

**Чисельні методи й математичне моделювання**

УДК 004.3

А.Н. Смирнов, инж.-программист  
В.Н. Беловодский, канд. техн. наук, доц.  
Донецкий национальный технический университет, г. Красноармейск  
[city\\_17@inbox.ru](mailto:city_17@inbox.ru), [v.belovodskiy@gmail.com](mailto:v.belovodskiy@gmail.com)

**Некоторые подходы к интервальному решению конечных систем уравнений**

*В статье описан новый подход к реализации интервального решения системы двух линейных уравнений методом бисекции и проведен анализ возникающих при этом проблем. В силу того, что простая интервальная оценка, в ряде случаев, не дает исчерпывающей информации о наличии решений в исследуемом бруске, предложен ряд дополнительных вычислительных процедур для оценки взаимного расположения линий уравнений системы в бруске решений, которые позволяют полностью исключить наличие ошибочных заключений в итоговом результате. Выполнено тестирование и анализ реализации предложенного метода на примере плохо обусловленной системы уравнений, произведен сравнительный анализ временных затрат на выполнение предложенных процедур. Отмечены некоторые возможные обобщения предложенного метода на нелинейные системы уравнений, одно из которых иллюстрируется на примере решения уравнения Дуффинга.*

**Ключевые слова:** интервальный метод, система уравнений, метод бисекций, прямая.

**Введение**

При решении систем нелинейных уравнений нередко возникает необходимость проведения их глобального анализа, т.е. нахождения всего множества их решений. В настоящее время такой анализ осуществляется на пути использования или методов мултистарта [1], или методов гомотопии [2, 3], или интервальных подходов [4]. В первом случае множество решений устанавливается путем многократного решения системы уравнений при различных начальных условиях, которые обычно выбираются случайным или равномерным образом в зоне поиска. Во втором случае, – на базе исходного уравнения  $f(x) = 0$  формируется некоторая дополнительная функция  $H(t, x)$ , – гомотопия, зависящая от некоторого параметра  $t \in [0; 1]$ , для которой уравнение  $H(t, x) = 0$  при  $t = 0$  имеет известное решение, а при  $t = 1$  гомотопия совпадает с  $f(x)$ , т.е.  $H(t, x) = f(x)$ . Тогда, путем последовательного изменения параметра  $t$  от 0 до 1 и последующего решения уравнения  $H(t, x) = 0$  происходит «продолжение» известного решения и определяются корни исходного уравнения. Анализируя описанные подходы, можно отметить, что получение надежного результата при переборе начальных условий требует достаточно большого их объема и, в конечном счете, полученный результат не имеет гарантированного характера, а успешное решение исходного уравнения во втором случае определяется удачным выбором гомотопии и успех на этом пути определяется, в конечном счете, удачей и искусством исследователя. По срав-

нению с этим интервальный подход, который первоначально возник в связи с установлением границ расположения решений уравнения или системы уравнений при неточных исходных данных, позволяет нередко получать гарантированные заключения о множестве решений системы и их расположении. Его идея заключается в том, что на базе исходного уравнения  $f(x) = 0$  или системы уравнений формируются их интервальные расширения  $f(X)$ , оперирующие не с простыми переменными, а с интервалами, и интервальное значение такой функции, в идеальном случае, совпадает с областью значений самой функции  $f(x)$  при  $x \in X$ . Тогда, например, при использовании метода бисекции, который можно рассматривать как обобщение метода половинного деления на случай пространств размерности  $n > 1$ , путем последовательного деления области поиска пополам, проверки теста существования решения в каждой из полученных частей и удаления той из них, для которой результат теста отрицательный, постепенно формируются наборы «интервалов» заданного размера, содержащие решения рассматриваемой системы. Однако следует отметить, что одна из существенных проблем интервального подхода заключается в том, что, в ряде случаев, ответ о наличии решений может оказаться лишь предположительным, в результате чего формируется некоторый набор кубов заданного размера лишь предположительно содержащий искомые решения. Отчасти, данное обстоятельство обусловлено несовпадением областей значений функций, формирующих систему, с их интервальными оценками. Одним из классов рациональных функций,

для которых это соблюдается [5], являются линейные системы уравнений. Однако и здесь могут появиться свои особенности, связанные с плохой обусловленностью систем. Учитывая широту области использования таких систем, а также, надеясь на обобщение разрабатываемых подходов в дальнейшем, ниже рассматриваются, в основном, системы двух линейных уравнений и предлагаются процедуры, полностью устраняющие неопределенность при их интервальном анализе. Они реализованы программно, иллюстрируются решением конкретных систем, отмечены некоторые направления их обобщения на случай нелинейных систем.

### Описание проблемы, постановка задачи

Рассматриваемая система имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

Концептуально, ее решение интервальным методом заключается в том, что изначально задается прямоугольник  $[I_x, I_y]$ , где  $x \in I_x = [a, b]$ ,  $y \in I_y = [c, d]$ , называемый бруском, и осуществляется поиск ее решения в этом брусе. Для этого для уравнений системы (1) составляются их интервальные расширения [5]

$$\begin{cases} F_1(xi, yi) = a_1 \cdot xi + b_1 \cdot yi - c_1 \\ F_2(xi, yi) = a_2 \cdot xi + b_2 \cdot yi - c_2 \end{cases}, \quad (2)$$

в которых присутствующие арифметические операции уже являются интервальными, а аргументы – интервалами. Далее, для каждой из функций, входящих в систему (2), на брусе  $[I_x, I_y]$  определяются их интервальные оценки  $F_1, F_2$ . Если обе из них содержат ноль, то решение системы на брусе  $[I_x, I_y]$ , возможно, есть. Если же хотя бы одна из интервальных оценок не содержит ноль, то решения в этом брусе или его потомке нет, и он исключается из дальнейшего рассмотрения. В соответствии с методом бисекций, брус, который предположительно содержит решение, делится по одной из размерностей на две равные части, – два подбруса. Для каждого из этих двух подбрусоев повторяются указанные выше действия, которые продолжают до тех пор, пока размер очередного поколения подбрусоев не уменьшится до заданной величины  $2\Delta$ . Тогда в качестве ответов, имеющих погрешность  $\Delta$ , принимаются центры полученных брусоев.

Без изменений этот метод дает гарантированно верное решение только для линейной системы с одной неизвестной. В случае системы более высокой размерности можно столкнуться с проблемой появления «лишних» интервалов в их окончательном наборе. Может оказаться, что ин-

тервальная оценка некоторого подбруса содержит ноль, но при этом система точного решения в нем не имеет. Дело здесь в том, что интервальная оценка функции, вообще говоря, не совпадает с ее множеством значений [6]. В простых системах ошибочных решений может быть несколько, а в более сложных системах – сотни.

Проиллюстрируем появление таких решений на примере следующей системы

$$\begin{cases} 0.5x + y = 1 \\ x + 0.5y = 1 \end{cases}, \quad (3)$$

интервальное решение которой будем искать в брусе  $X = [-5, 5]$ ,  $Y = [-5, 5]$  и возьмем значение  $2\Delta = 0.01$ . Отметим, что точное решение данной системы равно  $x = 2/3$ ,  $y = 2/3$ , ее собственные значения равны  $\text{eig}(A) = (-0.5; 1.0)$ , а коэффициент Тодда [7], характеризующий степень обусловленности системы, равен 2. Каждое из уравнений системы описывает некоторую прямую на плоскости, а точка их пересечения является решением системы. Данное обстоятельство позволяет визуально представить процесс решения.

Система (3) имеет единственное решение и, решая ее методом бисекций, брус, не содержащий пересечения прямых, должен быть отброшен при дальнейших вычислениях. Ответом должен послужить брус со стороны, равной  $2\Delta$  и для линейной системы он должен быть только один. Однако в силу вышеизложенной проблемы результат является несколько иным. На рисунке 1 показан результат решения системы (3) методом бисекций. Закрашенные участки в центре, определены как, предположительно, содержащие решение. Но из рисунка видно, что из трех закрашенных областей, пересечение содержится только в одной из них.

При более детальном анализе процесса решения становится ясно, что если обе прямые пересекают рассматриваемый брус, то интервальная оценка функций, формирующих систему уравнений, содержит ноль, даже если сами прямые не пересекаются.

Таким образом, применив данный метод к системе (3) получаем три интервальных решения, два из которых являются ошибочными, а третье, – действительно содержит решение системы.

Рассмотрим теперь почти вырожденную плохо обусловленную систему

$$\begin{cases} 0.780x + 0.563y = 0.217 \\ 0.913x + 0.659y = 0.254 \end{cases}, \quad (4)$$

решение которой равно (1, -1). Ее определитель  $\det(A) = 1.0000\text{e}-006$ , собственные значения  $\text{eig}(A) = (1.4389993; 0.0000007)$ , а коэффициент Тодда, соответственно, равен  $2.0557\text{e}+006$ . Малость определителя матрицы влечет практиче-

скую пропорциональність елементів її рядків. А це, в свою чергу, означає, що прямі, описувані кожним з рівнянь системи, практично паралельні.

Візуалізація рішення системи (4) методом бісекцій представлена на рисунку 2.

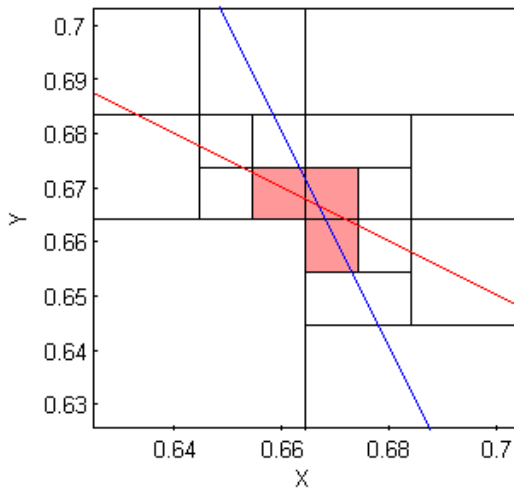


Рисунок 1 – Візуалізація рішення системи (1) методом бісекцій

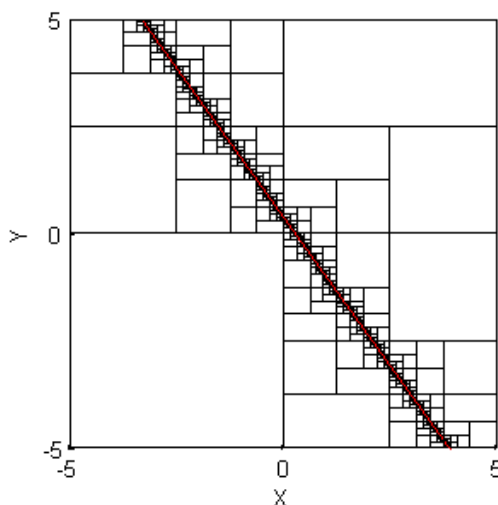


Рисунок 2 – Візуалізація рішення системи (4)

Угол між лініями мал ( $0.0025$  рад.) і тому візуально вони співпадають. Ітервальне рішення системи (4) методом бісекцій при старих параметрах  $2\Delta$ ,  $X$ ,  $Y$  дає 1764 ітервальних рішень, з яких тільки одне вважається вірним. Разом з тим, якщо модифікувати критерії перевірки і наступного відбору отримуваних частин, то вдасться повністю виключити невизначеність в остаточному рішенні. Перейдемо до викладу запропонованих процедур.

### Методологія рішення проблеми

Очевидний недолік первинної процедури заключається в тому, що вона не учит-

ває взаємного розташування ліній функцій в досліджуваній області, т.е. виконуваний тест не здійснює перевірки перетинання ліній в даній області, а це і призводить до появи помилкових рішень. Тому для отримання вичерпуючого відповіді необхідно виконувати додаткові процедури, пов'язані з аналізом взаємного розташування ліній системи. І це може бути зроблено шляхом аналізу точок перетинання прямих з межовими лініями області.

Кожна область представляє собою прямокутник певного чи іншого розміру і кількість варіантів розташування в ньому прямих достатньо велика. Визначити межі (верхню, нижню, праву, ліву) області, яку перетинає лінія системи, можна інтервальним методом, отримавши інтервальну оцінку координат області для кожної з сторін початкової області.

Можно запропонувати наступну класифікацію взаємного розташування прямих. Загальна кількість таких варіантів дорівнює 21 з урахуванням того, що перестановка ліній значення не має (рис. 3). Ці варіанти можна розділити на три групи в залежності від особливостей їх аналізу. Перша група (рис. 3, а) не потребує додаткових перевірок, так як при такому розташуванні можна однозначно утвердити перетинаються лінії чи ні і в ній всього три варіанти. Друга група потребує додаткової перевірки відносного розташування точок перетинання ліній з однією з меж (рис. 3, б). В цій групі міститься 12 варіантів. Третя група також потребує перевірки, але на двох межах області (рис. 3, в) і містить шість варіантів розташування.

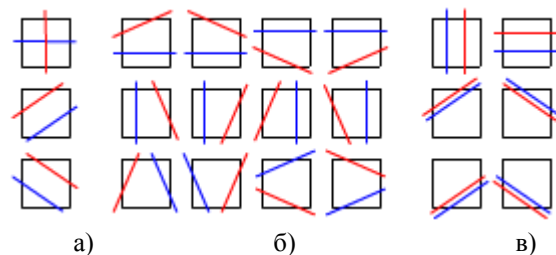


Рисунок 3 – Можливі варіанти взаємного розташування прямих в плоскій області

Перевірка відносного розташування двох точок виконується інтервальним методом. При цьому інтервал, в якому розташована кожна з двох точок, знаходиться з точністю, достатньою для того, щоб можна було судити про їх взаємне розташування. Наприклад, як показано на рисунку 4, якщо точка  $m_1$  розташована вище  $m_2$ , то лінії перетинаються, якщо нижче, то ні.

Згадану перевірку логічно виконувати в наступному порядку:

- определить номера границ, которые пересекает линия графика;
- определить группу относительного расположения;
- сравнить более детально точки, лежащие на одной стороне границы;
- сделать вывод о наличии пересечения.

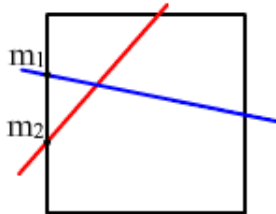


Рисунок 4 – Критерий пересечения прямых: точка  $m_1$  расположена выше точки  $m_2$

Изначально мы не знаем, как расположены прямые. Интервальная оценка дает лишь информацию о присутствии прямых в бруске. А последующий анализ обеспечивает нахождение точек пересечения прямых с границами бруска, что позволяет установить и наличие в бруске их точки пересечения. Таким образом, применив изложенную проверку при решении системы, мы сможем отсеять сомнительные случаи и получить одно решение за исключением особых ситуаций, о которых пойдет речь ниже.

### Результаты экспериментов

В данной программной реализации операции умножения и деления интервальной арифметики выполнены классическим образом, а именно:

$$a \cdot b = [\min(\underline{a} \cdot \underline{b}, \underline{a} \cdot \bar{b}, \bar{a} \cdot \underline{b}, \bar{a} \cdot \bar{b}), \max(\underline{a} \cdot \underline{b}, \underline{a} \cdot \bar{b}, \bar{a} \cdot \underline{b}, \bar{a} \cdot \bar{b})],$$

$$a / b = [\min(\underline{a} / \underline{b}, \underline{a} / \bar{b}, \bar{a} / \underline{b}, \bar{a} / \bar{b}), \max(\underline{a} / \underline{b}, \underline{a} / \bar{b}, \bar{a} / \underline{b}, \bar{a} / \bar{b})],$$

в то время как сложение и вычитание выполнялись так:

$$a + b = [\min(\underline{a} + \underline{b}, \underline{a} + \bar{b}, \bar{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}), \max(\underline{a} + \underline{b}, \underline{a} + \bar{b}, \bar{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b})],$$

$$a - b = [\min(\underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}, \bar{a} - \bar{b}), \max(\underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}, \bar{a} - \bar{b})].$$

Такой вариант требует больших вычислительных затрат, но является более удобным с точки зрения программирования.

Метод бисекций реализован стандартным образом, т.е. брусок делится на две равные части по каждой размерности по очереди до тех пор, пока каждая из его сторон не станет меньше заданной малой величины. Тогда середина полученного

бруска, т.е. точка пересечения его диагоналей, и принимается в качестве решения системы.

Вычисления проводились в среде Matlab на компьютере с процессором Intel Pentium Dual Core 2.2 ГГц, оперативной памятью 2 Гб. На рисунке 5 показано решение систем (3), (4) с применением предложенных методов.

Из рисунков 5а, 5б видно, что решение интервальным методом с применением дополнительной проверки, дает корректный результат. Результаты решения системы (3):  $x = 0.6689$ ;  $y = 0.6689$ . Результаты решения системы (4):  $x = 1.0010$ ;  $y = -1.0010$ . Погрешность решения  $\Delta = 0,005$ .

В таблице 1 представлены временные затраты в секундах на решение рассматриваемых систем. Для сравнения, в таблице приведено также время решения систем с использованием стандартной процедуры Matlab. В порядке анализа отметим существенное снижение времени расчетов при использовании предложенных процедур для решения плохо обусловленной системы.

Таблица 1 – Временные затраты решения систем различными методами

Методы решения	Система (3)	Система (4)
Интервальный, без дополнительной проверки, с	0,043	3,459
Интервальный, с дополнительной проверкой, с	0,062	0,449
Процедура Matlab, с	0.002	0.001

### Особые случаи

Остановимся на некоторых «неудобных» случаях, которые могут возникнуть при проведении расчетов.

Случай 1. Исходная система является вырожденной, т.е. ее оба уравнения совпадают. В этом случае она имеет бесчисленное множество решений, и оно представляет собой множество точек, расположенных на прямой, описываемой любым ее уравнением. В результате решения такой системы интервальным методом, мы получим множество дискретных точек, количество которых зависит от заданной точности вычислений (рис. 6, а).

Случай 2. Решение системы расположено на границе бруска. Данное обстоятельство вызывает трудности при отделении его части, содержащей решение. В этом случае могут возникнуть ситуации, когда решение будет принадлежать одновременно двум или четырем его частям (рис. 6, б).

Случай 3. Граница бруса совпадает с одной из линий системы. В этом случае возникают труд-

ности при определении точек их пересечения с границами бруса.

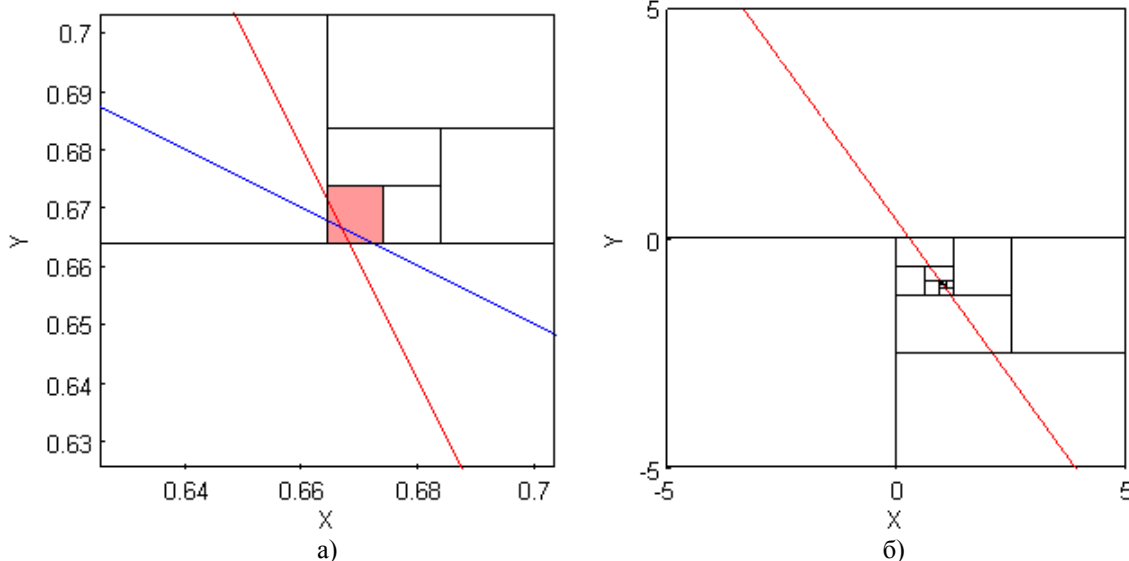


Рисунок 5 – Визуальное представление решения систем с применением дополнительной проверки: а) система (3), б) система (4)

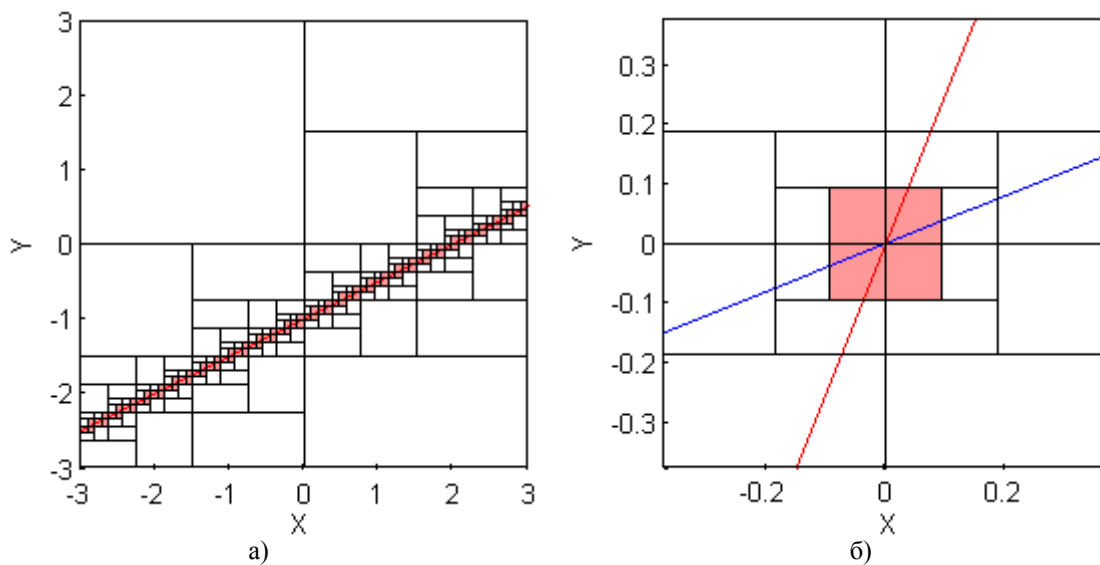


Рисунок 6 – Особые случаи решения:  
а) вырожденная система; б) линии бисекции пересекают точку решения

Можно предложить следующие варианты действий при появлении таких случаев.

Если линии системы совпадают, то можно считать ее решением или каждую точку, полученную при решении, или только одну, любую из полученных. Для этого необходимо внести некоторые изменения в реализацию метода бисекций. А именно, при очередном делении и последующем анализе его «половинок» вторая часть не анализируется, если первая содержит решение. Здесь мы исходим из того, что невырожденная линейная система имеет единственное решение. Аналогичные действия подходят и для

второго случая, и только один подбрус будет определен, как содержащий решение. В последнем случае, все же необходимо делать дополнительные проверки при определении точек пересечения сторон. Этот вопрос, в принципе разрешим, и зависит от реализации алгоритма, однако и там, также, может возникнуть несколько альтернатив.

### Некоторые обобщения

Согласно известным аксиомам геометрии, наличие двух точек прямой позволяет однозначно судить о ее расположении. Поэтому предло-

женные выше процедуры позволяют наверняка отсеивать сомнительные потомки первоначального бруса решений только для линейных систем уравнений. Однако, в ряде случаев, – в частности, при достаточно малой величине подбрусьев, их можно применить и для решения нелинейных систем уравнений, заменяя участки кривых отрезками касательных или хорд и сохраняя, при этом, прежний алгоритм вычислений. Продемонстрируем такую возможность на примере аппроксимации с помощью хорд.

Отметим еще раз, что проверка наличия решений осуществляется аналогичным образом. А именно, если первоначальная интервальная оценка содержит ноль, то этот брус подвергается последующей более тщательной обработке: определяются точки пересечения кривой с границами бруса и применяются приемы их сравнения, как и в случае прямых. Заметим, что такая процедура эквивалентна неявной замене участков кривых на хорды, проходящие через найденные точки. Выяснив факт пересечения хорд, можно с некоторым приближением говорить также и о наличии пересечения кривых (Рис. 7а), хотя, без сомнения, вероятность упустить решение всегда сохраняется (Рис. 7б).

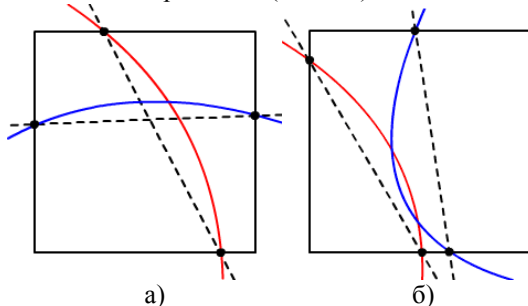


Рисунок 7 - Схема замены кривых хордами  
а) случай эквивалентной замены, б) случай неэквивалентной замены

Действительно, ведь алгоритм не учитывает то, что рассматриваемые линии, на самом деле, не являются прямыми. Он просто находит для каждой из них по две точки, анализирует их взаимное расположение и выносит заключение о том, пересекаются линии или нет, как если бы они были прямыми проходящие через эти точки.

Продемонстрируем использование алгоритма на примере решения уравнения Дуффинга

$$\ddot{x} + b\dot{x} + x + \gamma x^3 = P \cos \omega t. \quad (5)$$

Отыскивая решение уравнения методом гармонического баланса [8] и ограничиваясь в разложении решения лишь первой гармоникой, т.е. полагая

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

после подстановки  $x(t)$  в (5) и выполнения преобразований понижения степени и приведения

подобных, для определения коэффициентов  $A$  и  $B$  получаем систему двух алгебраических уравнений третьей степени

$$\begin{cases} (1 - \omega^2)A + b\omega B + \frac{3}{4}\gamma A(A^2 + B^2) = P \\ -b\omega A + (1 - \omega^2)B + \frac{3}{4}\gamma B(A^2 + B^2) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Уравнения полученной системы не удовлетворяют условиям теоремы о совпадении области значений функции и ее интервального расширения [6]. Поэтому выполним необходимые преобразования и понизим степень системы.

Так, комбинируя уравнения, а именно, умножая первое из них на  $B$  и прибавляя к нему второе, умноженное на  $(-A)$ , получим

$$\begin{cases} b\omega A^2 + b\omega B^2 = PB \\ -b\omega A + (1 - \omega^2)B + \frac{3}{4}\gamma B(A^2 + B^2) = 0 \end{cases}$$

Разделив, теперь, первое уравнение на  $b\omega$  и подставив его правую часть во второе, имеем

$$\begin{cases} A^2 + B^2 = \frac{PB}{b\omega} \\ -b\omega A + (1 - \omega^2)B + \frac{3}{4}\gamma \frac{PB^2}{b\omega} = 0 \end{cases}$$

Выделяя, наконец, полные квадраты в обоих уравнениях, получим

$$\begin{cases} A^2 + \left(B - \frac{P}{2b\omega}\right)^2 - \left(\frac{P}{2b\omega}\right)^2 = 0 \\ -b\omega A + \frac{3\gamma P}{4b\omega} \left(B + \frac{2b\omega(1 - \omega^2)}{3\gamma P}\right)^2 + \frac{b\omega(1 - \omega^2)^2}{3\gamma P} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Заметим, что выполненные преобразования не являются тождественными и полученная система (7), в отличие от первоначальной (6), имеет еще одно, – дополнительное нулевое решение, что необходимо учитывать при решении системы в дальнейшем. Однако, интервальные расширения левых частей уравнений (7) уже совпадают с их множествами значений. Геометрически, первое уравнение описывает окружность, второе, – гиперболу.

Расчеты были выполнены для значений параметров  $b = 0,1$ ;  $\gamma = 0,5$ ;  $P = 1$ ;  $\omega = 2,2$  и, при ограничении на предельную величину брусьев равную  $2\Delta = 0,01$ , дали следующие результаты (Рис.8):

$$A_1 = -0.260742, B_1 = 0.016602;$$

$$A_2 = -2.264648, B_2 = 2.114258;$$

$$A_3 = 2.270508, B_3 = 2.377930;$$

$$A_4 = 0.002930, B_4 = -0.000977.$$

Четвертому интервальному решению соответствует нулевое точечное решение системы (7), оно отбрасывается, т.к. не является решени-



ем исходной системы (6) и в результате остаются лишь три первых набора решений.

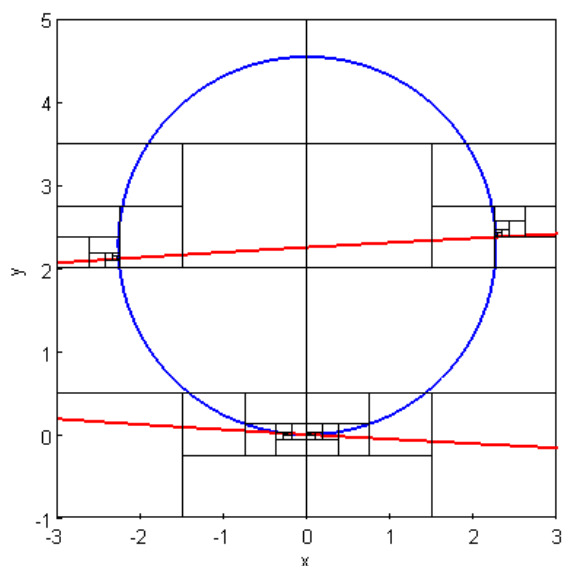


Рисунок 8 – Визуальное представление решения системы (7) с применением дополнительной проверки

В данном случае поиск решений производился в диапазонах  $X = [-3, 3]$ ,  $Y = [-1, 5]$ , без каких-либо изменений в алгоритме или ограничений на размер рассматриваемого бруса и верное решение системы, скорее всего, свидетельствует об удачном выборе для нее первоначального размера бруса. В общем случае, безусловно, предложенные процедуры целесообразно применять, в качестве дополнительных, лишь при достаточно малой величине потомков первоначального бруса.

В заключение отметим, что хотя рассмотренное обобщение предложенного метода на

нелинейный случай и имеет определенную перспективу, риск пропустить решение при его использовании все же сохраняется.

### Заключение

Предложенные процедуры, усиливающие определенность процесса тестирования подбрусьев, показали работоспособность и надежность при выполнении расчетов. Они базируются на том, что решение системы с двумя интервальными неизвестными заменяется решением нескольких систем с одной такой же неизвестной. В целом, он не может конкурировать с классическими методами по причине своего более низкого быстродействия, однако, безусловно, является альтернативным при решении плохо обусловленных систем.

В принципиальном плане, данный подход может быть применен и к системам более высокой размерности. Однако, например, в случае линейных систем третьего порядка необходимо уже выполнять анализ взаимного расположения плоскостей, а для этого требуется устанавливать точки их пересечения с ребрами трехмерного бруса. И при дальнейшем увеличении размерности системы, трудоемкость ее решения безусловно возрастает.

При соответствующей модификации алгоритмов предложенные критерии анализа существования решений могут быть применены и к нелинейным системам уравнений при малой величине брусьев, т.е. в тех случаях, когда замена криволинейных участков отрезками прямых вполне правомерна.

### Список использованной литературы

1. Rinney Kan A.H.G., Timmer G.T. Stochastic Global Optimization Methods//Mathematical Programming, 39, 27 – 78, 1987.
2. Быков А.А. Реализация метода продолжения по параметру для системы двух уравнений / А.А. Быков, С.Б. Цыбенова // Вычислительные технологии. – 2002. – Т. 7. – № 5. – С. 21-28.
3. Rohimian S.K., Jalali F., Seader J.D., White R.E. A New Homotopy for Seeking All Roots of a Nonlinear equation // Computers and Chemical Engineering, 35 (2011). С. 403 – 411.
4. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ / С.П. Шарый // Институт вычислительных технологий СО РАН. – Новосибирск: XYZ, 2012. – 604 с.
5. Добронев Б.С. Интервальная математика: учебное пособие / Б.С. Добронев. – Красноярск, Краснояр. гос. ун-т, 2004. – 216 с.
6. Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М.: Мир, 1987. – 361 с.
7. Фаддеев Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. – СПб.: Лань, 2002. – 736 с.
8. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах / Т. Хаяси; пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – 432 с.

Надійшла до редакції 27.12.2014

**О.М. СМІРНОВ, В.М. БЄЛОВДСЬКИЙ**

Донецький національний технічний університет, м. Красноармійськ

**ОДИН ПІДХІД ДО ІНТЕРВАЛЬНОГО РІШЕННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ НИЗЬКОЇ РОЗМІРНОСТІ**

У статті описано новий підхід до реалізації інтервального рішення системи двох лінійних рівнянь методом бісекції та проведено аналіз виникаючих при цьому проблем. Проста інтервальна оцінка не дає достатньої інформації про те, що рішення міститься в досліджуваному брусі. У зв'язку з цим запропоновано додаткові обчислювальні процедури для оцінки взаємного розташування ліній рівнянь системи в брусі рішень, які дозволяють повністю виключити наявність помилкових включень у підсумковому результаті. Виконано тестування та аналіз реалізації запропонованого методу, на прикладі погано обумовленої системи рівнянь. Зроблено аналіз і порівняння часових витрат на виконання запропонованих процедур зі стандартними методами рішення. Відзначені деякі можливі узагальнення запропонованого методу на нелінійні системи рівнянь, одне з яких ілюструється на прикладі рішення рівняння Дуффінга.

**Ключові слова:** *інтервальний метод, система рівнянь, метод бісекції, пряма.*

**A.N. SMIRNOV, V.N. BELOVODSKIY**

Donetsk National Technical University, Krasnoarmiysk

**AN APPROACH TO THE INTERVAL SOLUTION OF LINEAR SYSTEMS OF LOW DIMENSIONALITY**

This article describes a new approach to the implementation of interval solution of a system of two linear equations by bisection method and the analysis of the arising problems. The matter is that a simple interval evaluation does not give sufficient information about the presence of solutions in the test beam. This feature can be explained by the fact that interval expansions of the functions on a beam do not coincide, as a rule, with their ranges on it. As a result of this the use of bisection method, for example, for solving systems of equations gives an answer in the form of a collection of "intervals" which only potentially may contain an exact solution. In view of this the paper suggests some measures which strengthen and improve the criterion for the existence of solutions. Additional computational procedures for assessing of mutual location of the straight lines in the beam were proposed that allow to completely exclude the presence of erroneous conclusions in the final result. Testing and analysis of the implementation of the proposed method were fulfilled, the example of an ill-conditioned system of equations was considered. A comparative analysis of the time spent on the implementation of the proposed procedures and standard methods of solution was conducted. There are noted some possible generalizations of the proposed procedures for nonlinear systems of equations, one of which is illustrated on the example of solving of the Duffing equation.

**Key words:** *interval method, system of equations, bisection method, straight line.*