УДК 515.2

О.В. Фролов, канд. техн. наук, доц.,
Донецкий национальный технический университет, г. Красноармейск
xfrolg@mail.ru

Моделирование сети из линий кривизны на каналовых поверхностях при заданной плоской линии кривизны

В данной работе рассматривается геометрическое моделирование каналовых поверхностей, отнесенных к координатной сети из линий кривизны. Такая координатная сеть на поверхности отличается свойствами ортогональности и сопряженности направлений линий сетки и требует решения дифференциального уравнения типа Риккати.

Ключевые слова: координатная сеть на поверхности, линии кривизны, сфера, огибающая, уравнение Риккати.

Введение

Каналовой будем называть огибающую поверхность однопараметрического семейства сфер. Характеристическими кривыми семейства сфер являются окружности, которые составляют одно из двух семейств линий кривизны этой поверхности.

Проблема отнесения каналовой поверхности к линиям кривизны заключается в отыскании семейства линий ортогональных к характеристическим окружностям на поверхности. Эта проблема в общем виде была рассмотрена в работах [2, 3] и сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка типа Риккати, которое не интегрируется в квадратурах. Это обстоятельство приводит к необходимости изучения частных случаев каналовых поверхностей, которые допускают решение в квадратурах дифференциального уравнения линий кривизны или же к численному интегрированию этого уравнения. Так, в случае, если все сферы семейства имеют одинаковый радиус (трубчатая поверхность) или же линия центров сфер семейства – плоская кривая, линии кривизны могут быть получены при помощи одной квадратуры или же вообще без интегрирования [2]. В работах [4, 5] рассмотрены случаи каналовой поверхности образованной окружностями кривизны конической винтовой линии, а также случай окружностей, расположенных в спрямляющей плоскости направляющей кривой, которые также допускают интегрирование.

Анализируя известные свойства дифференциального уравнения Риккати и сопоставляя их с указанными исследованиями, определим, что построение решений этого уравнения возможно связать с заданием линий кривизны семейства, которое ортогонально характеристическим окружностям. Так, если известно одно частное решение уравнения Риккати (одна заданная линия кривизны), общее решение находится при помощи двух квадратур [6, с.50], а задание двух линий кривизны требует одной квадратуры для описания общего решения. Наконец, три известных частных решения этого уравнения позволяют записать общее решение без квадратур.

Конструирование каналовых поверхностей по заданной плоской линии кривизны

Рассмотрим некоторую линию *C*, лежащую на плоскости *Oxy* прямоугольной пространственной системы координат. Эту плоскость будем далее называть опорной.

Однопараметрическое множество сфер определим из условия касания сфер семейства и опорной плоскости вдоль заданной линии. Докажем, что это условие является достаточным для того, чтобы заданная плоская линия являлась линией кривизны на огибающей поверхности семейства, если таковая существует. Согласно теореме транзитивности [1, с. 171] если поверхность (S) имеет с двумя поверхностями (Σ1) и (Σ2) касание порядка по крайней мере n в одной и той же точке, то (Σ1) имеет с (Σ2) касание соответствующего порядка в этой же точке. Принимая за поверхность (S) сферу семейства, а за поверхности (Σ1) и (Σ2) опорную плоскость и огибающую каналовую поверхность, приходим к выводу, что в случае своего существования эта поверхность будет касаться плоскости вдоль точек заданной кривой. Рассматривая касание как предельный случай пересечения поверхностей, а также принимая во внимание, что любая линия, лежащая на плоскости, является ее линией кривизны, согласно теореме Иоахимсталя [1, с. 331] приходим к выводу, что заданная плоская кривая является линией кривизны и для каналовой поверхности.

Условие касания произвольной сферы семейства и плоскости *Oxy*, можно определить, записав уравнение для линии центров сфер в следующем виде:

$$\mathbf{r} = f(t)\,\mathbf{i} + \varphi(t)\,\mathbf{j} + R(t)\,\mathbf{k}\ , \tag{1}$$

где: *f=f(t)*, *φ=φ(t)* – функции параметра *t*, определяющие заданную линию на плоскости *Oxy*, *R=R(t)* – функция, определяющая зависимость радиуса текущей сферы семейства от параметра линии (1).

В таком случае векторное уравнение каналовой поверхности [2, с.133] будет иметь вид:

$$\mathbf{m} = \mathbf{r}(t) + \frac{RR'}{\sqrt{\mathbf{r}'^2}}\boldsymbol{\tau} + R\sqrt{\frac{\mathbf{r}'^2 - R'^2}{\mathbf{r}'^2}}\cdot$$
$$\cdot(\cos u\,\mathbf{n} + \sin u\,\boldsymbol{\beta}),$$

где: $\mathbf{r}' = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ и $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\beta}$ – соответственно единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали линии (1).

Подставив в последнее уравнение известные выражения для вычисления векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\beta}$ и выполнив преобразования, получим параметрические уравнения:

$$x = \frac{1}{\mathbf{r}'^2\left|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\right|}(f\ \mathbf{r}'^2\left|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\right| + R[\sqrt{f'^2+\varphi'^2}$$
$$(\cos u(f''(\varphi'^2+R'^2) - f'(\varphi'\varphi'' - R'R'')) +$$
$$+\sin u\left|\mathbf{r}'\right|(\varphi'R'' - R'\varphi'')) - R'f'\left|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\right|]),$$

$$y = \frac{1}{\mathbf{r}'^2\left|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\right|}(\varphi\,\mathbf{r}'^2\left|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\right| + R[\sqrt{f'^2+\varphi'^2}$$
$$(\cos u(\varphi''(f'^2+R'^2) - \varphi''(f'f'' - R'R'')) -$$
$$-\sin u\left|\mathbf{r}'\right|(f'R'' - R'f'')) - R'\varphi'\left|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\right|]),$$
$$\tag{2}$$

$$z = \frac{R}{\mathbf{r}'^2\left|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\right|}((f'^2+\varphi')\left|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\right| + \sqrt{f'^2+\varphi'^2}$$
$$[\cos u(R''(f'^2+\varphi'^2) - R''(f'f'' - \varphi'\varphi'')) +$$
$$+\sin u\left|\mathbf{r}'\right|(f'\varphi'' - \varphi'f'')]),$$

где: $\left|\mathbf{r}'\right| = \sqrt{\mathbf{r}'^2} = \sqrt{f'^2+\varphi'^2+R'^2}$ и

$$\left|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\right| = \sqrt{\begin{aligned}&\left(\varphi'R'' - \varphi''R'\right)^2 + \left(f'R'' - R'f''\right)^2 + \\ &+\left(f'\varphi'' - \varphi'f''\right)^2\end{aligned}}\ .$$

Поверхность, построенная согласно уравнениям (2), не будет отнесена к линиям кривизны, так как только одно из двух семейств ее координатных линий являются линиями кривизны [2, с. 114]. Это линии *t=const*, которыми являются образующие окружности. Для перехода к системе из линий кривизны нужно перейти в уравнении (3) от параметра *u* к новому параметру, полученному из дифференциального уравнения типа Риккати [2, с.115]:

$$v' = -\frac{\left|\mathbf{r}'\right|\upsilon}{2}(v^2+1) - \frac{R'k\left|\mathbf{r}'\right|}{\sqrt{\mathbf{r}'^2 - R'^2}}v\,,$$

где: v – параметр, зависящий от u и равный $v = \mathrm{tg}\dfrac{u}{2}$, $v' = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1+v^2}{2}u'$, k и υ – кривизна и кручение линии центров.

Это уравнение, используя известные соотношения для кривизны и кручения, можно переписать в виде:

$$v' = -\frac{\left|\mathbf{r}'\right|(\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''')}{2(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')^2}(v^2+1) - \frac{R'\left|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\right|}{\mathbf{r}'^2\sqrt{\mathbf{r}'^2 - R'^2}}v\,, \tag{3}$$

где: $(\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''')$ - смешанное произведение первой, второй и третьей производной вектора (1), $\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''$ - векторное произведение производных вектора $\mathbf{r}$.

Так как плоская линия *C* по доказанному выше является линией кривизны каналовой поверхности, то соответствующее ей выражение для параметра *v*, должно удовлетворять уравнению (3) и, следовательно, являться частным решением дифференциального уравнения (3). Чтобы получить эту зависимость заметим, что опорная плоскость в рассматриваемой системе координат характеризуется уравнением – *z=0*, тогда приравняв нулю третье из уравнений (3) и сделав соответствующую замену параметра, получим квадратное относительно *v* уравнение:

$$[\left|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\right|\sqrt{f'^2+\varphi'^2} - R''(f'^2+\varphi') +$$
$$+R'(f'f''+\varphi'\varphi'')]v^2 + 2\left|\mathbf{r}'\right|(f'\varphi'' - \varphi'f'')v +$$
$$+\left|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\right|\sqrt{f'^2+\varphi'^2} + R''(f'^2+\varphi') -$$
$$-R'(f'f''+\varphi'\varphi'') = 0.$$

Это уравнение с нулевым дискриминантом дает искомое решение – $v_1=v_1(t)$:

$$v_1 = \left|\mathbf{r}'\right|(\varphi'f'' - f'\varphi'')\,[\left|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\right|\sqrt{f'^2+\varphi'^2} -$$
$$-R''(f'^2+\varphi'^2) + R'(f'\ f''+\varphi'\varphi'')]^{-1}. \tag{4}$$

Непосредственная подстановка правой части (4) вместо *v*, а также производной этого выражения вместо v', в дифференциальном уравнении (3), сводит последнее к нулю, что подтверждает правильность полученного результата.

Как известно [6, с.49], зная одно частное решение дифференциального уравнения Риккати, его общее решение может быть получено с помощью двух квадратур. Для уравнения (3) будем иметь

$$v = v_1 + \frac{1}{\phi(t)\left(w + \psi(t)\right)}, \qquad (12)$$

где: w – новая переменная (параметр), за которую принята постоянная интегрирования; $\phi(t)$ – функция, определяемая из выражения

$$\phi(t) = e^{\int\left(\frac{|\mathbf{r}'|(\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''')}{(|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|)^2} v_1 + \frac{R'|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|}{\mathbf{r}'^2\sqrt{\mathbf{r}'^2 - R'^2}}\right)dt};$$

ψ(t) – функция, которая имеет вид:

$$\psi(t) = \int\left[\frac{|\mathbf{r}'|(\mathbf{r}'\mathbf{r}'\mathbf{r}')}{2(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')^2} e^{-\int\left(\frac{|\mathbf{r}'|(\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''')}{(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')^2} v_1 + \frac{R'|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|}{\mathbf{r}'^2\sqrt{\mathbf{r}'^2 - R'^2}}\right)dt}\right] dt.$$

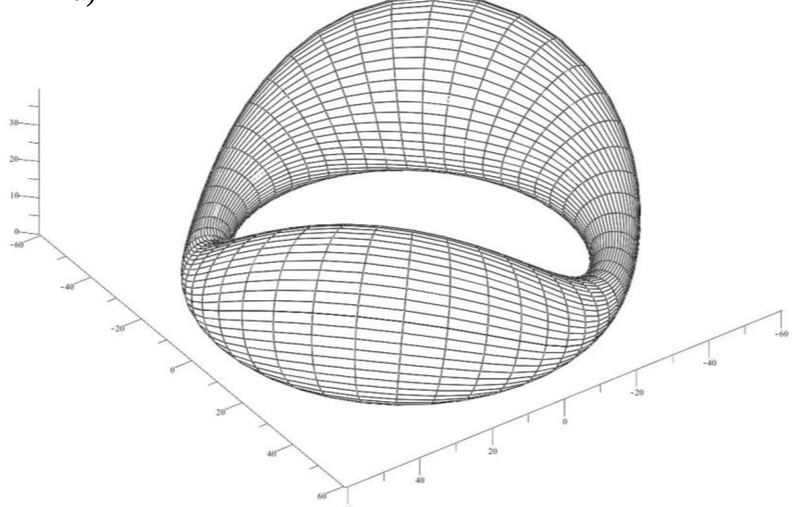
Для перехода от исходной сети на поверхности к координатной сети из линий кривизны, в соответствии с полученными результатами необходимо в уравнениях (2) сделать замену параметра u из равенства

$$u = 2\arctan(v), \qquad (13)$$

где v имеет выражение правой части (12).

Приведем пример конструирования каналовой поверхности по заданной линии кривизны. На рис. 1 и 2 построены изображения каналовой поверхности заданной плоской линией кривизны – окружностью ($f = r\cos t, \varphi = r\sin t$) и функцией зависимости для радиуса сферы семейства $R = b\sin 2t + c$.

а)



б)

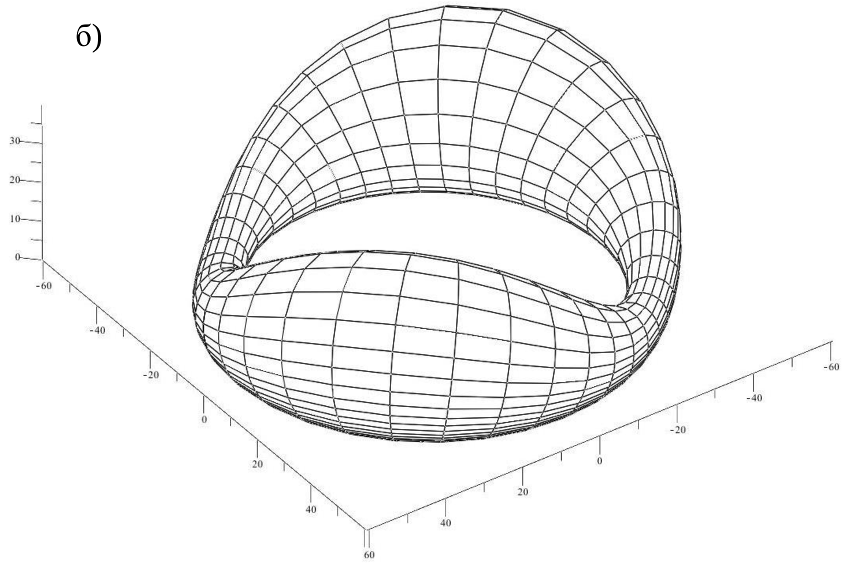


Рисунок 1 – Каналовая поверхность (общий вид) при $r=26$, $b=7.5$, $c=12.5$: а – исходная параметризация, б – замена параметра в соответствии с выражениями (12), (13).

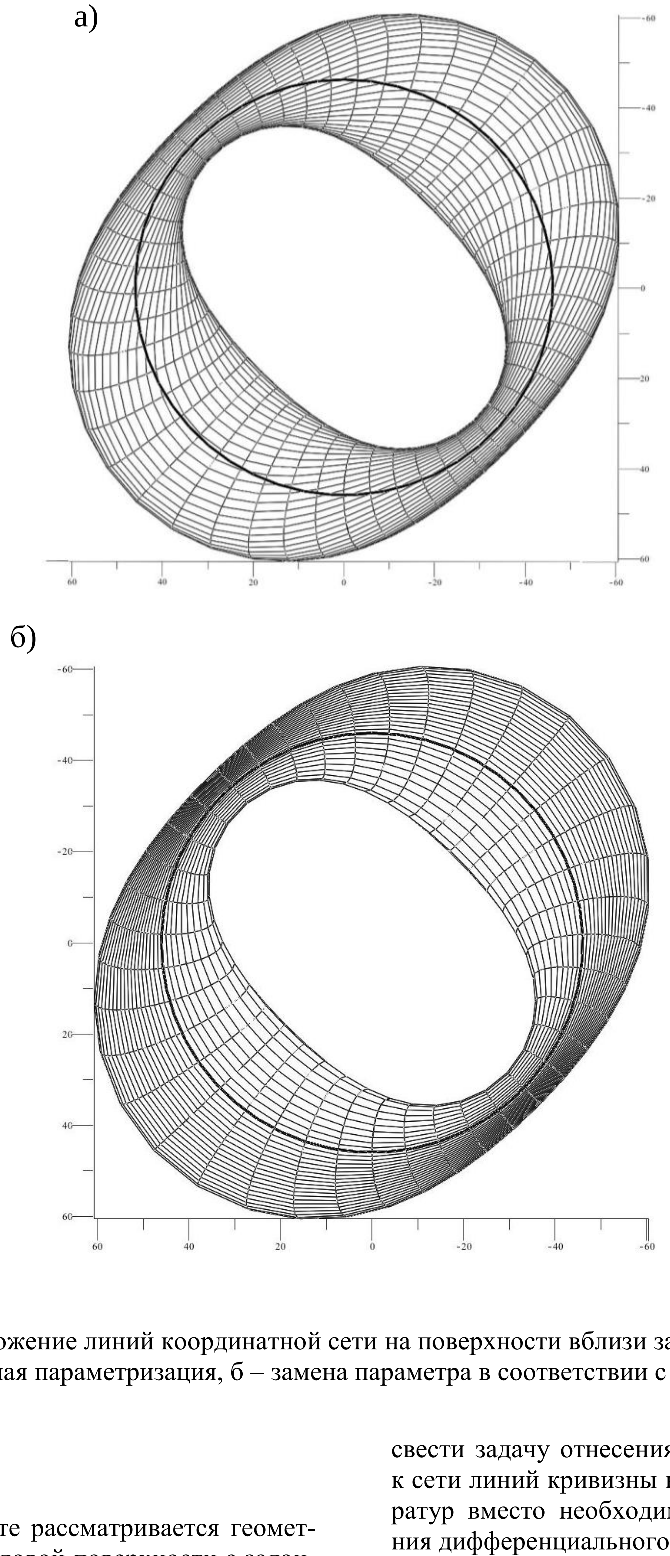


Рисунок 2 – Расположение линий координатной сети на поверхности вблизи заданной плоской линии кривизны: а – исходная параметризация, б – замена параметра в соответствии с выражениями (12), (13).

Заключение

В данной работе рассматривается геометрическая модель каналовой поверхности с заданной плоской линией кривизны. Доказано, что условие касания плоскости этой линии и каналовой поверхности является достаточным для того, чтобы эта линия являлась линией кривизны на поверхности. Данное обстоятельство позволило свести задачу отнесения каналовой поверхности к сети линий кривизны к вычислению двух квадратур вместо необходимости численного решения дифференциального уравнения.

Полученные результаты могут быть использованы при конструировании и исследовании геометрии реальных изделий, содержащих поверхности скругления переменного радиуса.

Список использованной литературы

1. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии / Ж. Фавар. – М.: Изд-во иностранной л-ры, 1969 – 560 с.
2. Фролов О. В. Каналові поверхні та їх віднесення до ліній кривини / О. В. Фролов // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. - 2003. - Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Т. 22.– С. 112-120.
3. Garcia Ronaldo Alves, Sotomayor Jorge, Llibre Jaume. Lines of principal curvature on canal surfaces in R3. Anais da Academia Brasileira de Ciências. , v.78, p.405 - 415, 2006.
4. Муквич М. М. Конструювання каналової поверхні, віднесеної до ліній кривини, як множини кіл кривини конічної гвинтової лінії / М. М. Муквич // Наукові доповіді НУБіП України. - 2013 -1 (37) - http://nd.nubip.edu.ua/2013_1/13mmm.pdf
5. Пилипака С. Ф. Аналітичні умови конструювання та віднесення до ліній кривини каналової поверхні, утвореної рухом твірного кола у спрямній площині напрямної кривої / С. Ф. Пилипака, М. М. Муквич // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – 2014 – Вип. 4, Т.58 – С.93-99.
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. - М.: Гос. изд-во физ.–мат. л-ры, 1959. – 468 с.

Надійшла до редакції 10.02.2015

О.В. ФРОЛОВ
Донецький національний технічний університет, м. Красноармійськ

МОДЕЛЮВАННЯ СІТКИ З ЛІНІЙ КРИВИНИ НА КАНАЛОВИХ ПОВЕРХНЯХ ЗА ВІДОМОЮ ПЛОСКОЮ ЛІНІЄЮ КРИВИНИ

У даній роботі розглядається геометричне моделювання каналових поверхонь, віднесених до координатної сітки з ліній кривизни. Така координатна система на поверхні відрізняється властивостями ортогональності та спряженості напрямків ліній сітки. Отримання сітки з ліній кривини для каналових поверхонь вимагає розв'язку диференціального рівняння типу Ріккаті. В роботі запропоновано визначення каналової поверхні на основі поданої плоскої лінії, яка за умови дотику її площини до каналової поверхні, буде однією із ліній кривини сім'ї, що ортогональна до твірних кіл поверхні. Це дозволяє отримати частинний розв'язок диференціального рівняння та звести його загальний розв'язок до двох квадратур.
Ключові слова: координатна сітка на поверхні, лінії кривини, обвідна, рівняння Ріккаті.

O.V. FROLOV
Donetsk National Technical University, Krasnoarmiysk

MODELING THE NET OF CURVATURE LINES ON CANAL SURFACES WITH A GIVEN PLANE CURVATURE

In this paper we consider the geometric modeling of canal surfaces assigned to coordinate a network of lines of curvature. Such a coordinate system on the surface possesses properties of orthogonal and conjugate directions of the grid lines. The solution to this problem for the canal surfaces requires the solution of the Riccati differential equation, which on has the general solution expressed in terms of quadrature. Therefore, the modeling of lines of curvature networks on canal surfaces in the general case requires numerical solutions of this equation. Known cases for which it is possible to build a network of lines of curvature by integration in quadratures are tubular surfaces (the radius of the sphere forming a constant), as well as the case of surfaces with a flat line of centers of the spheres.

In work possibility of expansion of known cases of integration on the basis of the Riccati equation properties which assume possibility of creation of the common decision according to known one or two particular decisions is considered. For the canal surfaces to each particular solution of the differential equation corresponds to a curve of the family of orthogonal lines forming circles. In this paper the case of a canal surface construction using a predetermined flat line is offered. Satisfaction the condition of tangency of the line plane and a canal surface is sufficient to ensure that this line is a line of curvature on the surface. The dependencies that corerespond to a particular solution of the differential equation, built for this line. An example of a canal surface geometric modeling the known planar lines of curvature of a circle and a given radius of the sphere, depending on the parameter of the curve.

The results can be used to design and study geometry of real machine components containing variable radius fillet surface.
Keywords: canal surface, curvature lines, conjugate system, envelope surface.