УДК 51-74

Ю.Н. Добровольский, ст. преп.,
ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк, Украина

Поиск аналитического решения модельной задачи о напорной фильтрации газовой смеси в сплошной среде (на примере пневмообработки угольного пласта)

Впервые предложены аналитические методы при решении задачи о напорной фильтрации газовой смеси в сплошной среде. Приведены теоретические сведения и практические аспекты применения методов.

Ключевые слова: метод обобщенного и функционального разделения переменных, решение в неявном виде, решение в виде квадратичной функции относительно аргумента x, решение путем дифференцирования, решение в параметрической форме.

Введение

В работах [1-4] предложена математическая модель процесса движения воздуха в трещиновато-пористой сплошной среде, в основу которой положена система дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа и предложен численный метод решения. Показано, что модель с достаточной степенью приближения описывает процесс нагнетания воздуха в угольный пласт. Результаты работы были приняты и использованны в работах МакНИИ и со ссылкой на источник использованы в докторской диссертации, посвященной развитию теоретических основ гидропневматической обработки угольных пластов.

Вместе с тем, для дальнейших теоретических исследований необходимо искать аналитические решения, т. к. точные аналитические решения наглядно показывают характер процессов и позволяют разобраться в механизме таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением и др. Численными методами эти явления практически невозможно исследовать.

С другой стороны, не всякие точные решения имеют ясный физический смысл, для чего есть много причин (например, нарушена адекватность или корректность постановки задачи, не учтена область возможных изменений входных параметров, а только область допустимых значений и многое другое).

Большинство уравнений прикладной и теоретической физики, химии и биологии содержат параметры или функции, которые находятся экспериментально и потому не строго фиксированы. В то же время уравнения, моделирующие реальные явления и процессы, должны быть достаточно просты для того, чтобы их можно было успешно проанализировать и решить. В качестве одного из возможных критериев простоты можно принять требование, чтобы модельное уравнение допускало решение в замкнутом (разрешенном) виде. При этом особый интерес для приложений представляют собой уравнения, зависящие от произвольных функций или содержащие много свободных параметров, которые можно задавать по усмотрению исследователя.

Теоретические основы для разработки аналитических методов решения системы дифференциальных уравнений параболического типа

Имеем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = T\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left[u\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = T\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left[v\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = T\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left[w\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} = -u\,\dfrac{\partial T}{\partial x} \end{cases} \qquad (1)$$

Предположим, что внешнее воздействие происходит при постоянной температуре **T** т.е $T=T_0\equiv const$, или температура T задана дискретно априори, тогда последнее уравнение системы (1) удовлетворяется тождественно.

Запишем систему (1) в развернутом виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = T\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = T\left[\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = T\left[\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + w\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} = -u\dfrac{\partial T}{\partial x} \end{cases} \qquad (2)$$

Методы обобщенного и функционального разделения переменных

Метод разделения переменных является самым распространенным методом решения линейных уравнений математической физики. Для уравнений с двумя независимыми переменными x и t и искомой функцией u этот метод базируется на поиске точных решений в виде произведения функций разных аргументов

$u(x,t)=\varphi(x)\psi(t)$ (3)

Интегрирование отдельных классов нелинейных уравнений с частными производными первого порядка основано на поиске точных решений в виде суммы функций разных аргументов

$u(x,t)=\varphi(x)+\psi(t)$ (4)

Такие решения называют решениями с обычным разделением переменных.

Представляет интерес поиск точных решений, имеющих более сложную структуру

$u(x,t)=\varphi(x)\psi(t)+\chi(t)$ (5)

и решения, соответствующие перестановке независимых переменных x и t в правой части (5). В частном случае $\chi(t)=0$ решение (5) переходит в решение (3), а в случае $\psi(t)=1$ – в решение (4). Такие решения называют решениями с обобщенным разделением переменных.

В данной статье покажем, что первое уравнение системы (1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = T_0\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial u}{\partial x}\right] \qquad (6)$$

второго порядка с квадратичной нелинейностью также имеет точное решение вида (3),(4) или (5). Существуют точные решения с обобщенным разделением переменных, содержащие большее число слагаемых, чем в (5). Такие решения основаны на отыскании конечномерных подпространств, инвариантных относительно соответствующих нелинейных дифференциальных операторов.

Замечание. Во многих случаях разделение переменных в нелинейных уравнениях происходит иначе, чем в линейных уравнениях.

<u>Метод №1.</u> Простейший метод разделения переменных.

Ищем решение уравнения (6) в виде: $u=\varphi(x)\psi(t)$. Находим частные производные: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \varphi\psi'_t$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \varphi'_x\psi$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''_{xx}\psi$ и подставляем в уравнение (6).

$$\varphi\psi'_t = T_0\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\psi\varphi'_x\psi\right) = T_0\psi^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\varphi'_x\right),$$

$$\varphi\psi'_t = T_0\psi^2\left(\varphi\varphi'_x\right)'_x$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{\psi'_t}{\psi^2} = \frac{T_0\left(\varphi\varphi'_x\right)'_x}{\varphi} = \lambda, \text{ где } \lambda \equiv \text{const}.$$

Решая соответствующие уравнения, в итоге получим:

$$\frac{\psi'_t}{\psi^2} = \lambda \Rightarrow \int\frac{d\psi}{\psi^2} = \lambda\int dt \Rightarrow -\frac{1}{\psi} = \lambda t + C_1$$

$$\Rightarrow \quad \psi = -\frac{1}{\lambda t + C_1}.$$

$$\frac{T_0\left(\varphi\varphi'_x\right)'_x}{\varphi} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \varphi'^2_x + \varphi\varphi''_{xx} = \frac{\lambda\varphi}{T_0},$$

выполним замену $\varphi'=p(\varphi)$, $\varphi''=p'\varphi'=p'p$. Подставив в уравнение, получим $p^2 + \varphi p'p = \dfrac{\lambda\varphi}{T_0}$ – уравнение Бернулли. Замена $z=p^2$, $z'=2pp'$.

$$\frac{z'}{2} + \frac{z}{\varphi} = \frac{\lambda}{T_0} \quad \Rightarrow \quad z' + \frac{2z}{\varphi} = \frac{2\lambda}{T_0}.$$

Полученное линейное уравнение решаем заменой $z=uv$, $z'=u'v+uv'$. Подставим в уравнение:

$$u'v + uv' + \frac{2uv}{\varphi} = \frac{2\lambda}{T_0} \Rightarrow u'v + u(v' + \frac{2v}{\varphi}) = \frac{2\lambda}{T_0}$$

$$\Rightarrow \quad v' + \frac{2v}{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dv}{dv} = -2\int\frac{d\varphi}{\varphi}$$

$$\ln|v| = \ln|\varphi|^{-2} \Rightarrow v = \varphi^{-2} \Rightarrow \frac{du}{d\varphi}\varphi^{-2} = \frac{2\lambda}{T_0}$$

$$\Rightarrow \int du = \frac{2\lambda}{T_0}\int\varphi^2 d\varphi \Rightarrow u = \frac{2\lambda}{T_0}\cdot\frac{\varphi^3}{3} + C_1$$

$$z = \varphi^{-2}\left(\frac{2\lambda}{T_0}\cdot\frac{\varphi^3}{3} + C_1\right) = \frac{2\lambda}{3T_0}\varphi + C_1\varphi^{-2} \Rightarrow$$

$$\varphi'^2 = \frac{2\lambda}{3T_0}\varphi + C_1\varphi^{-2} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{\frac{2\lambda}{3T_0}\varphi + C_1\varphi^{-2}}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{\frac{2\lambda}{3T_0}\varphi + \frac{C_1}{\varphi^2}} = \sqrt{\frac{2\lambda\varphi^3 + 3T_0C_1}{3T_0\varphi^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3T_0}\,\varphi}\cdot\sqrt{2\lambda\varphi^3 + 3T_0C_1} \Rightarrow$$

$$\sqrt{3T_0}\int\frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{2\lambda\varphi^3 + 3T_0C_1}} = x + C_2$$

Интеграл не берется в элементарных функциях. Поэтому рассмотрим частный случай $C_1=0$.

$$\frac{\sqrt{3T_0}}{\sqrt{2\lambda}}\int\frac{\varphi d\varphi}{\varphi\sqrt{\varphi}}=\frac{\sqrt{3T_0}}{\sqrt{2\lambda}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi}}=\frac{\sqrt{3T_0}}{\sqrt{2\lambda}}\frac{\varphi^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=$$

$$2\sqrt{\frac{3T_0}{2\lambda}}\sqrt{\varphi}\Rightarrow\sqrt{\varphi}=\frac{x+C_2}{2\sqrt{\frac{3T_0}{2\lambda}}}=\frac{\sqrt{2\lambda}(x+C_2)}{2\sqrt{3T_0}}$$

$$\varphi=\frac{\lambda(x+C_2)^2}{6T_0}\quad\Rightarrow\quad u=\varphi(x)\psi(t)=$$
$$=-\frac{\lambda}{6T_0}\frac{(x+C_2)^2}{(\lambda t+C_1)}$$

Метод №2.Поиск решения в неявном виде. Рассматриваем уравнение (6). Очевидно, $u_1(x,t)=C_1x+T_0C_1^2t+C_2$ - решение (6). Ищем решение в виде: $u(x,t)=\varphi(u)+C_1x+T_0C_1^2t+C_2$, где *φ(u)* функция, подлежащая определению. Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial t}+T_0C_1^2\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{T_0C_1^2}{1-\varphi'(u)}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+C_1\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{C_1}{1-\varphi'(u)}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{C_1}{(1-\varphi'(u))^2}\cdot(-\varphi''(u))\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=$$
$$=\frac{C_1^2\varphi''(u)}{(1-\varphi'(u))^3}$$

подставим в (6), получим

$$\frac{T_0C_1^2}{1-\varphi'(u)}=T_0\left[\frac{C_1^2}{(1-\varphi'(u))^2}+\frac{uC_1^2\varphi''(u)}{(1-\varphi'(u))^3}\right].$$

Предполагаем, что $\frac{T_0C_1^2}{1-\varphi'(u)}\neq 0$, тогда

$$1=\frac{1}{1-\varphi'(u)}+\frac{u\varphi''(u)}{(1-\varphi'(u))^2}.$$

Выполним замену:

$$p=\varphi'(u),\ p'=\varphi''(u)\ \Rightarrow\ 1=\frac{1}{1-p}+\frac{up'}{(1-p)^2}$$

Пусть $p-1\neq0$, тогда $p'=\frac{p(p-1)}{u}$, или

$$\frac{dp}{p(p-1)}=\frac{du}{u}\quad\Rightarrow\quad\int\frac{dp}{p(p-1)}=\int\frac{du}{u}\quad\Rightarrow$$
$$\int\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)dp=\int\frac{du}{u}\quad\Rightarrow$$
$$\ln|p-1|-\ln|p|+\ln|C|=\ln|u|\quad\Rightarrow$$
$$\ln\left|\frac{C(p-1)}{p}\right|=\ln|u|\quad\Rightarrow\quad\frac{C(p-1)}{p}=u$$
$$p=\frac{C}{C-u}\quad\Rightarrow\quad\varphi'=\frac{C}{C-u}\quad\Rightarrow\quad\int d\varphi=C\int\frac{du}{C-u}$$
$$\Rightarrow\quad\varphi=-C\int\frac{d(u-C)}{u-C}=-C\ln|u-C|.$$

Положим – *C*=*C*$_3$, тогда $\varphi(u)=C_3 ln|u+C_3|$.

Таким образом получено решение:

$$u(x,t)=C_3\ln|u+C_3|+C_1x+T_0C_1^2t+C_2$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что u(x,t) есть решение уравнения (6).

Метод №3. Поиск решения в виде квадратичной функции относительно аргумента x.

Ищем решение в виде $u(x,t)=\varphi(t)x^2+\psi(t)x+\chi(t)$. Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varphi'(t)x^2+\psi'(t)x+\chi'(t),\frac{\partial u}{\partial x}=2x\varphi(t)+\psi(t),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\varphi(t).$$

Подставим частные производные в (6) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части.

$$\varphi'(t)x^2+\psi'(t)x+\chi'(t)=$$
$$=T_0\left[(2x\varphi(t)+\psi(t))^2+(\varphi(t)x^2+\psi(t)x+\chi(t))2\varphi(t)\right]$$

После элементарных преобразований получим:

$$\varphi'(t)x^2+\psi'(t)x+\chi'(t)=$$
$$=T_0[6x^2\varphi^2(t)+6x\varphi(t)\psi(t)+\psi^2(t)+$$
$$+2\varphi(t)\chi(t)]$$
$$x^2:\varphi'(t)=6T_0\varphi^2(t)$$
$$x:\psi'(t)=6T_0\varphi(t)\psi(t)$$
$$x^0:\chi'(t)=T_0[\psi^2(t)+2\varphi(t)\chi(t)]$$

Решаем каждое из полученных трех уравнений.

$$\frac{d\varphi}{dt}=6T_0\varphi^2(t)\Rightarrow\int\frac{d\varphi}{\varphi^2(t)}=6T_0\int dt\quad\Rightarrow$$
$$-\frac{1}{\varphi}=6T_0t+C_1\quad\Rightarrow\quad\varphi=-\frac{1}{6T_0t+C_1}$$
$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{-6T_0\psi}{6T_0t+C_1}\Rightarrow\int\frac{d\psi}{\psi}=-6T_0\int\frac{dt}{6T_0+C_1}$$
$$\ln|\psi|=-\int\frac{d(6T_0t+C_1)}{6T_0t+C_1}=$$
$$=-\ln|6T_0t+C_1|+\ln|C_2|$$
$$\psi=\frac{C_2}{6T_0t+C_1},$$
$$\chi'(t)+\frac{2T_0}{6T_0t+C_1}\chi(t)=\frac{T_0C_2^2}{(6T_0t+C_1)^2}$$

Последнее уравнение линейное, поэтому замена: *χ(t)=uv*. Решаем последнее уравнение.

$$u'v+uv'+\frac{2T_0}{6T_0t+C_1}uv=\frac{T_0C_2^2}{(6T_0t+C_1)^2}\Rightarrow$$
$$u'v+u(v'+\frac{2T_0}{6T_0t+C_1}v)=\frac{T_0C_2^2}{(6T_0t+C_1)^2}$$
$$\frac{dv}{dt}=\frac{-2T_0}{6T_0t+C_1}v\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=-2T_0\int\frac{dt}{6T_0t+C_1}$$
$$\Rightarrow\ln|v|=-\frac{1}{3}\int\frac{d(6T_0t+C_1)}{6T_0t+C_1}=-\frac{1}{3}\ln|6T_0t+C_1|$$

$$v=(6T_0t+C_1)^{-\frac{1}{3}},\quad \frac{du}{dt}(6T_0t+C_1)^{-\frac{1}{3}}=$$

$$=\frac{T_0C_2^2}{(6T_0t+C_1)^2}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{T_0C_2^2(6T_0t+C_1)^{\frac{1}{3}}}{(6T_0t+C_1)^2}=T_0C_2^2(6T_0t+C_1)^{-\frac{5}{3}}$$

$$u=T_0C_2^2\int(6T_0t+C_1)^{-\frac{5}{3}}dt=$$

$$=\frac{C_2^2}{6}\int(6T_0t+C_1)^{-\frac{5}{3}}d(6T_0t+C_1)=.$$

$$=-\frac{C_2^2}{6}\cdot\frac{3}{2}(6T_0t+C_1)^{-\frac{2}{3}}+C_3$$

$$\chi(t)=\left[-\frac{C_2^2}{4}(6T_0t+C_1)^{-\frac{2}{3}}+C_3\right]\cdot(6T_0t+C_1)^{-\frac{1}{3}}=$$

$$=-\frac{C_2^2}{4}(6T_0t+C_1)^{-1}+C_3(6T_0t+C_1)^{-\frac{1}{3}}.$$

$$u(x,t)=\frac{-1}{6T_0t+C_1}x^2+\frac{C_2}{6T_0t+C_1}x-$$

$$-\frac{C_2^2}{4(6T_0t+C_1)}+\frac{C_3}{\sqrt[3]{6T_0t+C_1}}$$

Проверкой убеждаемся, что $u(x.t)$ есть решение уравнения (6).

Метод №4. Поиск решения путем дифференцирования.

Ищем решение (6) с обобщенным разделением переменных.

$u=\varphi(t)+\psi(t)\theta(x)$.

Находим частные производные.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varphi'+\psi'\theta,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\psi\theta',\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\psi\theta''.$$

Подставим в уравнение (6):

$$\begin{aligned}&\varphi'_t+\psi'_t\theta=T_0\left[\psi^2\theta'^2_x+(\varphi+\psi\theta)\psi\theta''_{xx}\right]\Rightarrow\\&\varphi'_t+\psi'_t\theta=T_0\left[\psi^2\theta'^2_x+\varphi\psi\theta''_{xx}+\psi^2\theta\theta''_{xx}\right]\end{aligned}\tag{7}$$

Разделим на ψ^2, а потом продифференцируем по t и x, получим

$$\frac{\varphi'_t+\psi'_t\theta}{\psi^2}=T_0\left[\theta'^2_x+\frac{\varphi\theta''_{xx}}{\psi}+\theta\theta''_{xx}\right]$$

$$\left(\frac{\varphi'_t}{\psi^2}\right)'_t+\left(\frac{\psi'_t\theta}{\psi^2}\right)'_t=$$

$$=T_0\left[\left(\theta'^2_x\right)'_t+\left(\frac{\varphi\theta''_{xx}}{\psi}\right)'_t+\left(\theta\theta''_{xx}\right)'_t\right]$$

$$\left(\frac{\psi'_t}{\psi^2}\right)'_t\theta'_x=T_0\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)'_t\theta'''_{xxx}.$$

Разделяя переменные, приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям (K – произвольная постоянная).

$$\frac{(\psi'_t/\psi^2)'_t}{(\varphi/\psi)'_t}=T_0\frac{\theta'''_{xxx}}{\theta'_x}=K,$$

$$\theta'''_{xxx}=K\theta'_x\tag{8}$$

$$(\psi'_t/\psi^2)'_t=T_0K(\varphi/\psi)'_t,\tag{9}$$

Решаем уравнение (8).

1). При K=0, уравнение принимает вид:

$$\theta'''_{xxx}=0\quad\Rightarrow\quad\theta''_{xx}=2A_1,\quad\theta'_x=2A_1x+A_2,$$

$$\theta=A_1x^2+A_2x+A_3.$$

2). При $K=\lambda^2>0$.

$z^3-\lambda^2z=0,\ z(z^2-\lambda^2)=0,\ z_1=0,\ z_{2,3}=\pm\lambda,$

$\theta(x)=A_1e^{\lambda x}+A_2e^{-\lambda x}+A_3$

3). При $K=-\lambda^2<0$.

$z(z^2+\lambda^2)=0,\ z_1=0,\ z_{2,3}=\pm\lambda i,$

$\theta(x)=A_1\sin(\lambda x)+A_2\cos(\lambda x)+A_3$

Общее решение (8) дается формулами

$$\theta=\begin{cases}A_1x^2+A_2x+A_3 & при\ K=0\\ A_1e^{\lambda x}+A_2e^{-\lambda x}+A_3 & при\ K=\lambda^2>0\\ A_1\sin(\lambda x)+A_2\cos(\lambda x)+A_3 & приK=-\lambda^2<0\end{cases}\tag{10}$$

где A_1, A_2, A_3 – произвольные постоянные.

Интегрируя уравнение (9), находим:

$$\left(\frac{\psi'_t}{\psi^2}\right)'_t=T_0K\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)'_t\Rightarrow\quad\frac{\psi'_t}{\psi^2}=T_0K\frac{\varphi}{\psi}+C$$

4). При K=0.

$$\frac{\psi'_t}{\psi^2}=C\Rightarrow\frac{d\psi}{dt}=C\psi^2,\quad\int\frac{d\psi}{\psi^2}=C\int dt$$

$$\Rightarrow\quad\psi=\frac{-1}{Ct+C_1}=\frac{B}{t+C_1},$$

где $B=-1/C$ – произвольная постоянная, $\varphi(t)$ – любая функция.

5). При $K\neq0$.

$$\frac{\psi'_t}{\psi^2}=T_0K\frac{\varphi}{\psi}+C\quad\Rightarrow T_0K\frac{\varphi}{\psi}=\frac{\psi'_t}{\psi^2}-C$$

$$\Rightarrow\varphi=\frac{1}{T_0K}\frac{\psi'_t}{\psi}-\frac{C\psi}{T_0K}\Rightarrow\quad\varphi=B\psi+\frac{1}{T_0K}\frac{\psi'_t}{\psi},$$

где $B=-C/T_0K$ – произвольная постоянная, $\psi(t)$ – любая функция. Таким образом получено:

$\varphi(t)$ – любая, $\psi(t)=\dfrac{B}{t+C_1}$ при K=0

$\psi(t)$ – любая, $\varphi(t)=B\psi+\dfrac{1}{T_0K}\dfrac{\psi'_t}{\psi}$ при $K\neq0$. (11)

Подставляя решения (10) и (11) в (7), определяем функции φ и ψ.

1^0. При K=0.

$$u=\varphi+\psi\theta,$$

$$u'_t=\varphi'+\psi'\theta=\varphi'-\frac{B\theta}{(t+C_1)^2},\quad u'_x=\psi\theta'=\frac{B\theta'}{t+C_1},$$

$$u''_{xx}=\psi\theta''=\frac{B\theta''}{t+C_1}$$

Подставляя частные производные в уравнение

$\frac{\partial u}{\partial t} = T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$, будем иметь:

$$\varphi' - \frac{B\theta}{(t+C_1)^2} = T_0\left[\frac{B^2\theta'^2}{(t+C_1)^2} + \left(\varphi + \frac{B\theta}{t+C_1}\right)\cdot\frac{B\theta''}{t+C_1}\right]$$

$$\varphi' - \frac{T_0B\theta''}{(t+C_1)}\varphi = \frac{B\theta}{(t+C_1)^2} + \frac{T_0B^2\theta'^2}{(t+C_1)^2} + \frac{T_0B^2\theta\theta''}{(t+C_1)^2} =$$

$$= \frac{B\theta + T_0B^2\theta'^2 + T_0B^2\theta\theta''}{(t+C_1)^2}$$

Ввиду громоздких выкладок, выполним замену: $a = T_0B\theta''$, $b = B\theta + T_0B^2\theta'^2 + T_0B^2\theta\theta''$, получим уравнение:

$\varphi' - \frac{a}{t+C_1}\varphi = \frac{b}{(t+C_1)^2}$ – линейное относительно функции φ.

Поэтому замена $\varphi=uv$, $\varphi'=u'v+uv'$.

Подставим в уравнение:

$$u'v+uv' - \frac{a}{t+C_1}uv = \frac{b}{(t+C_1)^2} \Rightarrow$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{a}{t+C_1}v\right) = \frac{b}{(t+C_1)^2}$$,

требуем чтобы

$$v' - \frac{a}{t+C_1}v = 0 \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = \int\frac{adt}{t+C_1} \Rightarrow$$

$$\ln|v| = a\ln|t+C_1| + \ln|C_2| \Rightarrow v = C_2(t+C_1)^a$$

$$\frac{du}{dt}C_2(t+C_1)^a = \frac{b}{(t+C_1)^2} \Rightarrow$$

$$\int du = \frac{b}{C_2}\int\frac{dt}{(t+C_1)^{a+2}} \Rightarrow$$

$$u = \frac{b}{C_2}\cdot\frac{(t+C_1)^{-a-1}}{-a-1} \Rightarrow$$

$$u = -\frac{b}{C_2(a+1)}\cdot\frac{1}{(t+C_1)^{a+1}} + C_3 \Rightarrow$$

$$\varphi = uv = C_2(t+C_1)^a\left[-\frac{b}{C_2(a+1)}\cdot\frac{1}{(t+C_1)^{a+1}} + C_3\right]$$

$$\varphi = -\frac{b}{a+1}\cdot\frac{1}{t+C_1} + C_2C_3(t+C_1)^a .$$

Поскольку функция $\varphi=\varphi(t)$ должна зависеть только от t, а функция $b=b(x)$ зависит от x, то в разложении $b=B\theta+T_0B^2\theta'^2 + T_0B^2\theta\theta''$ надо добиться, чтобы коэффициенты при x и x^2 были равны нулю.

Учитывая замену $a=T_0B\theta''$,
$b=B\theta+T_0B^2\theta'^2 + +T_0B^2\theta\theta''$
$\theta(x)=A_1x^2+A_2x+A_3$, $\theta'(x)=2A_1x+A_2$, $\theta''(x)=2A_1$,
$\psi(t)=B/(t+C_1)$, $\psi'=-B/(t+C_1)^2$
$b(x)=B(A_1x^2+A_2x+A_3)+T_0B^2((2A_1x+A_2)^2+$
$+(A_1x^2+A_2x+A_3)\ 2A_1)=B(A_1x^2+A_2x+A_3)+$
$+T_0B^2(4A_1^2x^2+4A_1A_2x+A_2^2+(A_1x^2+A_2x+A_3)\ 2A_1)=$
$=A_1Bx^2+A_2Bx+A_3B)+T_0B^2(4A_1^2x^2+4A_1A_2x+A_2^2+$
$+(A_1x^2+A_2x+A_3)\ 2A_1)$

При
x^2: $A_1B+4A_1^2T_0B^2+2A_1^2T_0B^2 = A_1B +6A_1^2T_0B^2=0$
x: $A_2B+4A_1A_2T_0B^2+2A_1A_2T_0B^2= A_2B+6A_1A_2T_0B^2=0$
x^0: $A_3B+ A_2^2T_0B^2+2A_1A_3T_0B^2$

Отсюда следует: $1=-6A_1BT_0 \Rightarrow A_1=-\frac{1}{6BT_0}$,

A_2 и A_3 –произвольные постоянные.

$$b = A_3B + A_2^2T_0B^2 - \frac{1}{3BT_0}A_3T_0B^2 =$$

$$= A_3B + A_2^2T_0B^2 - \frac{1}{3}A_3B = \frac{2}{3}A_3B + A_2^2T_0B^2,$$

$$a = 2A_1T_0B = 2\cdot\left(-\frac{1}{6BT_0}\right)T_0B = -\frac{1}{3},$$

$$\frac{b}{a+1} = A_3B + \frac{3}{2}A_2^2T_0B^2.$$

$$\varphi(t) = -\frac{b}{a+1}\cdot\frac{1}{t+C_1} + C_2C_3(t+C_1)^a =$$

$$= -(A_3B + \frac{3}{2}A_2^2T_0B^2)\frac{1}{t+C_1} + C_2C_3(t+C_1)^{-\frac{1}{3}}.$$

Таким образом, получено решение:

$$u(x,t) = -(A_3B + \frac{3}{2}A_2^2T_0B^2)\frac{1}{t+C_1} +$$

$$+C_2C_3\frac{1}{(t+C_1)^{\frac{1}{3}}} + \frac{B}{t+C_1}\left(-\frac{1}{6BT_0}x^2 + A_2x + A_3\right),$$

(что соответствует K=0).

При необходимости, лишние константы можно «убрать».

Замечание 1. Это решение было проверено путем табулирования левой и правой части уравнения (6) средствами VBA.

2^0. При $K=\lambda^2>0$.

$\psi(t)$ – любая, $\varphi(t) = B\psi + \frac{1}{T_0K}\frac{\psi'_t}{\psi}$ при $K\neq0$.

Подставляя функцию $\varphi(t)$ в уравнение (7) , найдем $\psi(t)$.

$$B\psi'_t + \frac{1}{T_0K}\left(\frac{\psi'_t}{\psi}\right)'_t + \psi'_t\theta =$$

$$= T_0\left[\psi^2\theta'^2_x + \left(B\psi + \frac{1}{T_0K}\frac{\psi'_t}{\psi} + \psi\theta\right)\psi\theta''_{xx}\right] \Rightarrow$$

$$B\psi'_t + \frac{1}{T_0K}\left(\frac{\psi'_t}{\psi}\right)'_t + \psi'_t\theta =$$

$$= T_0\left(B\psi + \frac{1}{T_0K}\frac{\psi'_t}{\psi}\right)\psi\theta''_{xx} + \psi^2T_0\left(\theta\theta''_{xx} + \theta'^2_x\right)$$

Для решения этого уравнения выполним замену $\psi=e^z$, $\psi'= e^zz'$.

$$Be^z z' + \frac{1}{T_0 K}\left(\frac{e^z z'}{e^z}\right)'_t + e^z z'\theta =$$
$$= T_0\left(B\psi + \frac{1}{T_0 K}\frac{e^z z'}{e^z}\right)e^z\theta''_{xx} +$$
$$+ e^{2z}T_0\left(\theta\theta''_{xx} + \theta'^2_x\right) \Rightarrow$$
$$Be^z z' + \frac{1}{T_0 K}z'' + e^z z'\theta =$$
$$= T_0\left(Be^z + \frac{1}{T_0 K}z'\right)e^z\theta''_{xx} + e^{2z}T_0\left(\theta\theta''_{xx} + \theta'^2_x\right)$$

Подставим в последнее уравнение
$\theta = A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x} + A_3$, $\theta' = A_1\lambda e^{\lambda x} - A_2\lambda e^{-\lambda x}$,
$\theta'' = A_1\lambda^2 e^{\lambda x} + A_2\lambda^2 e^{-\lambda x}$, $K=\lambda^2$, получим:

$$\left(B + \theta - \frac{1}{K}\theta''_{xx}\right)e^z z' + \frac{1}{T_0 K}z'' = T_0 e^{2z}\left(\theta'^2_x + B\theta''_{xx} + \theta\theta''_{xx}\right)$$

$$\left(B + A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x} + A_3 - \frac{1}{\lambda^2}\left(A_1\lambda^2 e^{\lambda x} + A_2\lambda^2 e^{-\lambda x}\right)\right)\cdot$$
$$\cdot e^z z' + \frac{1}{T_0\lambda^2}z'' =$$
$$= T_0 e^{2z}[(A_1\lambda e^{\lambda x} - A_2\lambda e^{-\lambda x})^2 + B(A_1\lambda^2 e^{\lambda x} + A_2\lambda^2 e^{-\lambda x}) +$$
$$+ (A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x} + A_3)(A_1\lambda^2 e^{\lambda x} + A_2\lambda^2 e^{-\lambda x})] \Rightarrow$$
$$(B + A_3)e^z z' + \frac{1}{T_0\lambda^2}z'' =$$
$$= T_0 e^{2z}[(A_1\lambda e^{\lambda x} - A_2\lambda e^{-\lambda x})^2 + B(A_1\lambda^2 e^{\lambda x} + A_2\lambda^2 e^{-\lambda x}) +$$
$$+ (A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x} + A_3)(A_1\lambda^2 e^{\lambda x} + A_2\lambda^2 e^{-\lambda x})]$$
$$(B + A_3)e^z z' + \frac{1}{T_0\lambda^2}z'' = T_0 e^{2z}[A_1^2\lambda^2 e^{2\lambda x} - 2A_1A_2\lambda^2 +$$
$$+ A_2^2\lambda^2 e^{-2\lambda x} + BA_1\lambda^2 e^{\lambda x} + BA_2\lambda^2 e^{-\lambda x} + A_1^2\lambda^2 e^{2\lambda x} +$$
$$+ A_1A_2\lambda^2 + A_1A_2\lambda^2 + A_2^2\lambda^2 e^{-2\lambda x} + A_1A_3\lambda^2 e^{\lambda x} + A_2A_3\lambda^2 e^{-\lambda x}] =$$
$$= T_0 e^{2z}[2A_1^2\lambda^2 e^{2\lambda x} + 2A_2^2\lambda^2 e^{-2\lambda x} + \lambda^2 e^{\lambda x}(BA_1 + A_1A_3) +$$
$$+ \lambda^2 e^{-\lambda x}(BA_2 + A_2A_3)]$$

Функция z должна зависеть только от t, а это возможно, если $A_1=A_2=0$, $B=-A_3$ и $\theta(x)=A_3$. Этот случай не представляется интересным, так как функция u будет зависеть только от t, тем не менее, запишем:

$$\frac{1}{T_0\lambda^2}z'' = 0$$
$$z' = C_1,\ z = C_1 t + C_2,\ \psi = e^{C_1 t + C_2} = C_0 e^{C_1 t},$$
$$\varphi(t) = B\psi + \frac{1}{T_0 K}\frac{\psi'_t}{\psi} = -A_3 C_0 e^{C_1 t} + \frac{1}{T_0\lambda^2}C_1 \Rightarrow$$
$$u = \varphi + \psi\theta = -A_3 C_0 e^{C_1 t} + \frac{1}{T_0\lambda^2}C_1 + C_0 e^{C_1 t}A_3$$

3^0. При $K=-\lambda^2<0$.

$$\theta = A_1\sin\lambda x + A_2\cos\lambda x + A_3,$$
$$\theta' = A_1\lambda\cos\lambda x - A_2\lambda\sin\lambda x,$$
$$\theta'' = -A_1\lambda^2\sin\lambda x - A_2\lambda^2\cos\lambda x$$

Выполнив аналогичные выкладки, получим:

$$\left(B + \theta - \frac{1}{K}\theta''_{xx}\right)e^z z' + \frac{1}{T_0 K}z'' =$$
$$= T_0 e^{2z}\left(\theta'^2_x + B\theta''_{xx} + \theta\theta''_{xx}\right)$$
$$(B + A_1\sin\lambda x + A_2\cos\lambda x + A_3 +$$
$$+ \frac{1}{\lambda^2}(-A_1\lambda^2\sin\lambda x - A_2\lambda^2\cos\lambda x))e^z z' - \frac{1}{T_0\lambda^2}z'' =$$
$$= T_0 e^{2z}((A_1\lambda\cos\lambda x - A_2\lambda\sin\lambda x)^2 +$$
$$+ B(-A_1\lambda^2\sin\lambda x - A_2\lambda^2\cos\lambda x) +$$
$$+ (A_1\sin\lambda x + A_2\cos\lambda x + A_3)\cdot$$
$$\cdot(-A_1\lambda^2\sin\lambda x - A_2\lambda^2\cos\lambda x))$$
$$(B + A_3)e^z z' - \frac{1}{T_0\lambda^2}z'' =$$
$$= T_0 e^{2z}(A_1^2\lambda^2\cos^2\lambda x - 2A_1A_2\lambda^2\sin\lambda x\cos\lambda x +$$
$$+ A_2^2\lambda^2\sin^2\lambda x - A_1B\lambda^2\sin\lambda x - A_2B\lambda^2\cos\lambda x -$$
$$- A_1^2\lambda^2\sin^2\lambda x - A_1A_2\lambda^2\sin\lambda x\cos\lambda x -$$
$$- A_1A_2\lambda^2\sin\lambda x\cos\lambda x -$$
$$- A_2^2\lambda^2\cos^2\lambda x - A_1A_3\lambda^2\sin\lambda x - A_2A_3\lambda^2\cos\lambda x).$$

Окончательно имеем:

$$(B + A_3)e^z z' - \frac{1}{T_0\lambda^2}z'' =$$
$$= T_0 e^{2z}(A_1^2\lambda^2(\cos^2\lambda x - \sin^2\lambda x) -$$
$$- 4A_1A_2\lambda^2\sin\lambda x\cos\lambda x + A_2^2\lambda^2(\sin^2\lambda x - \cos^2\lambda x) -$$
$$- \lambda^2\sin\lambda x(A_1B + A_1A_3) - \lambda^2\cos\lambda x(A_2B + A_2A_3))$$
$$(B + A_3)e^z z' - \frac{1}{T_0\lambda^2}z'' =$$
$$= T_0 e^{2z}(\cos 2\lambda x(A_1^2\lambda^2 - A_2^2\lambda^2) - 4A_1A_2\lambda^2\sin\lambda x\cos\lambda x)$$

Положим $A_1=A_2=0$, $B=-A_3$.

$$-\frac{1}{T_0\lambda^2}z'' = 0 \Rightarrow z'' = 0 \Rightarrow z = C_1 t + C_2 \Rightarrow$$
$$\psi = e^{C_1 t + C_2} = C_0 e^{C_1 t},\ \varphi(t) = B\psi + \frac{1}{T_0 K}\frac{\psi'_t}{\psi}$$
$$\varphi(t) = -A_3 C_0 e^{C_1 t} - \frac{C_1}{T_0\lambda^2}$$
$$u = \varphi + \psi\theta = -A_3 C_0 e^{C_1 t} - \frac{C_1}{T_0\lambda^2} + C_0 e^{C_1 t}A_3$$

Замечание2. Очевидно, при $K\neq 0$ можно получить общее рещение, если правая часть исходного уравнения зависит от произвольных констат.

Замечание 3. В 1995 году решение уравнения похожей структуры:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + c$$

было получено другим методом В.А. Галактионовым.

Метод №5. Поиск решения в параметрической форме.

Введем параметр $\xi=\xi(x,t)$ зависящий от x и t. Первоначально решение уравнения (6) ищем в виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(t)\xi \\ u = -\varphi(t)\xi^2 \end{cases}, \qquad (12)$$

где функция $\varphi(t)$ подлежит определению.

Продифференцируем первое уравнение (12) по x, а потом по t.

$$1 = \varphi\xi'_x \Rightarrow \xi'_x = \frac{1}{\varphi},\ 0 = \varphi'\xi + \varphi\xi'_t \Rightarrow \xi'_t = \frac{-\varphi'\xi}{\varphi}.$$

Продифференцируем второе уравнение (12) по t и x.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(\varphi'\xi^2 + 2\varphi\xi\xi'_t) = -(\varphi'\xi^2 + 2\varphi\xi\left(\frac{-\varphi'\xi}{\varphi}\right) =$$

$$= -(\varphi'\xi^2 - 2\varphi'\xi^2) = \varphi'\xi^2.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2\varphi\xi\xi'_x = -2\varphi\xi\frac{1}{\varphi} = -2\xi, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -2\xi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2\xi'_x = -\frac{2}{\varphi}.$$

Подставим найденные производные в уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$$

$$\varphi'\xi^2 = T_0\left[4\xi^2 - \varphi\xi^2\left(-\frac{2}{\varphi}\right)\right] = T_0(4\xi^2 + 2\xi^2) = 6T_0\xi^2$$

$$\Rightarrow \quad \varphi' = 6T_0 \quad \Rightarrow \varphi = 6T_0 t + C_1$$

Таким образом, функция $\varphi(t)$ определена.

Прибавим к правой части системы (12) некий добавок.

$$\begin{cases} x = \varphi\xi + A\xi^2 + C \\ u = -\varphi\xi^2 + B\xi^3 \end{cases}, \qquad (12')$$

где A и B постоянные.

Проделывая аналогичные выкладки, получим:

$$1 = \varphi\xi'_x + 2A\xi\xi'_x \Rightarrow \quad \xi'_x = \frac{1}{\varphi + 2A\xi},$$

$$0 = \varphi'\xi + \varphi\xi'_t + 2A\xi\xi'_t \quad \Rightarrow \quad \xi'_t = \frac{-\varphi'\xi}{\varphi + 2A\xi}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(\varphi'\xi^2 + 2\varphi\xi\xi'_t) + 3B\xi^2\xi'_t =$$

$$= \xi'_t(3B\xi^2 - 2\varphi\xi) - \varphi'\xi^2.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2\varphi\xi\xi'_x + 3B\xi^2\xi'_x = \xi'_x(-2\varphi\xi + 3B\xi^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \xi''_{xx}(-2\varphi\xi + 3B\xi^2) + \xi'_x(-2\varphi\xi'_x + 6B\xi\xi'_x).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \xi''_{xx}(-2\varphi\xi + 3B\xi^2) + \xi'^2_x(-2\varphi + 6B\xi).$$

Подставляем производные в уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$$

$$\xi'_t(3B\xi^2 - 2\varphi\xi) - \varphi'\xi^2 = T_0[\xi'^2_x(-2\varphi\xi + 3B\xi^2)^2 +$$

$$+(-\varphi\xi^2 + B\xi^3)\cdot\xi''_{xx}(-2\varphi\xi + 3B\xi^2) + \xi'^2_x(-2\varphi + 6B\xi)]$$

Вычислим $\xi''_{xx} = \dfrac{-2A\xi'_x}{(\varphi + 2A\xi)^2} = \dfrac{-2A}{(\varphi + 2A\xi)^3}$ и подставим $\xi'_t, \xi'_x, \xi''_{xx}$ в последнее уравнение.

Левая часть:

$$\frac{-\varphi'\xi}{\varphi + 2A\xi}(3B\xi^2 - 2\varphi\xi) - \varphi'\xi^2 =$$

$$= \frac{-\varphi'\xi(3B\xi^2 - 2\varphi\xi) - \varphi'\xi^2(\varphi + 2A\xi)}{\varphi + 2A\xi} =$$

$$= \frac{-3B\varphi'\xi^3 + 2\varphi\varphi'\xi^2 - \varphi'\varphi\xi^2 - 2A\varphi'\xi^3}{\varphi + 2A\xi} =.$$

$$= \frac{\xi^2(-3B\varphi'\xi + \varphi\varphi' - 2A\varphi'\xi)}{\varphi + 2A\xi}$$

Правая часть:

$$T_0\xi^2[\frac{(-2\varphi + 3B\xi)^2}{(\varphi + 2A\xi)^2} + (-\varphi + B\xi)\cdot$$

$$\cdot[\frac{-2A(-2\varphi\xi + 3B\xi^2}{(\varphi + 2A\xi)^3} + \frac{-2\varphi + 6B\xi}{(\varphi + 2A\xi)^2}]].$$

Записав $T_0 = \dfrac{\varphi'}{6}$ и умножив обе части уравнения на $\dfrac{\varphi + 2A\xi}{\varphi'\xi^2}$, получим

$$-3B\xi + \varphi - 2A\xi = \frac{1}{6}[\frac{(-2\varphi + 3B\xi)^2}{(\varphi + 2A\xi)} + (-\varphi + B\xi)\cdot$$

$$\cdot[\frac{-2A(-2\varphi\xi + 3B\xi^2}{(\varphi + 2A\xi)^2} + \frac{-2\varphi + 6B\xi}{(\varphi + 2A\xi)}]].$$

В силу произвольности A и B, положим $B=-2A$ и покажем, что левая часть уравнения равна правой тождественно.

$$\varphi + 4A\xi = \frac{1}{6}[\frac{(-2\varphi - 6A\xi)^2}{(\varphi + 2A\xi)} - (\varphi + 2A\xi)\cdot$$

$$\cdot[\frac{-2A(-2\varphi\xi - 6A\xi^2}{(\varphi + 2A\xi)^2} + \frac{-2\varphi - 12A\xi}{(\varphi + 2A\xi)}]] =$$

$$= \frac{1}{6}[\frac{(2\varphi + 6A\xi)^2}{(\varphi + 2A\xi)} - [\frac{4A\xi(\varphi + 3A\xi)}{(\varphi + 2A\xi)} - 2(\varphi + 6A\xi)]] =$$

$$= \frac{1}{6}[\frac{(2\varphi + 6A\xi)^2 - 4A\xi(\varphi + 3A\xi) + 2(\varphi + 6A\xi)(\varphi + 2A\xi)}{\varphi + 2A\xi}] =$$

$$=\frac{1}{6}[\frac{6\varphi^2+36A\varphi\xi+48A^2\xi^2}{\varphi+2A\xi}]=$$

$$=\frac{\varphi^2+6A\varphi\xi+8A^2\xi^2}{\varphi+2A\xi}=\frac{\varphi^2+2A\varphi\xi+4A\varphi\xi+8A^2\xi^2}{\varphi+2A\xi}=$$

$$=\frac{\varphi(\varphi+2A\xi)+4A\xi(\varphi+2A\xi)}{\varphi+2A\xi}=\varphi+4A\xi$$

Таким образом, получено решение:

$$\begin{cases} x=(6T_0t+C_1)\xi+A\xi^2+C \\ u=-(6T_0t+C_1)\xi^2-2A\xi^3 \end{cases}$$

Выводы и прогнозные предложения

При сделанных выше предположениях, получено решение первого и четвертого уравнения системы (2):

Метод №1.

$$u=\varphi(x)\psi(t)=-\frac{\lambda}{6T_0}\frac{(x+C_2)^2}{(\lambda t+C_1)^2}$$

Метод №2.

$$u(x,t)=C_3\ln|u+C_3|+C_1x+T_0C_1^2t+C_2$$

Метод №3.

$$u(x,t)=\frac{-1}{6T_0t+C_1}x^2+\frac{C_2}{6T_0t+C_1}x-\frac{C_2^2}{4(6T_0t+C_1)}+$$

$$+\frac{C_3}{\sqrt[3]{6T_0t+C_1}}$$

Метод №4.

$$u(x,t)=-(A_3B+\frac{3}{2}A_2^2T_0B^2)\frac{1}{t+C_1}+C_2C_3\frac{1}{(t+C_1)^{\frac{1}{3}}}+$$

$$+\frac{B}{t+C_1}(-\frac{1}{6BT_0}x^2+A_2x+A_3)$$

$$u=\varphi+\psi\theta=-A_3C_0e^{C_1t}+\frac{1}{T_0\lambda^2}C_1+C_0e^{C_1t}A_3$$

(частный случай, что соответствует $\theta(x)=A_3\equiv const$).

$$u=\varphi+\psi\theta=-A_3C_0e^{C_1t}-\frac{C_1}{T_0\lambda^2}+C_0e^{C_1t}A_3$$

(частный случай, что соответствует $\theta(x)=A_3\equiv const$).

Метод №5.

$$\begin{cases} x=(6T_0t+C_1)\xi+A\xi^2+C \\ u=-(6T_0t+C_1)\xi^2-2A\xi^3 \end{cases}$$

В силу однородности нелинейного дифференциального оператора стоящего во втором и третьем уравнении системы (2)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\cdot)=T_0\left[\frac{\partial}{\partial x}(\cdot)\frac{\partial u}{\partial x}+(\cdot)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right]$$

в качестве решения для $v(x,t)$, $w(x,t)$ можно взять: $v(x,t)=\lambda_1u(x,t)$; $w(x,t)=\lambda_2u(x,t)$, где λ_1 и λ_2 – константы, что соответствует растяжению или сжатию решения $u(x,t)$ в λ_1,λ_2 раз соответственно по оси u.

Ценность полученных точных аналитических решений системы дифференциальных уравнений (1) заключается в том, что они могут быть использованы в качестве «тестовых» задач при проверке корректности и оценке точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов, а также служат хорошей основой для разработки новых численных, асимптотических и приближенных методов, которые в свою очередь позволяют исследовать уже более сложные задачи тепло и массопереноса, не имеющие точного аналитического решения.

Список литературы

1. Павлыш В.Н. Математическое моделирование динамических процессов в системах с распределенными параметрами / В.Н. Павлыш, Ю.Н. Добровольский // Наукові праці ДонНТУ. – 2002. – № 2. – С. 48-53.

2. Павлыш В.Н. Математическое моделирование процесса пневмообработки угольного пласта / В.Н. Павлыш, Ю.Н. Добровольский // Вісті донецького гірничого інституту. – 2005. – №1. – С. 146-152.

3. Павлыш В.Н. Численный метод решения задачи о движении газовой смеси в сплошной среде / В.Н. Павлыш, Ю.Н. Добровольский // Материалы научно-практической конференции, 2005. – С. 125-132.

4. Павлыш В.Н. Численное решение задачи о напорной фильтрации газовой смеси в сплошной среде (на примере пневмообработки угольного пласта) / В.Н. Павлыш, Ю.Н. Добровольский // Збірник науково-методичних робіт. - 2005. - Випуск 3. – С. 170-177.

5. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных / Э. Камке. - М.: Наука, 1966. – 365 с.

6. Полянин А.Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики / А.Д. Полянин. - М.: Наука, 2002. – 284 с.

Надійшла до редакції 21.03.2013

Ю.М. ДОБРОВОЛЬСЬКИЙ
ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»

ПОШУК АНАЛІТИЧНОГО РІШЕННЯ МОДЕЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ПРО НАПІРНУ ФІЛЬТРАЦІЮ ГАЗОВОЇ СУМІШІ В СУЦІЛЬНОМУ СЕРЕДОВИЩІ (НА ПРИКЛАДІ ПНЕВМООБРОБКИ ВУГІЛЬНОГО ШАРУ)

Уперше запропоновані аналітичні методи при рішенні задачі про напірну фільтрацію газової суміші в суцільному середовищі. Наведено теоретичні відомості й практичні аспекти застосування методів.

Ключові слова: метод узагальненого й функціонального поділу змінних, рішення в неявному вигляді, рішення у вигляді квадратичної функції щодо аргументу х, рішення шляхом диференціювання, рішення в параметричній формі.

Yu.N. DOBROVOLSKIY
Donetsk National Technical University

THE SEARCH OF THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE MODEL PROBLEM ABOUT PRESSURE FILTRATION OF GAS MIXTURE IN CONTINUUM (IN THE CASE OF PNEUMOPROSESSING OF A COAL SEAM)

Analytical methods are first proposed when solving the problem about pressure filtration of gas mixture in continuum. Theoretical information and practical aspects of methods application are considered. A system of nonlinear differential equations of parabolic type, which describes the process of pressure air forcing into a coal layer, is given. Five analytical solutions of the problem were obtained. It is supposed that external influence happens at a constant temperature T, or temperature T is set discretely a priori. Thus, it is necessary to find the solution of the first equation of the system, the last equation of the system is satisfied identically. Owing to uniformity of nonlinear differential operators in the other equations of the system, we can take the solution of the first equation of the system stretched or squeezed on the axis of functions as the solution for these equations. Method №1 is the simplest method of division of variables. The solution of the equation in the form of the product of functions of various arguments is searched for. Method №2 is searching the solution implicitly. A linear function relative to the main arguments is selected, and then a certain additive function from the solution is added. Method №3 is searching the solution in the form of square function relative to one argument. The method of undetermined coefficients is applied to determine the functions of the other argument. Method №4: a solution with generalized division of variables is obtained, and then differentiation method is applied. Method №5 is searching the solution in a parametrical form. A parameter depending on function's arguments is entered. One argument of the function is recorded linearly relative to the entered parameter, and the function is recorded quadratically relative to the parameter. The function of the other argument is to be determined.

Not all the obtained analytical solutions make clear physical sense, but can be used as "tests" for checking the correctness and accuracy of various numerical, asymptotic and approximate analytical methods. Solutions can form a basis for development of new numerical, asymptotic and approximate methods, which in their turn, allow studying more complex problems of heat and mass transfer, which do not have an exact analytical solution.

Key words: method of generalized and functional division of variables, implicit solution, solution as a quadratic function relative to argument x, solution by differentiation, solution in a parametric form.