

УДК 004.031:669.013:532.61

Т.А. Левицкая, канд. техн. наук, доц.  
ГВУЗ "Приазовский государственный технический университет", г. Мариуполь, Украина  
tlevitiisys@gmail.com**Автоматизация процесса расчета плотности и поверхностного натяжения расплавов в методе лежащей капли**

*В данной работе рассматривается автоматизация процесса расчета плотности и поверхностного натяжения расплавов. Для решения поставленной задачи разработан и реализован алгоритм расчета плотности и поверхностного натяжения высокотемпературных расплавов по форме лежащей капли. Это позволило полностью автоматизировать этот процесс и свести к минимуму ошибки, которые могут быть допущены экспериментатором в процессе вычислений.*

**Ключевые слова:** *поверхностное натяжение расплавов, контур меридиональной кривой, радиус, полином Ньютона, узлы интерполяции, график, цифровое изображение, алгоритм, уравнение Лапласа, плотность, метод наименьших квадратов, метод лежащей капли, Delphi.*

**Введение**

Из имеющихся способов определения поверхностного натяжения для измерений при высоких температурах обычно используют статические способы, из которых особенно широкое распространение получили: метод максимального давления при образовании пузырька, метод отрыва кольца и метод лежащей капли. Последний особенно удобен в экспериментальном осуществлении для измерения поверхностного натяжения весьма вязких жидкостей, а также расплавов, обладающих высокой химической активностью [1].

Расчет поверхностного натяжения, как известно, связан с решением основного уравнения поверхности капли:

$$\sigma \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (\rho_1 - \rho_2) \cdot g \cdot x + \frac{2 \cdot \sigma}{R_0} \quad (1)$$

где

$\sigma$  – поверхностное натяжение на границе раздела фаз;

$R_1$  и  $R_2$  – главные радиусы кривизны элемента поверхности в рассматриваемой точке;

$R_0$  – радиус кривизны в вершине капли;

$\rho_2$  – плотность среды, в которой находится капля;

$\rho_1$  – плотность среды, образующей каплю;

$g$  – ускорение силы тяжести;

$x$  – координата точки на поверхности капли по вертикальной оси.

К сожалению, непосредственное измерение кривизны поверхности затруднительно. Поэтому

измеряют координаты точек поверхности капли. Т.к. последняя является симметричной относительно оси  $x$ , то достаточно определить лишь координаты точек плоской кривой, которая является меридиональным сечением поверхности. Если по координатам точек составлено уравнение кривой  $x = \varphi(y)$ , то для любой ее точки радиусы

кривизны выразятся:  $R_1 = \frac{[1 + (dx/dy)^2]^{3/2}}{d^2x/dy^2}$  и

$R_2 = \frac{[1 + (dx/dy)^2]^{1/2}}{dx/dy}$ . Подставим выражения

$R_1$  и  $R_2$  в основное уравнение поверхности, получаем дифференциальное уравнение, которое в общем виде аналитически не проинтегрировано [2].

**Постановка задачи**

В методе неподвижной капли ее фотографируют или проецируют на экран с последующей ручной обработкой изображения. Измеряемой величиной при этом являются  $L$  (максимальный радиус капли) и  $h$  – (высота экваториального сечения до ее вершины) [3]. На основе этих измерений рядом авторов предложено несколько частных решений дифференциального уравнения, большинство из которых имеет ограниченное применение.

Многие из них были получены на основании предположения, что капля весьма большая. Поэтому для капель средних размеров их применять нельзя [4]. Пятизначные таблицы Башфорта и Адамса применяются для капель с соотношением  $L/h < 2,1$ . Эти таблицы вначале не

применяли, по-видимому из-за их несколько неудобной формы, сейчас они превратились в библиографическую редкость. Портер предложил формулу и график поправок в функции от  $h/L$ , составленный на основе таблиц Башфорта и Адамса для средних и на основе приближенных формул для больших капель. Дорсеем был предложен новый способ обмера капель и эмпирическая формула для расчетов, основанная на данных таблиц Б. и А. для случая, когда  $\varphi = 45^\circ$  [5].

Неудобства, связанные с табличным описанием функции привели С.И. Попеля и др. к графическому интегрированию уравнения (1). Изложенная ими методика применима к каплям произвольных размеров [6-7]. Построение графиков для расчета  $\sigma$  является весьма трудоемким процессом, а внести какие-либо изменения к уже опубликованным С.И. Попелем и др. графикам не представляется возможным. К тому же раньше точность метода определялась точностью измерительного инструмента.

С целью повышения надежности, точности, исключения погрешности экспериментатора, мы поставили перед собой задачу перевести метод графического интегрирования основного уравнения поверхности капли на машинный уровень. Реализация поставленной перед нами математической задачи и разработка сопутствующих элементов, поддерживающих ее решение, были выполнены в системе визуального программирования Delphi. Программа по заданным начальным условиям производит расчеты и возвращает величину поверхностного натяжения, с такой степенью точности, которая нам необходима.

### Описание

На рис.1 представлена схема капли и выбор системы координат. Ось  $Oy$  направляется перпендикулярно силе тяжести, ось  $Ox$  – вдоль направления ее действия, начало координат либо совпадает с вершиной капли, либо отвечает нулевому гидростатическому давлению. Так как поверхность капли является симметричной относительно оси  $X$ , то ее можно получить вращением кривой  $OMN$  (рис.1) вокруг этой оси. Известно, что на поверхности вращения один радиус главной кривизны в любой точке совпадает с радиусом кривизны меридиана ( $R_1$ ), а второй равен отрезку нормали между точкой поверхности и осью вращения. Эти свойства используют при графическом интегрировании уравнения (1).

Метод решения состоит в том, что сначала для определенного, произвольно заданного

значения  $\Delta d / \sigma$  (здесь и в дальнейшем для краткости  $(\rho_1 - \rho_2) \cdot g$  обозначено  $\Delta d$ ) приближенно строят меридиональные кривые капель различной величины и находят для них соотношение между высотой ( $h$ ) и диаметром ( $L$ ). Затем, аналогичную зависимость устанавливают для другого отношения  $\Delta d / \sigma$ , третьего и т.д. Имея такие закономерности можно решить и обратную задачу, а именно для данных  $h$  и  $L$  определить  $\Delta d / \sigma$ , и следовательно, по известному  $\Delta d$  найти  $\sigma$ .

Построение проводится следующим образом: задаются произвольным значением  $R_0$ , и его отклоняем на заданный угол  $\alpha_1 = \Delta\alpha$  из точки  $O$ . Получаем т. В (рис.2). Находим ординату  $x_1$  т. В из прямоугольного треугольника  $BO_1O$   $x_1 = BO \cdot \sin \alpha_1$ , где  $BO = R_1 = R_0$ . По координате т.О ( $x_0=0, y_0=R_0$ ), длине  $BO$  и координате  $x_1$  т.В, находим координату  $y_1$  т.В.  $y_1 = y_0 - \sqrt{R_1^2 - (x_0 - x_1)^2}$ . Найденную ординату  $y_1$  т.В, а также произвольно выбранное значение  $\Delta d / \sigma$  и  $R_1 = R_0$  подставляем в уравнение (1.3) и вычисляем  $R_2$  в т.В. Та как вершина совпадает с началом координат  $y_0=0$ .

Следующие операции выполняют в цикле, пока угол  $\alpha$  не будет равен  $\pi/2$ . Отклоняем угол на  $\Delta\alpha$ , получаем угол  $\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha$  и получаем некоторую точку  $C_1$ . Находим ее координаты следующим образом. Поднимаем перпендикуляр из т.  $O_1$  на прямую  $y_2C_1$ . Координата  $x_2 = y_2M + MC_1$ . Отрезок  $MC_1$  находим из прямоугольного треугольника  $C_1MO_1$ , где  $C_1O_1 = R_2$ .  $MC_1 = R_2 \cdot \sin \alpha_2$ . Отрезок  $y_2M$  равен абсциссе т.  $O_1$ . Найдем координаты т.  $O_1$ , которая делит отрезок  $BO$  в заданном отношении:

$$\lambda = \frac{BO_1}{O_1O} = \frac{R_2}{R_1 - R_2}.$$

Считаем, что при достаточно малом изменении текущего угла  $\alpha$   $BO_1 = C_1O_1 = R_2$ .

По значению  $\lambda$  находим координаты т.  $O_1$ :  $Y_{O_1} = \frac{Y_1 + \lambda \cdot Y_0}{1 + \lambda}$ ,  $X_{O_1} = \frac{X_1 + \lambda \cdot X_0}{1 + \lambda}$ .

$$\text{Координата } x_2 = R_2 \cdot \sin \alpha_2 + \frac{x_1 + \lambda \cdot x_0}{1 + \lambda}.$$

Ордината т.  $C_1$  равна

$$y_2 = y_{O_1} - \sqrt{R_2^2 - (x_{O_1} - x_2)^2}.$$

Найдем радиус кривизны  $R_1'$  (отрезок  $C_1L$ ). По двум точкам  $O_1$  и  $C_1$  составим уравнение прямой и найдем ординату т.  $L(0, Y_L)$ , которая принадлежит

$$\text{ей: } Y_L = \frac{(0 - x_2)(y_{O_1} - y_2)}{x_{O_1} - x_2} + y_2 \text{ и}$$

$$R_1' = \sqrt{(Y_L - Y_2)^2 + (0 - X_2)^2}.$$

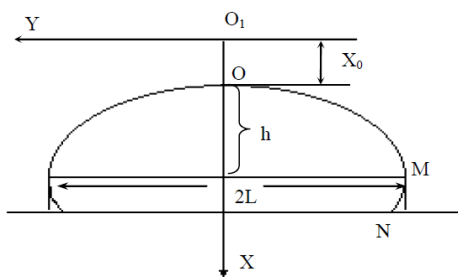


Рисунок 1 - Профиль неподвижной капли

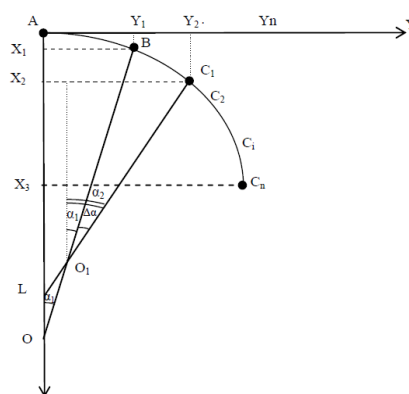


Рисунок 2 - Контур меридиональной кривой

Найденную ординату  $y_2$  т.С<sub>1</sub> и радиус кривизны  $R_1'$  подставляем в уравнение (1.3) и вычисляем  $R_2'$  и т.д. Получаем точку С<sub>n</sub>, лежащую на экваторе капли. Чем меньше задан угол поворота радиуса, тем точнее составленная по ним кривая воспроизводит действительный контур меридиональной кривой. Угол можно задать в сотые доли градуса. Повторяя построения для различных  $R_0$ , но для принятого  $\Delta d / \sigma$  получают ряд точек С<sub>n<sub>i</sub></sub>. Откладывают в прямоугольной системе их координаты ( $L_i$  и  $h_i$ ) и соединяют их плавной кривой (рис.3).

Последняя является геометрическим местом точек, удовлетворяющих условию:  $\Delta d / \sigma = \text{const}$ . Достаточно малый шаг для

начального радиуса  $\Delta R_0 \rightarrow 0$  позволяет построить эту кривую из бесконечно малых отрезков, что гарантирует точность построения. Затем производят аналогичные построения для другого значения  $\Delta d / \sigma$ , для третьего и т.д. в результате этого получают семейство кривых, представленное на рис. 4. На графиках предложенных С.И. Попелем и др. шаг для  $\Delta d / \sigma$  задавали  $\approx 0,5-1$  [7]. Возможности нашего метода позволяют значительно расширить уже имеющиеся графики для расчета поверхностного натяжения, уменьшив шаг.

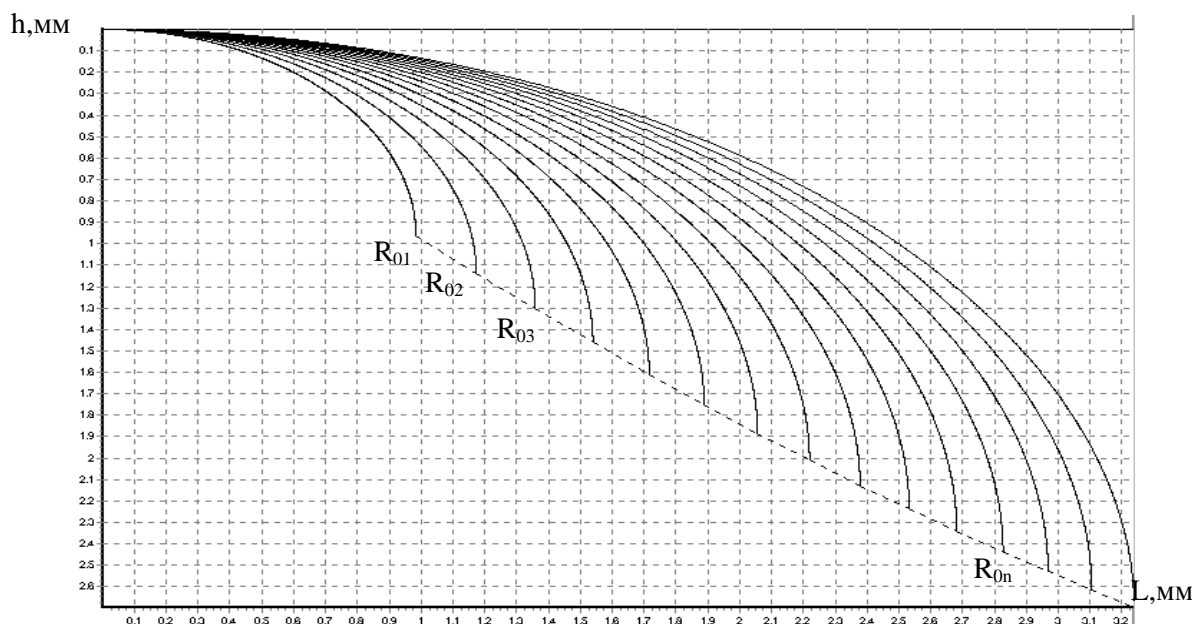


Рисунок 3 - Кривая составленная из точек С<sub>n<sub>i</sub></sub>

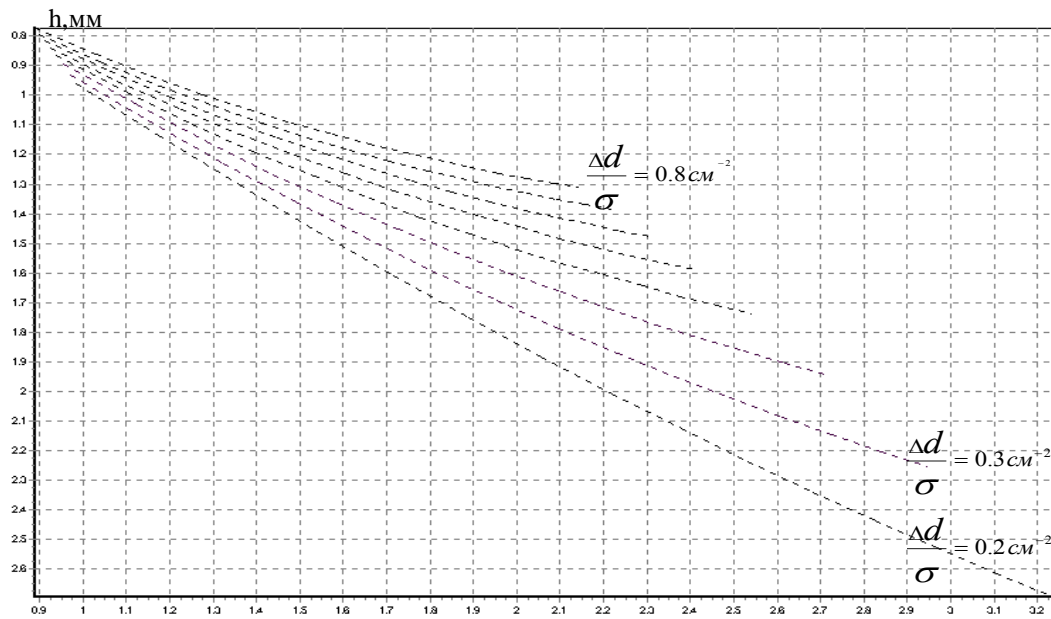


Рисунок 4 - Кривые для расчета поверхностного натяжения по форме неподвижной капли

Расчеты по графикам (обратная задача) просты и наглядны, а возможности масштабирования в Delphi позволяют приблизить отрезки графиков настолько насколько это необходимо. В этом заключается удобство вычислений по ним. Однако экспериментатору на этом этапе работы приходится эти вычисления производить вручную. Это не экономит его времени и при этом существует вероятность того, что он может допустить ошибку. Автоматизировать этот этап работы можно способом, который описан ниже.

Все значения  $h$ ,  $L$  и соответствующего им  $\Delta d/\sigma$  хранятся в базе данных. Можно решить обратную задачу просто как поиск в базе данных и возвращение найденного значения. Однако существует и вероятность того, что решая обратную задачу таким способом, для введенных пользователем значений  $h$  и  $L$  соответствующего им значения  $\Delta d/\sigma$  не будет. Для этого случая применим метод интерполяции, который позволяет восстанавливать значение функции в промежуточной точке по известным ее значениям в соседних точках [8]. Это позволило нам рассчитывать значение  $\Delta d/\sigma$  для любых значений  $h$  и  $L$ .

Поскольку значения высоты и радиуса получены расчетным путем и точного шага нет, применяли интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих значений аргумента:

$$P(x) = y_0 + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2] \times (x - x_0)(x - x_1) + \dots + [x_0, x_1, \dots, x_n] \times (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad 2$$

где  $y = P(x)$  - полином  $n$ -ой степени;

$[x_0, x_1, \dots, x_n]$  - разделенная разность ( $n+1$ ) порядка.

Алгоритм поиска  $\Delta d/\sigma$  для заданных значений  $h_k$  и  $L_k$ , заключается в следующем:

1. Для заданного значения  $L_k$  приближенно вычисляем, применяя полином Ньютона, значение  $h_i$ , где  $i=1, n$  вначале для первого значения  $\Delta d/\sigma$  (узлами интерполяции являются все соотношения  $h$  и  $L$  для данного значения  $\Delta d/\sigma$ ), затем для второго значения  $\Delta d/\sigma$  и т.д.;

2. На основании полученных узлов интерполяции  $h_1 \dots h_n$  и соответствующих им значений  $\Delta d/\sigma_1 \dots \Delta d/\sigma_n$ , составляем интерполяционный полином Ньютона (2), и по нему находим для заданного  $h_k$  соответствующее ему значение  $\Delta d/\sigma_k$ .

## Выводы

Получило дальнейшее развитие решение основного уравнения поверхности капли, которое значительно ускорило обработку по сравнению с известным методом графического интегрирования, предложенным С.И. Попелем и сотрудниками, расчет в котором производился по графикам вручную. Применение

интерполяционной формулы Ньютона для неравноотстоящих значений аргумента позволило разработать и реализовать в системе визуального программирования Delphi алгоритм

с полной автоматизацией расчета поверхностного натяжения с высокой степенью точности (менее 0,5 %). До этого точность метода была 2-3%.

### Список использованной литературы

1. Левицкая Т.А. Применение информационных технологий для автоматизации расчетов термодинамических характеристик поверхностного слоя / Т.А. Левицкая // Вісник Приазовського державного технічного університету. – ПДТУ: Маріуполь, 2014. – №29. – С. 199-205.
2. Федосова И.В. Особенности построения эмпирического описания контура капли в автоматизации расчетов поверхностных свойств расплавов / И.В. Федосова, Т.А. Левицкая // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Металургія: Зб. наук. праць. – 2015. – Вип. 1(20). – С. 119-125.
3. Измерение капиллярных характеристик расплавов телевизионной системой с ЭВМ / А.Г. Амброк, С.А. Грузинцев, Э.Л. Лубе, В.В. Пеллер // Адгезия расплавов и пайка материалов. – 1984. – № 12. – С. 12-13.
4. Физико-химические методы исследований металлургических процессов / С.И. Филлиппов, П.П. Арсентьев, В.В. Яковлев, М.Г. Крашенинников. – М.: Металлургия, 1986. – 550 с.
5. Rotenberg Y. Determination of surface tension and contact angle from the shapes of axisymmetric fluid interfaces / Rotenberg Y., Boruvka L., Neumann A. W. // J. Colloid and Interface Sci. – 1993. – No 1. – P. 169-183.
6. Попель С.И. Поверхностные явления в расплавах / С.И. Попель. – М.: Металлургия, 1994. – 432 с.
7. Попель С.И. Графики для расчета поверхностного натяжения по размерам капли // С.И. Попель, Ю.П. Никитин, С.М. Иванов. – Свердловск, 1961. – 16с.
8. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Лаборатория Базовых знаний, 2002. – 632с.

Надійшла до редколегії 15.09.2015

#### Т.О. ЛЕВИЦЬКА

ДВНЗ "Приазовський державний технічний університет"

#### АВТОМАТИЗАЦІЯ ПРОЦЕСУ РОЗРАХУНКУ ЩІЛЬНОСТІ ТА ПОВЕРХНЕВОГО НАТЯГУ РОЗПЛАВІВ У МЕТОДІ ЛЕЖАЧОЇ КРАПЛІ

У даній роботі розглядається автоматизація процесу розрахунку щільності і поверхневого натягу розплавів. Для вирішення поставленого завдання розроблений і реалізований алгоритм розрахунку густини і поверхневого натягу високотемпературних розплавів за формою лежачої краплі. Це дозволило повністю автоматизувати цей процес і звести до мінімуму помилки, які можуть бути допущені експериментатором в процесі обчислень.

**Ключові слова:** цифрове зображення, алгоритм, рівняння Лапласа, щільність, метод найменших квадратів, поверхневий натяг, метод лежачої краплі, Delphi.

#### T.A. LEVITSKAYA

Priazovsky State Technical University

#### AUTOMATING THE PROCESS OF CALCULATING THE DENSITY AND SURFACE TENSION OF THE MELT IN THE METHOD OF SESSILE DROP

This paper deals with the automation of the process of calculating the density and surface tension of the melt. To solve the problem we developed and implemented an algorithm for calculating the density and surface tension of the melt in the form of high-temperature sessile drop. This will completely automate the process and minimize errors that can be tolerated by the experimenter during the computation.

**Keywords:** digital image, algorithm, Laplace equation, density, method of least squares, method of sessile drop, Delphi.