УДК 519.7

Н.К. Шатохина, канд. техн. наук, доц.
П.А. Шатохин, канд. техн. наук, доц.
Донецкий национальный технический университет, г. Красноармейск, Украина
nshatokh@rambler.ru

Представление мозаичных графов в виде системы подграфов

Рассмотрена задача выделения компонентов в объекте, модель которого представлена графом мозаичного вида, с использованием двух агентов. Описан алгоритм определения точек сочленения и мостов, соединяющих отдельные компоненты в исходном объекте. Приведен алгоритм описания структуры исходного объекта в строковом виде.

Ключевые слова: граф, мозаика, агент, алгоритм.

Введение

В работе рассматривается проблема, которая является ключевой при решении задачи восстановления структуры объекта, представленного графом, путем анализа информации, полученной с помощью обхода агентом его границы. Подобные задачи возникают при автоматном анализе изображений, графов и других дискретных систем (см. например, обзор [1]), в которых рассмотрены случаи решения задач обхода графов и лабиринтов с использованием одного автомата. В данной работе рассматривается решение подобных задач с использованием коллективов автоматов и рассматривается специальный класс лабиринтов - мозаика, которые имеют регулярную структуру, позволяющую эффективно решать ряд задач на лабиринтах.

Постановка задачи

Требуется разработать такие алгоритмы передвижения агента - исследователя (АИ) по границе исходного графа - мозаике G и описания структуры мозаики агентом – экспериментатором (АЭ), чтобы за конечное число шагов агент АИ смог обойти граф G, пошагово передавая информацию, по которой АЭ через конечное число шагов смог описать в виде строки граф P, изоморфный исходному графу G, как совокупность своих подграфов и описания структуры подграфов в строковом виде.

Решение задач и результаты исследований

В данной работе рассматривается неориентированный граф G без дыр, петель и кратных ребер. Для графа G(V,E), где V – множество вершин, $E = \{(v_i,v_j) | v_i,v_j \in V\}$ – множество ребер, заданы такие ограничения, описывающие его мозаичную структуру:

1) для всех внутренних вершин v выполняется deg(v) = 6 и существуют замкнутый маршрут длины 6 по всем соседним к v вершинам;
2) для всех внешних вершин v выполняется - 2 ≤ deg(v) ≤ 6;
3) длина всех ребер $e=(v1,v2) \in E$ постоянна, |e| = const.

Граф называется сильно связным, если для любых двух v, w его вершин существует маршрут (v,v_1), (v_1,v_2),…(v_{n-1},w), связывающий эти вершины. Далее будем рассматривать только сильно связные графы, состоящие из сильно связных подграфов, соединенных мостами и точками сочленения.

Обозначим множество инцидентных ребер вершины v через $E(v)=\{e_1, \ldots\}$, $|E(v)| \le 6$. На E(v) определим функцию q: $E(v) \rightarrow H=\{a,b,c\text{-}a,\text{-}b,\text{-}c\}$. Множество H описывает метки инцидентных ребер вершины v, расставляя их смежным ребрам в порядке поворота на угол 60° против часовой стрелки относительно некоторого случайно взятого ребра. Знак «-» перед a означает, что ребро является диаметрально противоположным ребру a. Можно также интерпретировать H как множество $\{x, x^{+1}, x^{+2}, x^{+3}, x^{+4}, x^{+5}\}$; степень букв обозначает количество поворотов против часовой стрелки на угол 60° относительно ребра x. В этом случае имеем следующее: $x^{+3}=\bar{x}$, $x^{+4}=\bar{x}^{+1}$, $x^{+5}=\bar{x}^{+2}$. Как видим, функцию q можно интерпретировать как направление, или как угол поворота относительно некоторого ребра.

Рассматриваемые в данной работе графы имеют мозаичную структуру, состоящую из правильных треугольников. Маршруту по ребрам мозаики «треугольник» [2] с длиной стороны равной одному ребру в направлении против часовой стрелки соответствует строка направлений $S=x\ x^{+2}\ x^{+4}$, а по часовой стрелке – $S=x\ x^{+4}\ x^{+2}$.

Следует заметить, что замкнутый маршрут длины 6 по всем соседним к внутренней вершине v описывается мозаикой «шестиугольник», и представляется при движении против часовой стрелки строкой $S=x\ x^{+1}\ x^{+2}\ x^{+3}x^{+4}x^{+5}$, по часовой стрелке - $S=x\ x^{+5}x^{+4}x^{+3}x^{+2}x^{+1}$.

Первое свойство в определении мозаики может быть заменено на эквивалентное.

Утверждение 1. Для всех внутренних вершин v существуют шесть маршрутов длины 3 из v в v, включающие всевозможные пары соседних ребер;

Действительно, согласно определению мозаики, для каждой вершины существует маршрут длины 6 по соседним вершинам. Поскольку в мозаике отсутствуют дыры, то любая вершина этого маршрута связана ребром с вершиной v, а значит, выполняется требуемое.

Утверждение 2. Любому маршруту $M=(v_1,v_2),(v_2,v_3),\ldots,(v_n,v_{n+1})$ взаимно однозначно соответствует строка направлений $S(v_1,v_2,\ldots,v_{n+1})=s_1s_2\ldots\ s_n$.

Доказательство. Утверждение следует из определения функции q , причем $s_1\ s_2\ \ldots\ s_n= q(v_1,v_2)\ q(v_2,v_3)\ \ldots q(\ v_n,\ v_{n+1})$.

Далее будем рассматривать маршруты по границам графа, в которых порядок просмотра ребер будет производиться против часовой стрелки.

Регулярная структура мозаики обуславливает следующие важные свойства системы перемещений АИ. Любое перемещение АИ по любому ребру (операцию перемещения) можно представить свободным вектором, имеющим начало в некоторой вершине v, конец – в вершине w, а x= q(v,w) задает направление свободного вектора. Другими словами между свободными векторами и направлениями, определяемыми функцией q, имеет место взаимно однозначное соответствие, поэтому данный вектор будем обозначать буквой x.

В качестве нулевого вектора, будем рассматривать вектор, у которого начало и конец совпадают, тогда x+0=x.

Для векторов определены правила сложения и умножения на действительные числа. Учитывая специфику мозаики графа, будем применять сложение векторов по правилу треугольников, например: $x+x^{+2}=x^{+4}$.

Для каждого вектора x имеется обратный вектор $\bar{x}$, сумма которых равна нулевому вектору. В данном случае, например $x+x^{+3}=x+\bar{x}=0$.

Определим результат сложения вектора с самим собой как умножение на числовой коэффициент: x+x= 2 x.

Остальные варианты сложения векторов представим в виде таблицы Кэли.

Таблица 1 – Таблица Кэли

	x	$\mathbf{x^{+1}}$	$\mathbf{x^{+2}}$	$\mathbf{x^{+3}}$	$\mathbf{x^{+4}}$	$\mathbf{x^{+5}}$
x	2 x	$x^{+1}x$	x^{+1}	0	x^{+5}	$x^{+5}x$
$\mathbf{x^{+1}}$	xx^{+1}	$2\ x^{+1}$	$x^{+2}x^{+1}$	x^{+2}	0	X
$\mathbf{x^{+2}}$	x^{+1}	$x^{+1}x^{+2}$	$2\ x^{+2}$	$x^{+3}x^{+2}$	x^{+3}	0
$\mathbf{x^{+3}}$	0	x^{+2}	$x^{+2}x^{+3}$	$2\ x^{+3}$	$x^{+4}x^{+3}$	x^{+4}
$\mathbf{x^{+4}}$	x^{+5}	0	x^{+3}	$x^{+3}x^{+4}$	$2\ x^{+4}$	$x^{+5}x^{+4}$
$\mathbf{x^{+5}}$	xx^{+5}	x	0	x^{+4}	$x^{+4}x^{+5}$	$2\ x^{+5}$

Как видим, данная операция обладает свойством перестановочности. Нетрудно показать, что выполняется ассоциативность сложения. А поскольку для каждого вектора x имеется обратный вектор $\bar{x}$, то введенная операция определяет коммутативную группу.

Важным свойством коммутативной группы является факт, что сумма любого числа элементов в коммутативной группе не зависит от их порядка.

Операцией перемещения из вершины v по ребру e= (v,w) будем называть пару (v,e), где $v\in V$, $e=(v,w)\in E$. Учитывая функцию q, имеем (v,e)=(v, q(e)), где q(e) описывает направление перемещения из вершины v. Таким образом, операция перемещения позволяет задать функцию f: $(E(v),(q(v,w))\rightarrow V$ так, что f(v,(q (v,w))=w, где (v,w) ребро с меткой q(v,w).

Лабиринтом L=(G, t, q, f) называется граф G, на котором определена t – разметка вершин, q – разметка ребер и f – функция перемещения.

Утверждение 3. Любому замкнутому маршруту в графе мозаичной структуры соответствует линейно зависимая комбинация свободных векторов, т.е. сумма равна 0.

Действительно, любому маршруту соответствует последовательность свободных векторов, для которой начало следующего вектора совпадает с концом предыдущего. Если совокупность этих векторов составляет замкнутый маршрут, то сумма их равна 0. Что требовалось доказать.

Следует заметить, что вышеописанному последовательному применению операции перемещения по ребрам графа соответствует последовательность свободных векторов, начало которых совпадает с последовательностью пройденных вершин и направлениями, и как раннее установлено, заданными строкой направлений $S(v_1,v_2,v_3,\ldots,v_{n+1})\ =\ s_1,s_2,\ldots,s_n$, где каждый символ s_i которой определяется перестановками множества H.

Другими словами, сумма направлений перемещений агента равна 0.

Следствие. Замкнутому маршруту по граничным вершинам любого подграфа мозаики соответствует линейно зависимая комбинация свободных векторов.

Действительно, маршруту $M=(v_1,v_2),(v_2,v_3),\ldots,(\ v_n,v_{n+1})$ по граничным ребрам графа, в силу его замкнутости, соответствует линейно зависимая комбинация свободных векторов $S(v_1,v_2,v_3,\ldots,v_{n+1}) = s_1,s_2,\ldots,s_n$, т.е. равная 0. С другой стороны, если граф состоит из подграфов, то каждому из них соответствуют либо подстроки, либо комбинации подстрок из строки направлений $s_1,s_2,\ldots,s_n$. Эти подстроки описывают маршруты обхода соответствующих подграфов, маршрутам соответствуют линейно зависимые комбинации свободных векторов.

Таким образом, поиск и выделение подграфов из графа сводится к поиску подстрок, сумма направлений которых рана 0.

Утверждение 4. Вершина v принадлежит границе подграфа, если $2 \le \deg(v) \le 6$ и существует единственный маршрут из v в v через все deg(v) соседние вершины.

Каждая граничная вершина в подграфе имеет две соседние вершины, образующие с ней граничное ребро, остальные deg(v) -2 являются внутренними вершинами. Поскольку граф не имеет дыр, то эти внутренние вершины связаны со всеми своими соседними вершинами, в том числе и с вершиной v и ее с соседними граничными вершинами. Что и требовалось доказать.

Утверждение 5. Вершина v является точкой сочленения подграфов, если $4 \le \deg(v) \le 6$ и существует два или три маршрута из v в v через deg(v) соседних вершин.

Доказательство аналогично предыдущему.

Утверждение 6. Вершина v является точкой соединения подграфа с мостом, если $3 \le \deg(v) \le 6$ и существует только один маршрут из v в v длины deg(v) через соседние вершины.

Утверждение 7. Вершина принадлежит мосту, если deg(v) =2 и не существует ни одного маршрута из v в v длины 3, проходящего через соседние вершины.

Таким образом, для определения точек сочленения подграфов и соединения с мостом достаточно АИ дополнительно выполнить перемещение по маршруту, проходящему через соседние вершины, для очередной граничной вершине, степень которой $\deg(v) \ge 3$.

Утверждение 8. Временная сложность анализа любой граничной вершины не превосходит 7.

Обозначим через x^i направление, по которому АИ перешел в вершину v и deg(v)=n, n<6. Тогда, маршрут из граничной вершины v в v проходит через следующую граничную вершину, потом через n-2 внутренних вершин, далее – через предыдущую граничную вершину и возвращается в v. Следовательно, количество шагов необходимых для анализа граничной вершины v равно deg(v) и не превосходит 6.

Замкнутый маршрут длины 3 из v в v представляет собой треугольник, и при движении против часовой стрелки описывается строкой $S= x\ x^{+2}\ x^{+4}$, а по часовой стрелке - $S= x\ x^{+4}\ x^{+2}$. Замкнутый маршрут вокруг вершины v длины 6 представляет собой шестиугольник, и описывается при движении против часовой стрелки строкой $S= x\ x^{+1}\ x^{+2}\ x^{+3}x^{+4}x^{+5}$, по часовой стрелке - $S= x\ x^{+5}x^{+4}x^{+3}x^{+2}x^{+1}$.

Несложно описать этот замкнутый маршрут из v в v по соседним вершинам против и по часовой стрелке. Он в начальном и конечном перемещении АИ строятся по правилу треугольника между граничными и внутренними вершинами и по правилу шестиугольника – между внутренними вершинами. Пусть x^i направление, по которому АИ перешел в вершину v и deg(v)=n, n<6, и x^j – направление следующего ребра в движении АИ. Тогда, маршрут против часовой стрелки из v в v будет $S= x^j\ x^{r(j+2,6)}\ x^{r(j+2+1,6)} \ldots x^i$, где через r(a,b) обозначается остаток от деления a на b. Маршрут по часовой стрелке из v в v будет $S= x^{r(i+3,6)}\ x^{r(i+3-1,6)} \ldots x^{r(j+3,6)}$.

Далее, как только будет найдена первая вершина сочленения подграфов или вершина соединения моста с подграфом, дальнейшая строка направлений должна проверяться на предмет того, не является ли она маршрутом обхода очередного подграфа, т.е. сумма всех направлений перемещения АИ не равна ли 0. Заметим, что на множестве направлений определена коммутативная подгруппа, важным свойством которой является тот факт, что сумма любого числа ее элементов не зависит от порядка их взаимного расположения. Это значит, что выполнение операции сложения направлений возможно по мере их поступления от АИ на основе таблицы Кэли.

Таким образом, условием определения очередного подграфа является выполнение трех требований: получение от АИ информации о вершине сочленения подграфов или моста с подграфом, равенство нулю последующей подстроки направлений, и получение от АИ информации об очередной точке сочленения.

Заметим, если второе условие не выполняется, то значит, маршрут вокруг подграфа не замкнулся и следует повторить выше описанную процедуру для вершины нового сочленения.

Описание алгоритма работы АИ

Агент АИ выполняет следующие действия. Установленный в некоторую вершину графа, АИ может определять ее степень. Он также может выполнять повороты на 60° по и против часовой стрелки, а также может перемещаться из вершины в вершину по ребрам, определять направление своего перемещения и передавать его агенту АЭ.

Агент АЭ может преобразовывать строку сообщений и выделять подстроки, соответствующие отдельным сильносвязным компонентам графа и выделять из них подстроки базовых структур. Выделение из найденных подстрок базовых структур описано в [3].

Алгоритм работы АИ.

Вход: граф G;

Выход: строка направлений и пометок для мостов S.

Алгоритм:

1. Поместить АИ случайным образом в любую вершину графа v
2. АИ определяет степень вершины.
3. Если вершина является внутренней, тогда АИ выполняет:

{ Случайным образом выбирает ребро
Перемещается по диаметрально противоположному ребру
}
Пока есть ребро в данном направлении.

4. Отмечает вершину mark(v); d=x; /v – граничная вершина
5. Обход графа против часовой стрелки:

Определяет степень вершины St=deg(v);
Пока v не маркированная, выполняет:
{ Если v – начало моста;
Пересылает s1, v, d: $S=S\subset$ Pass(s1); Pass(v); Pass(d);
Иначе если v – вершина сочленения подграфов;
Пересылает e, v, d: $S=S\subset$ Pass(e); Pass(s); Pass(d);
Иначе если v – конец моста
Пересылает e, v, d: $S=S\subset$ Pass(e); Pass(v);Pass(d);
Иначе
Пересылает d: $S=S\subset$ Pass(d);
Переходит к следующей вершине;
Определяет направление d;
}

6. Конец работы АИ.

Временная сложность алгоритма оценивается так:

- выход на границу графа - (n-1)/3, т.е. O(n) [2];
- обход по границе не превосходит 6n, т.е.составляет O(n).

Емкостная сложность E(n) отсутствует.

Описание алгоритма работы АЭ

В качестве базовых структур предусмотрены следующие виды мозаик [2]: равносторонний треугольник, параллелограмм, возможные трапеции и шестиугольник.

Алгоритм работы АИ.

Вход: строка S;

Выход: формула F, описывающая разбиение исходного графа на подграфы, которые разбиваются на базовые мозаики.

Алгоритм.

1. Пока не конец строки S и не символ s выполнить:

переместить символ в конец строки S;

2. Пока не конец строки S выполнить:

{ Если поступает символ s, то выполнить:
{ Sub=$\varnothing$;
записать в формулу F символ «(»;
}
Иначе если поступает символ e, то выполнить:
{ Пока не конец строки Sub выполнить:
{ выделить очередную базовую структуру;
добавить в формулу F «+» и символическую запись найденной структуры;
удалить из Sub соответствующий фрагмент;
}
}
Иначе если поступает символ s1, то выполнить / признак моста
{ Записать в F «M(»
Пока не символ e, выполнить:
{ записать в F очередной символ; }
записать в F «)»;
} Иначе записать символ в Sub;
}

Емкостная сложность определяется сложностью списков строки направлений S, множества граничных вершин $V'\subset V$, и строки формул F, т.е. E(n)=n.

Временная сложность O(n) определяется величинами O(n).

Следует заметить, что [3] был предложен алгоритм поиска подграфов, с временной сложностью $O(n^2)$.

Утверждение 8. Выполняя алгоритмы исследования и преобразования строки направлений, агенты распознают любой граф G с точностью до изоморфизма.

Действительно строится граф P изоморфный исходному G, поскольку на каждом шагу производятся однозначные преобразования.

Выводы

В работе предложены алгоритмы разложения исходного графа мозаичного вида на сильно связные подграфы и описания структуры графа в строковом виде. Далее предполагается рассмотреть графы, состоящие из сильно связных подграфов, соединенных мостами, с дырами.

Список использованной литературы

3. Кудрявцев В.Б. О поведении автоматов в лабиринтах / В.Б. Кудрявцев, Ш. Ушчумлич, Г. Килибарда // Дискретная математика. – 1992. – Т.4, Вып. 3. – С. 3-28.
4. Шатохина Н.К. Распознавание графа мозаичной структуры коллективом агентов / Н.К. Шатохина, П.А. Шатохин // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Проблеми моделювання та проектування (МАП2011). – 2011. – Вип. 9 (179). – С. 111 –121.
5. Н.К. Шатохина Об анализе мозаичных лабиринтов с использованием коллектива агентов / Н.К. Шатохина // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS - 2012): X міжнар. наук.-практ. конф., 21-23 листопада 2012 р.: тези допов. – Д.: ДНУ ім. Олеся Гончара, 2012. – С. 320 -321.

Надійшла до редакції 16.09.2015

Н.К. ШАТОХІНА, **П.О. ШАТОХІН**
Донецький національний технічний університет, м Красноармійськ, Україна
ПОДАННЯ МОЗАЇЧНИХ ГРАФІВ У ВИГЛЯДІ СИСТЕМИ ПІДГРАФІВ
Розглянуто задачу виділення компонент у об'єкті, модель якого представлена у вигляді графа мозаїчного виду, з використанням двох агентів. Описано алгоритм визначення точок зчленування і мостів у вихідному об'єкті, що з'єднують окремі компоненти вихідного об'єкта. Наведено алгоритм опису структури вихідного об'єкта в строковому вигляді.
Ключові слова: граф, мозаїка, агент, алгоритм.

N.K. SHATOKHINA, P.O. SHATOKHIN
Donetsk National Technical University, Krasnoarmiysk, Ukraine
PRESENTATION OF MOSAIC GRAPHS IN THE FORM OF SUBGRAPHS SYSTEM
We examined the task of restoring the structure of graph without the holes of the mosaic form, which consists of the equilateral triangles, by two automata (further by agents). The first agent carries out displacements over the initial graph and transmits information to the second agent. The second agent according to the obtained information describes structure of the graph. In the algorithm of the work of the first agent it is assumed that it randomly can be placed into any apex of graph; therefore the algorithm can consist of two stages. During the first stage, if it is necessary, agent reaches the boundary, and in the second stage - goes around graph counterclockwise on the boundary edges until it returns into the apex of output to the boundary. The line of directions, which was generated and transmitted by the first agent, is analyzed. In the algorithm of the work of the second agent the line is examined from the end. At first, the sequential substring, which describes separate strongly connected component, is separated. Then each substring is the combination of the designations of base mosaics.
Keywords: graph, mosaic, agent algorithm.