных уравнений будет иметь соответственно вид

$$u_{n,i} = u_{n,0} + \tau\left(d_{i,0}f_{n,0} + \sum_{j=1}^{s} g_{i,j}f_{n,j}\right). \quad (13)$$

Коэффициенты разностных уравнений (8) и (13) можно определить, решая систему (11) для общих многошаговых блочных методов, учитывая их частный вид, или интегро-интерполяционным методом. Для этого построим интерполяционный многочлен $L_{m+s-1}(t)$ с узлами интерполяции $t_{n,j-m}$ и соответствующими им значениями сеточной функции $u_{n,j},\ j=-(m-1),-(m-2),\dots,s.$ Найдем производные полученного интерполяционного многочлена в узлах сетки $t_{n,i},\ i=1,2,\dots,s.$ Приравняв их соответствующим значениям правой части дифференциального уравнения, получим разностные уравнения для блока. Наивысший порядок аппроксимации многошаговых разностных методов дифференцирования, рассматриваемых как частный вид общих многошаговых методов в соответствии с системой (11) равен $O(\tau^{2m+s-1})$.

Получим уравнения двухшагового $(m=2)$ двухточечного $(s=2)$ блочного метода пятого порядка аппроксимации $(p=5)$ вида (8) с шаблоном, представленным на рис. 2, как решение системы (11).

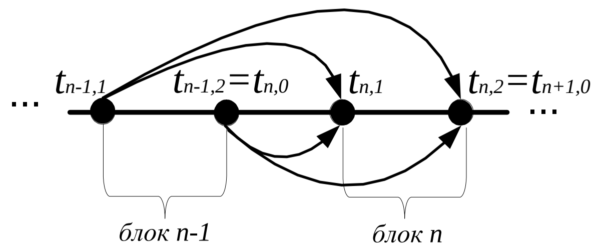

Рисунок 2 - Шаблон разностной схемы коллокационного 2-шагового 2-точечного блочного метода

Сформируем систему уравнений (11) и найдем из нее матрицы коэффициентов расчетной схемы

$$W=\begin{pmatrix}\frac{11}{19} & \frac{8}{19}\\ -\frac{8}{19} & \frac{27}{19}\end{pmatrix},\qquad Q=\begin{pmatrix}\frac{10}{57} & 1\\ -\frac{3}{19} & 0\end{pmatrix},$$

$$G=\begin{pmatrix}\frac{8}{19} & -\frac{1}{57}\\ \frac{27}{19} & \frac{6}{19}\end{pmatrix}.$$

Теперь можно сформировать канонический вид (8) исходной системы уравнений с параметрами $m=2,\ k=2,\ p=5$

$$\begin{pmatrix}v_{n,1}\\ v_{n,2}\end{pmatrix}=\tau\left(\begin{pmatrix}\frac{10f_{n,-1}}{57}+f_{n,0}\\ -\frac{3}{19}f_{n,-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{8f_{n,1}}{19}-\frac{f_{n,2}}{57}\\ \frac{27f_{n,1}}{19}+\frac{6f_{n,2}}{19}\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}\frac{11u_{n,-1}}{19}+\frac{8u_{n,0}}{19}\\ -\frac{8}{19}u_{n,-1}+\frac{27u_{n,0}}{19}\end{pmatrix}.$$

Используя изложенный выше подход, можно сформировать каноническую систему уравнений для любых значений параметров m и s.

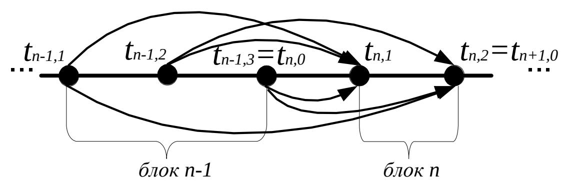

Рисунок 3 - Шаблон разностной схемы коллокационного 3-шагового 2-точечного блочного метода

В частности для параметров $m=3,\ s=2,$ $p=7$ с шаблоном, представленном на рис. 3, система будет выглядеть следующим образом

$$\begin{pmatrix}v_{n,1}\\ v_{n,2}\end{pmatrix}==\tau\left(\begin{pmatrix}\frac{141f_{n,-2}}{1360}+\frac{207f_{n,-1}}{170}+\frac{297f_{n,0}}{170}\\ -\frac{36}{85}f_{n,-2}-\frac{336f_{n,-1}}{85}-\frac{806f_{n,0}}{85}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{57f_{n,1}}{170}-\frac{9f_{n,2}}{1360}\\ \frac{144f_{n,1}}{85}+\frac{24f_{n,2}}{85}\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}\frac{55u_{n,-2}}{136}+\frac{27u_{n,-1}}{17}-\frac{135u_{n,0}}{136}\\ -\frac{54}{17}u_{n,-2}-\frac{128u_{n,-1}}{17}+\frac{199u_{n,0}}{17}\end{pmatrix}.$$

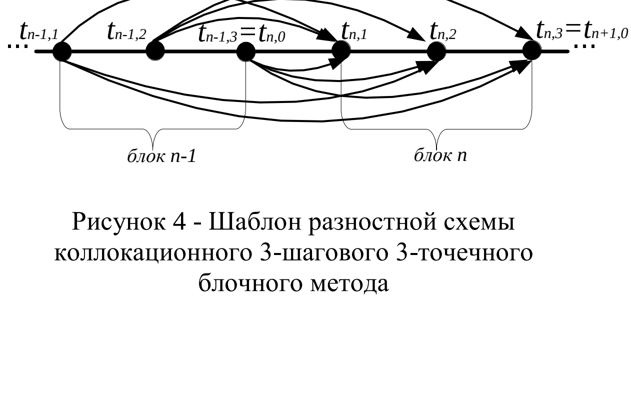

Рисунок 4 - Шаблон разностной схемы коллокационного 3-шагового 3-точечного блочного метода

Для $m = 3,\ k = 3,\ p = 8$

$$\begin{pmatrix} v_{n,1} \\ v_{n,2} \\ v_{n,3} \end{pmatrix} =$$

$$= \tau\left(\begin{pmatrix} \frac{2337 f_{n,-2}}{43570} + \frac{33687 f_{n,-1}}{43570} + \frac{31176 f_{n,0}}{21785} \\ -\frac{450 f_{n,-2}}{4357} - \frac{24144 f_{n,-1}}{21785} - \frac{54454 f_{n,0}}{21785} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{8256 f_{n,1}}{21785} - \frac{693 f_{n,2}}{43570} + \frac{9 f_{n,3}}{8714} \\ \frac{30816 f_{n,1}}{21785} + \frac{7446 f_{n,2}}{21785} - \frac{144 f_{n,3}}{21785} \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} \frac{955 u_{n,-2}}{4357} + \frac{5157 u_{n,-1}}{4357} - \frac{1755 u_{n,0}}{4357} \\ -\frac{3510 u_{n,-2}}{4357} - \frac{10240 u_{n,-1}}{4357} + \frac{18107 u_{n,0}}{4357} \end{pmatrix}.$$

3. Устойчивость по начальным данным обобщенных коллокационных блочных методов

Задача Коши для однородного уравнения, соответствующего (7) состоит в отыскании сеточной функции $V_{n+1} = \{u_{n+j}, j = 1,2,\dots,s\}$, удовлетворяющей при всех $n \geq 0$ уравнению:

$$V_{n+1} = QU_n \qquad (14)$$

при $U_n = \{u_{n-j}, j = 0,1,\dots,m-1\}$ и принимающей при $n = 0$ заданные начальные значения $U_0 = \{u_j, j = 0,1,\dots,m-1\}$.

Обозначим элементы матрицы $Q = \{q_{i,j}, i = 1,2,\dots,s, j = 1,\dots,m\}$. Для доказательства устойчивости преобразуем уравнения (14) к эквивалентной системе. Пусть $m > s$, тогда эта система будет иметь вид:

$$\begin{gathered} u_{n,-m+s+1} = u_{n,-m+s+1}, \dots, u_{n,0} = u_{n,0}, \\ u_{n+1} = q_{1,1}u_{n,-m+s+1} + q_{1,2}u_{n,-m+s+2} + \cdots \\ + q_{1,s}u_{n,0}, \\ \cdots \\ u_{n+s} = q_{s,1}u_{n,-m+s+1} + q_{s,2}u_{n,-m+s+2} + \cdots \\ + q_{s,s}u_{n,0}. \end{gathered} \qquad (15)$$

Представим ее в векторной форме:

$$W_{n+1} = \tilde{Q}W_n, \qquad n = 0,1,2,\dots \qquad (16)$$

где

$$\begin{gathered} W_n = \{u_{n,1-m}, u_{n,2-m}, \dots, u_{n,0}\}, \\ W_{n+1} = \{u_{n,s-m+1}, u_{n,s-m+2}, \dots, u_{n,s}\}, \\ W_0 = U_0 = \{u_{0,1}, u_{0,2}, \dots, u_{0,m}\}, \end{gathered}$$

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ q_{1,1} & q_{1,2} & & & \dots & & & & q_{1,m} \\ & & & & & & & & \\ q_{s,1} & q_{s,2} & & & \dots & & & & q_{s,m} \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

В матрице (17) размерности $m \times m$, последние s строк совпадают с матрицей Q, а первые m-s соответствуют первой строке уравнений в (15).

Для случая $m < s$, в векторной записи (16) следует положить

$$\begin{gathered} W_n = \{u_{n,1-s}, u_{n,2-s}, \dots, u_{n,0}\}, \\ W_{n+1} = \{u_{n,1}, u_{n,2}, \dots, u_{n,s}\}, \\ W_0 = U_0 = \{0, \dots, 0, u_{0,1}, u_{0,2}, \dots, u_{0,m}\}, \end{gathered}$$

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & q_{1,1-m} & q_{1,2-m} & \cdots & q_{1,0} \\ 0 & \dots & 0 & q_{2,1-m} & q_{2,2-m} & \cdots & q_{2,0} \\ & & & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & q_{s,1-m} & q_{s,2-m} & \cdots & q_{s,0} \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

В матрице (18), размерности $s \times s$, элементы первых m-s столбцов равны нулю, а последние m совпадают с матрицей Q.

Устойчивость или неустойчивость уравнения (16) по начальным данным определяется расположением корней характеристического уравнения матрицы $\tilde{Q}$. Будем считать, что условие корней выполнено для матрицы $\tilde{Q}$, если все корни ее характеристического уравнения лежат внутри или на границе единичного круга, причем на границе круга нет кратных корней.

Используем следующее определение устойчивости блочных многошаговых разностных методов. Уравнение (16) устойчиво по начальным данным, если существует постоянная M не зависящая от n и такая, что при любых начальных данных $W_0 = \{u_{0,j}, j = 1,2,\dots,m\}$ для его решения выполняется оценка

$$\|W_n\| \leq M\|W_0\|, \qquad n = 1,2,\dots \qquad (19)$$

Тем самым устойчивость означает равномерную по n ограниченность решения задачи Коши. Это определение равносильно требованию равномерной ограниченности матрицы $\tilde{Q}^n$ при всех $n > 0$ [15]. Запишем (16) в виде:

$$W_{n+1} = \tilde{Q}^n W_0, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

Для доказательства условий устойчивости по начальным данным уравнения (16) используем следующие утверждения [16]:

Лемма 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует норма вектора $\|\circ\|_*$ такая, что для подчиненной нормы матрицы справедливо неравенство

$$\|A\|_* \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Лемма 2. Если все корни характеристического уравнения матрицы A лежат внутри или на границе единичного круга комплексной плоскости, причем на границе круга нет кратных корней, то существует норма *вектора $\|\circ\|_*$ такая, что для подчиненной нормы матрицы A справедливо неравенство $\|A\|_* \le 1$.*

Следующая ниже теорема 1 является обобщением на блочные методы аналогичного утверждения для многошаговых разностных методов

Теорема 1. Условие корней необходимо и достаточно для устойчивости уравнения (16) по начальным данным.

Доказательство необходимости. Пусть матрица $\tilde{Q}$ имеет собственное число $q_s > 1$. Тогда для любой подчиненной нормы матрицы $\|\tilde{Q}\|_* > 1$ и $\|\tilde{Q}\|_C > 1$, следовательно, оценка (19) в этом случае невыполнима.

С помощью преобразования $\tilde{Q} = S^{-1}\hat{Q}S$ приведем матрицу $\tilde{Q}$ к модифицированной жордановой форме $\hat{Q}$ и введем норму вектора

$$\|W\|_* = \|S^{-1}W\|_c \qquad (20)$$

Пусть среди собственных чисел матрицы $\hat{Q}$, лежащих на границе единичного круга есть кратные, т.е. $|q_s| = 1$ кратности r. Тогда, соответствующая этому собственному числу клетка матрицы $\hat{Q}$ имеет вид:

$$\hat{Q}_s = \begin{pmatrix} q_s & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_s & \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_s \end{pmatrix}$$

Для нормы матрицы $\hat{Q}$ получим оценку:

$$\|\hat{Q}\|_* = \|\hat{Q}\|_C = \max_{1\le i\le m}\left(\sum_{j=1}^{m} \hat{q}_{ij}\right) =$$

$$\max_{1\le i\le m}(|\hat{q}_{ii}| + |\hat{q}_{ii+1}|) \ge |q_s| + \varepsilon = 1 + \varepsilon.$$

Оценка (19) в этом случае также невыполнима.

Доказательство достаточности. Из уравнений (16)

$$\|W_n\|_* \le \|\tilde{Q}\|_* \|W_{n-1}\|_* \le \|W_{n-1}\|_*,$$

следовательно

$$\|W_n\|_* \le \|W_0\|_*, n = 1,2,\dots \qquad (21)$$

По определению нормы

$$\|W\|_* = \|S^{-1}W\|_C \le \|S^{-1}\|_C \|W\|_C.$$

С другой стороны, для любой невырожденной матрицы S справедливо тождество

$$W = S.S^{-1}.W,$$

из которого следует оценка

$$\|W\|_C \le \|S\|_C \|S^{-1}W\|_C \le \|S\|_C \|W\|_*.$$

Таким образом, если норма $\|\circ\|_*$ определена равенством (20), то выполняются оценки

$$\|S^{-1}\|_C \|W\|_C \le \|W\|_* \le \|S\|_C^{-1} \|W\|_C \quad (22)$$

Из (21) и (22) следует

$$\|S^{-1}\|_C \|W_n\|_C \le \|W\|_* \le \|S\|_C^{-1} \|W_0\|_C.$$

Получим оценку

$$\|W_n\|_C \le \|S^{-1}\|_C^{-1} \|S\|_C^{-1} \|W_0\|_C,$$

которая показывает, что существует постоянная $M = \|S^{-1}\|_C^{-1} \|S\|_C^{-1}$, не зависящая от n, т.е. условие устойчивости по начальным данным (19) выполняется.

4. Устойчивость по правой части обобщенных коллокационных блочных методов

В подразделе 3 была получена оценка решения однородного уравнения (16) через начальные данные. Получим оценку решения неоднородного уравнения (7).

$$V_{n+1} = QU_n + \tau(DF_n + GF_{n+1})$$

Аналогично п. 3 перейдем к эквивалентной системе уравнений:

$$\begin{aligned} &y_{n,-m+s+1} = y_{n,-m+s+1}, \dots, y_{n,0} = y_{n,0}, \\ &y_{n+1} = q_{1,1}y_{n,-m+s+1} + q_{1,2}y_{n,-m+s+2} + \cdots \\ &\quad + q_{1,s}y_{n,0}, \\ &\dots \\ &y_{n+s} = q_{s,1}y_{n,-m+s+1} + q_{s,2}y_{n,-m+s+2} + \cdots \\ &\quad + q_{s,s}y_{n,0}. \end{aligned} \qquad (23)$$

Переобозначим значения введенных в (7) элементов и матриц

$$\begin{gathered} Y_n = \{y_{n,1-m}, y_{n,2-m}, \dots, y_{n,0}\}, \\ Y_{n+1} = \{y_{n,s-m+1}, y_{n,s-m+2}, \dots, y_{n,s}\}, \\ Y_0 = \{y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,m}\}, \\ F_n = \{f(t_{n,j}y_{n,j})\}, j = 1-m, 2-m, \dots, 0, \\ F_{n+1} = \{f(t_{n,j}y_{n,j})\}, \\ j = s-m+1, s-m+2, \dots, s, \end{gathered} \qquad (24)$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ g_{1,1} & g_{1,2} & & & \dots & & & & g_{1,m} \\ & \dots & & & & & & \dots & \\ g_{s,1} & g_{s,2} & & & \dots & & & & g_{s,m} \end{pmatrix}.$$

Использовав введенные вектора, получим вместо (7) следующее уравнение:

$$Y_{n+1} = \tilde{Q}Y_n + \tau(D\tilde{F}_n + G\tilde{F}_{n+1}) \qquad (25)$$

Значения $Y_0 = \{y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,m}\}$ заданы. Для каждой правой части решение задачи Коши может быть найдено по формуле (25). Представим уравнение (25) в виде:

$$\begin{gathered} Y_{n+1} = \tilde{Q}Y_n + \tau H_n \\ H_n = \{h_{n,1-m}, h_{n,2-m}, \dots, h_{n,0}\}. \end{gathered} \qquad (26)$$

Матрица $\tilde{Q}$ определена согласно (17). Пусть уравнение (16) устойчиво по начальным данным. Тогда, согласно теореме 1, выполнено условие корней, т.е. для некоторой нормы матрицы $\tilde{Q}$ справедливо неравенство $\|\tilde{Q}\|_* \le 1$. Таким образом, из (26) получаем неравенство:

$$\|Y_{n+1}\|_* \le \|Y_n\|_* + \tau\|H_n\|_*, n = 1,2, \dots$$

Суммируя эти неравенства по n от 1до l, получим:

$$\|Y_{n+1}\|_* \le \|Y_n\|_* + \tau \sum_{n=1}^{l} \|H_n\|_*. \qquad (27)$$

Используя далее неравенство (22), устанавливающее эквивалентность норм $\|\circ\|_*$ и $\|\circ\|_C$. Тогда, из (27) получим:

$$\|S^{-1}\|_C \|Y_{l+1}\|_C \le \|S\|_C{}^{-1}(\|Y_l\|_C + \tau \sum_{n=1}^{l} \|H_n\|_C).$$

Отсюда, получим

$$\|Y_{l+1}\|_C \le \|S^{-1}\|_C{}^{-1} \|S\|_C{}^{-1}(\|Y_l\|_C + \tau \sum_{n=1}^{l} \|H_n\|_C).$$

Таким образом,

$$\|Y_{l+1}\|_C \le M_1(\max_{0\le j\le m-1} |y_j| + \tau \sum_{n=1}^{l} \|H_n\|_C). \qquad (28)$$

где $M_1 =\le \|S^{-1}\|_C{}^{-1} \|S\|_C{}^{-1}$.

Выполнение оценки (28) означает по определению устойчивость уравнения (26) по правой части [16].

Выводы

В работе рассмотрены вопросы разработки коллокационных методов решения задачи Коши, вывод расчетных схем для которых базировался на использовании интегро – интерполяционного подхода. Коллокационные разностные формулы выводятся как для интегрирования на шаге, так и для блочных одношаговых и многошаговых многоточечных разностных схем решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Предлагаемый подход является универсальным для получения разностных уравнений различных видов. Получаемые на основе такого подхода расчетные формулы для интегрирования на шаге эквивалентны неявным многостадийным методам Рунге- Кутты (НМРК), но обладают меньшей вычислительной сложностью и являются весьма эффективными при решении жестких уравнений.

Получены расчетные схемы для общих m - шаговых s - точечных блочных методов, определен порядок их точности. Кроме того, предлагаемый подход позволяет генерировать расчетные схемы заданного порядка точности, основываясь на фиксированном количестве опорных или расчетных точек. Определены условия устойчивости по Далквисту и доказана сходимость устойчивых по начальным данным обобщенных m - шаговых s - точечных блочных методов к точному решению. Получена априорная оценка погрешности приближенного решения.

Полученные результаты представляют возможности построения новых более эффективных параллельных алгоритмов и их реализации на современных параллельных вычислительных системах. Обобщенные коллокационные блочные многошаговые многоточечные методы, рассмотренные в разделе, существенно расширяют класс разностных методов решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Список литературы

1. Kendall E. A. Numerical solution of ordinary differential equations/ E. A. Kendall, H. Weimin, D. Stewart – Hoboken: New Jersey, John Wiley and Sons, 2007. - 252 p. - ISBN 978-0-470-04294-6.
2. Jackiewicz Z. General linear methods for ordinary differential equations / Z. Jackiewicz - Hoboken: New Jersey, John Wiley and Sons, 2009. – 482 p. - ISBN 978-0-470-40855-1.
3. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие задачи./ Э. Хайрер, Г. Ваннер - М.: Мир, 1999.- 685с.
4. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи./ Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. - М.: Мир, 1990.- 512с.
5. Куликов Г. Ю. Об автоматическом управлении размером шага и порядком в неявных одношаговых экстраполяционных методах / Г. Ю. Куликов, Е. Ю. Хрусталева // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2008, Т. 48, № 9, с. 1580-1606.
6. Дмитрієва О.А. Паралельні різницеві методи розв'язання задачі Коши / О.А. Дмитрієва - Донецьк: ДонНТУ, 2011. 265 с.
7. Feldman L.P. Embedded block parallel methods for initial Cauchy problem numerical solution / L.P. Feldman, I.A. Nazarova, O.A. Dmitrieva, T.V. Mikhaylova // Proceedings of Donetsk National Technical University. №1, 2010, pp.12-17
8. Фельдман Л.П. Чисельні методи в інформатиці / Л.П. Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва – К.: Видавнича група BHV , 2006. – 480 с.

9. Абрамов Ф.А. Моделирование динамических процессов рудничной аэрологии / Ф.А. Абрамов, Л.П. Фельдман, В.А. Святный - Киев: «Наукова думка», 1981.- 284 с.
10. Дмитрієва О.А. Генерація стійких блокових методів для розв'язання жорстких диференційних рівнянь і їх систем / О.А. Дмитрієва // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія "Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка" (ІКОТ-2011). Випуск 14(188) – Донецьк: ДонНТУ. – 2011. С. 36-43
11. Дмитриева О.А. Упрощение итераций при параллельной реализации неявных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений/ О.А. Дмитрієва // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія "Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка" (ІКОТ-2011). Випуск 13(185) – Донецьк: ДонНТУ. – 2011. С. 13-18
12. Дмитриева О.А. Параллельное моделирование жестких систем на основе диагонализации полной матрицы/ О.А. Дмитрієва // Искусственный интеллект, - № 4. – 2011. - С. 46-13. Фельдман Л.П. Паралельні однокрокові методи чисельного розв'язання задачі Коші / Л.П. Фельдман, І.А. Назарова: монографія– Донецьк: «ДВНЗ» ДонНТУ, 2011. – 185 с.: іл.
14. Dmitrieva O. Dynamic System Simulation. Robust algorithms of state estimation of dynamic lumped parameters systems/ O.Dmitrieva, A. Firsova – LAP Lambert Academic Publishing, 2011. – 92 p.
15. Фельдман Л.П. Параллельные алгоритмы моделирования динамических систем, описываемых обыкновенными диффе-ренциальными уравнениями/ Л.П. Фельдман // Электронное моделирование, том 26, № 1, 2004.- С. 19-30.
16. Самарский А.А. Численные методы/ А.А. Самарский, А.В. Гулин - М.: Наука, 1989.- 432с.

Надійшла до редколегії 30.10.2012

О.А. ДМИТРІЄВА, Л.П.ФЕЛЬДМАН
Донецький національний технічний університет

Розробка й дослідження паралельних колокаційних блокових методів

Розроблено паралельні колокаційні методи розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь. Розглянуто питання генерації коефіцієнтів розрахункових схем узагальнених колокаційних блокових методів, доведена стійкість методів за початковим даними й по правій частині. Паралельні колокаційні різницеві формули виводяться як для інтегрування на кроці, так і для блокових однокрокових і багатокрокових багатоточкових різницевих схем. Пропонований підхід є універсальним для одержання різницевих рівнянь різних видів. Згенеровані на основі такого підходу розрахункові формули для інтегрування на кроці еквівалентні неявним багатостадійним методам, але мають меншу обчислювальну складність і є досить ефективними при розв'язанні жорстких рівнянь.

Ключові слова: задача Коші, точки колокації, паралельний блоковий метод, порядок апроксимації, стадійний метод

O.A. DMITRIIEVA, L.P. FELDMAN
Donetsk National Technical University

Development and Research of Parallel Collocation Block Methods

Parallel collocation methods for Cauchy problem solution are developed for the ordinary differential equations. Questions of generation of factors of settlement schemes of the generalized collocation block methods are considered, stability of methods according to initial data and on the right part is proved. Parallel collocation difference formulas are deduced both for integration on a step, and for block single-step and multistep multipoint difference schemes. The offered approach is universal for receiving the difference equations. To generated on the basis of such approach settlement formulas for integration on a step are equivalent to implicit multiphasic methods, but possess smaller computing complexity and are very effective at the solution of the stiff equations.

Keywords: Cauchy problem, collocation points, parallel block method, approximation order, phasic method