УДК 004.315

В.А. Святный, д-р техн. наук, проф.,
В.В. Лапко, канд. техн. наук, доц.,
А.В. Самощенко, канд. техн. наук, доц.
Донецкий национальный технический университет, г. Красноармейск
aleksandr.samoshchenko@gmail.com

Математическое описание компьютерных операций суммирования и вычитания целых чисел при смещенных кодах операндов

Двоичный код суммы сумматора неотрицательных целых чисел предложено описывать как сумму операндов по модулю – весовому коэффициенту выходного переноса. Показано, что традиционное определение дополнительного кода целых чисел компактно описывается одной операцией вычисления остатка переменной, смещенной по модулю сумматора. Предложены оригинальные математические модели операций вычисления дополнительного кода суммы и разности целых чисел, а также логические выражения для контроля переполнения разрядной сетки сумматора.

Ключевые слова: сумматор, дополнительный код, смещенный код, переполнение.

Введение

Практическая реализация суммирующих (вычитающих) компьютерных устройств предполагает обязательное наличие схем переполнения разрядной сетки результата, результат работы которых свидетельствует о корректности вычислений. При этом снижение аппаратных затрат может быть достигнуто за счет использования стандартных информационных сигналов. Для достижения этой цели предлагается применять смещенные дополнительные коды.

Общая методика суммирования

Операционные свойства сумматора неотрицательных целых чисел (рис.1) задаются формулой [1]

$$\Sigma(n+1,1) = a(n,1) + b(n,1) + e\,, \qquad (1)$$

где $a\,(n,1)$, $b\,(n,1)$ – условные обозначения двоичных кодов операндов соответственно $a\,(n)\;a\,(n\text{-}1)\;\ldots\;a\,(2)\;a\,(1)$ и $b\,(n)\;b\,(n\text{-}1)\;\ldots\;b\,(2)\;b\,(1)$ на информационных входах сумматора; $\Sigma(n+1,1)$ – условное обозначение двоичного кода полной суммы $\Sigma(n+1)\;\Sigma(n)\;\ldots\;\Sigma(2)\;\Sigma(1)$ на информационных выходах сумматора; e – входной перенос сумматора.

Рисунок 1 - Функциональная схема сумматора неотрицательных чисел

На информационных выходах сумматора полная сумма представлена кодом

$$\Sigma(n+1,1) = \text{ES}(n,1), \qquad (2)$$

где E – выходной перенос сумматора; $\text{S}(n,1)$ – условное обозначение двоичного кода суммы $\text{S}(n)\;\text{S}(n\text{-}1)\;\ldots\;\text{S}(2)\;\text{S}(1)$.

Для определения операции формирования выходного переноса сумматора представим (2) полиномом n-ой степени по основанию 2:

$$\Sigma(n+1,1) = \text{E}\cdot 2^n + \text{S}(n,1), \qquad (3)$$

где 2^n = V – весовой коэффициент выходного переноса в двоичном коде $\text{ES}(n)\;\text{S}(n\text{-}1)\;\ldots\;\text{S}(2)\;\text{S}(1)$, и равносильным неравенством

$$\text{E} = \begin{cases} 1 \text{ при } \Sigma(n+1,1) = 2^n + \text{S}(n,1) \geq 2^n, & (4)\\ 0 \text{ при } \Sigma(n+1,1) = \text{S}(n,1) < 2^n. & (5)\end{cases}$$

Согласно равенству 2^n = V, имеем

$$E = \begin{cases} 1 \text{ при } \Sigma(n+1,1) \geq \text{V}, & (6)\\ 0 \text{ при } \Sigma(n+1,1) < \text{V}. & (7)\end{cases}$$

Для определения операции вычисления суммы $\text{S}(n,1)$ на информационных выходах сумматора представим (3) неравенством

$$\Sigma(n+1,1) = \begin{cases} \text{V} + \text{S}(n,1) \text{ при E=1},\\ \text{S}(n,1) \text{ при E=0}.\end{cases}$$

Следовательно, двоичный код суммы $\text{S}(n,1)$ определяется неравенством

$$\text{S}(n,1) = \begin{cases} \Sigma(n+1,1) - \text{V} \text{ при E=1}, & (8)\\ \Sigma(n+1,1) \text{ при E=0}. & (9)\end{cases}$$

В силу этого, согласно (6) и (7), окончательно получим

$$\text{S}(n,1) = \begin{cases} \Sigma(n+1,1) - \text{V} \text{ при } \Sigma(n+1,1) \geq \text{V}, & (10)\\ \Sigma(n+1,1) \text{ при } \Sigma(n+1,1) < \text{V}. & (11)\end{cases}$$

В полученных выражениях (10) – (11) операция формирования суммы $\text{S}(n,1)$ задается различными формулами на разных участках изменения кода полной суммы $\Sigma(n+1,1)$, что значительно усложняет исследование математической модели сумматора.

Суммирование в формате дополнительных кодов

С учетом свойств операции вычисления остатков по модулю [1] возможно разработать более удобную математическую модель сумматора. Для разработки усовершенствованной модели представим выражение (10)–(11) в следующем виде:

$$S(n,1)=\begin{cases}\Sigma(n+1,1)-V=(\Sigma(n+1,1))_{mV} \text{ при } \Sigma(n+1,1)\geq V,\\ \Sigma(n+1,1)=(\Sigma(n+1,1))_{mV} \text{ при } \Sigma(n+1,1)<V,\end{cases}$$

где $(\Sigma(n+1,1))_{mV}$ – остаток от деления двоичного кода полной суммы $\Sigma(n+1,1)$ на модуль V сумматора или, другими словами, остаток по модулю V.

Отсюда следует, что во всей области существования полной суммы [0;2V) операцию формирования кода суммы $S(n,1)$ на информационных выходах сумматора (рис.1) возможно определить одним выражением

$$S(n,1) = (\Sigma(n+1,1))_{mV} . \qquad (12)$$

В силу этого, согласно (1), окончательное выражение для операции вычисления двоичного кода суммы на информационных выходах сумматора может быть представлено в виде

$$S(n,1) = (a(n,1) + b(n,1) + e)_{mV}. \qquad (13)$$

Для реализации операции суммирования целых чисел посредством сумматора неотрицательных чисел сумму целых чисел C=A+B, согласно (13), будем искать в виде остатка по модулю V, который на основании свойств суммирования чисел по модулю [4] представим цепочкой равносильных равенств:

$$(A + B)_{mV} = (V + (A + B))_{mV} = (V + A + V + B)_{mV} = =((V + A)_{mV} + (V + B)_{mV})_{mV}.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$(V + C)_{mV} = ((V + A)_{mV} + (V + B)_{mV})_{mV}, \qquad (14)$$

где C = (A+B); $(V+C)_{mV}$, $(V+A)_{mV}$, $(V+B)_{mV}$ – соответственно остатки по модулю V смещенных целых чисел (V+C), (V+A), (V+B), (|A|, |B|, |A+B|)<V.

Операции вычисления остатков смещенных целых чисел (V+C), (V+A), (V+B) через модули чисел определяются неравенствами [4]:

$$(V+C)_{mV} = \begin{cases}|C| \text{ при } C\geq 0,\\ V-|C| \text{ при } C<0;\end{cases} \qquad (15)$$

$$(V+A)_{mV} = \begin{cases}|A| \text{ при } A\geq 0,\\ V-|A| \text{ при } A<0;\end{cases} \qquad (16)$$

$$(V+B)_{mV} = \begin{cases}|B| \text{ при } B\geq 0,\\ V-|B| \text{ при } B<0.\end{cases} \qquad (17)$$

Соотношения (15) – (17), согласно равенству $V = 2^n$, полностью идентичны традиционной форме определения дополнительного кода n-разрядных целых чисел [3]. В силу этого равенство (14) с учетом свойств операции вычисления остатков по модулю $V = 2^n$ равносильно выражению

$$C_{ДК}(n,1) = \left(A_{ДК}(n,1) + B_{ДК}(n,1)\right)_{mV}, \qquad (18)$$

где $C_{ДК}(n,1) = (V+C)_{mV}$; $A_{ДК}(n,1) = (V+A)_{mV}$; $B_{ДК}(n,1) = (V+B)_{mV}$.

Таким образом, для реализации (18) посредством сумматора неотрицательных чисел (рис.1) необходимо выполнить операции:

$$a(n,1) = A_{ДК}(n,1);\ b(n,1) = B_{ДК}(n,1);\ e = 0 \qquad (19)$$

где $A_{ДК}(n,1)$, $B_{ДК}(n,1)$, $C_{ДК}(n,1)$ являются соответственно двоичными кодами:

$$A_{ДК}(n)\ A_{ДК}(n–1)\ \ldots\ A_{ДК}(2)\ A_{ДК}(1),$$

$$B_{ДК}(n)\ B_{ДК}(n–1)\ \ldots\ B_{ДК}(2)\ B_{ДК}(1),$$

$$C_{ДК}(n)\ C_{ДК}(n–1)\ \ldots\ C_{ДК}(2)\ C_{ДК}(1).$$

Тогда на информационных выходах $S(n,1)$ сумматора неотрицательных целых чисел, согласно (13) и (19), получим

$$\begin{aligned}S(n,1) &= (A_{ДК}(n,1) + B_{ДК}(n,1)+0)_{mV} = \\ &= (A_{ДК}(n,1)+ B_{ДК}(n,1))_{mV} = C_{ДК}(n,1).\end{aligned} \qquad (20)$$

Для корректного выполнения операции суммирования целых чисел посредством обработки их отображений в дополнительных кодах диапазон изменения слагаемых A, B и их суммы C = A+B не должен превышать область определения функций соответственно $A_{ДК}(A)$, $B_{ДК}(B)$ и $C_{ДК}(C)$. Длина двоичных кодов ограничена n разрядами, а область существования функций $A_{ДК}(n,1)$, $B_{ДК}(n,1)$ и $C_{ДК}(n,1)$ одинакова и определяется неравенством

$$0 \leq A_{ДК}(n,1), B_{ДК}(n,1), C_{ДК}(n,1) < V. \qquad (21)$$

По традиции [3,4] наборы двоичных кодов из интервала [0;V/2) назначаются для кодирования положительных, а из интервала [V/2;V) – для кодирования отрицательных чисел. В силу этого имеем систему неравенств:

$$V/2 \leq (A_{ДК}(A<0), B_{ДК}(B<0), C_{ДК}(C<0))< V, \qquad (22)$$

$$0 \leq (A_{ДК}(A\geq 0), B_{ДК}(B\geq 0), C_{ДК}(C\geq 0))< V/2. \qquad (23)$$

Поскольку $V = 2^n$, соотношениям (22) и (23) равносильна следующая система неравенств:

$$2^{n-1} \leq (A_{ДК}(A<0), B_{ДК}(B<0), C_{ДК}(C<0)) < 2^n,$$

$$0 \le (\text{А}_{\text{ДК}}(A\ge 0),\ \text{В}_{\text{ДК}}(B\ge 0),\ \text{С}_{\text{ДК}}(C\ge 0)) < 2^{n-1}.$$

Отсюда справедливо:

$$\text{А}_{\text{ДК}}(n)=\text{В}_{\text{ДК}}(n)=\text{С}_{\text{ДК}}(n)=\begin{cases}0 \text{ при } A\ge 0,\ B\ge 0,\ C\ge 0;\\ 1 \text{ при } A<0,\ B<0,\ C<0,\end{cases} \quad (24)$$

где $\text{А}_{\text{ДК}}(n)$, $\text{В}_{\text{ДК}}(n)$, $\text{С}_{\text{ДК}}(n)$ – соответственно старший разряд дополнительных кодов $\text{А}_{\text{ДК}}(n,1)$, $\text{В}_{\text{ДК}}(n,1)$ и $\text{С}_{\text{ДК}}(n,1)$.

Таким образом, при принятом способе кодирования положительных и отрицательных чисел старший разряд дополнительных кодов является знаковым разрядом, ноль и единица в котором определяют соответственно положительное и отрицательное значение целых чисел А, В и С, т.е. аргументов функций $\text{А}_{\text{ДК}}(A)$, $\text{В}_{\text{ДК}}(B)$ и $\text{С}_{\text{ДК}}(C)$.

После обозначения знаковых разрядов целых чисел А, В, С соответственно NA, NB, NC условные обозначения двоичных кодов $\text{А}_{\text{ДК}}(n)$, $\text{В}_{\text{ДК}}(n)$ и $\text{С}_{\text{ДК}}(n)$ принимают вид:

$$\begin{aligned}\text{А}_{\text{ДК}}(n,1) &= NA\ \text{А}_{\text{ДК}}(n-1,1);\\ \text{В}_{\text{ДК}}(n,1) &= NB\ \text{В}_{\text{ДК}}(n-1,1);\\ \text{С}_{\text{ДК}}(n,1) &= NC\ \text{С}_{\text{ДК}}(n-1,1),\end{aligned} \quad (25)$$

где $NA = \text{А}_{\text{ДК}}(n)$, $NB = \text{В}_{\text{ДК}}(n)$, $NC = \text{С}_{\text{ДК}}(n)$ – знаковые разряды целых чисел А, В, С в формате дополнительных кодов.

Контроль переполнения в канонической схеме суммирования

Неравенства (22) и (23) также определяют допустимый диапазон изменения модулей положительных и отрицательных чисел А, В, С в сумматоре дополнительных кодов. Действительно, согласно (15)–(17) и (22)–(23), имеют место неравенства:

$$\begin{aligned}0 \le (\text{А}_{\text{ДК}}(A\ge 0) = |A|_{\text{ПОЛ}},\ \text{В}_{\text{ДК}}(B\ge 0) = |B|_{\text{ПОЛ}},\\ \text{С}_{\text{ДК}}(C\ge 0) = |C|_{\text{ПОЛ}}) \le (V/2-1);\end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}V/2 \le (\text{А}_{\text{ДК}}(A<0) = V-|A|_{\text{ОТР}},\\ \text{В}_{\text{ДК}}(B<0) = V-|B|_{\text{ОТР}},\\ \text{С}_{\text{ДК}}(C<0) = V-|C|_{\text{ОТР}}) \le 1,\end{aligned} \quad (27)$$

где $|A|_{\text{ПОЛ}}$, $|B|_{\text{ПОЛ}}$, $|C|_{\text{ПОЛ}}$, $|A|_{\text{ОТР}}$, $|B|_{\text{ОТР}}$, $|C|_{\text{ОТР}}$ – соответственно модули положительных и отрицательных чисел А, В, С.

Таким образом, область определения функций $\text{А}_{\text{ДК}}(A)$, $\text{В}_{\text{ДК}}(B)$ и $\text{С}_{\text{ДК}}(C)$ задается отрезками числовой прямой:

$$0 \le (A\ge 0,\ B\ge 0,\ C\ge 0) \le (V/2-1); \quad (28)$$

$$-V/2 \le (A<0,\ B<0,\ C<0) \le -1. \quad (29)$$

При корректных значениях слагаемых, $A \in [-V/2;\ V/2-1]$ и $B \in [-V/2;\ V/2-1]$ сумма $C = A+B$ в общем случае определяется отрезком числовой прямой $[-V;\ V-2]$, длина которого превышает допустимую область определения функции $\text{С}_{\text{ДК}}(C)$, ограниченной промежутком $[-V/2;\ V/2-1]$. При $C \in [-V;\ -(V/2+1)]$ возникает отрицательное, а при $C \in [V/2;\ V-2]$ – положительное переполнение функции $\text{С}_{\text{ДК}}(C)$.

Отсюда следует, что алгоритм фиксации переполнения функции $\text{С}_{\text{ДК}}(C)$ определяется неравенствами:

$$\text{ОПП} = \begin{cases}1 \text{ при } C \in [-V;\ -(V/2+1)],\\ 0 \text{ при } C \in [-V/2;\ -1];\end{cases} \quad (30)$$

$$\text{ППП} = \begin{cases}1 \text{ при } C \in [V/2;\ V-2],\\ 0 \text{ при } C \in [0;\ V/2-1];\end{cases} \quad (31)$$

$$\text{ПП} = \begin{cases}1 \text{ при } C \in [-V;\ -(V/2+1)] \cup [V/2;\ V-2],\\ 0 \text{ при } C \in [-V/2;\ V/2-1),\end{cases} \quad (32)$$

где ОПП, ППП, ПП – соответственно признаки отрицательного, положительного и общего переполнения функции $\text{С}_{\text{ДК}}(C)$.

В области отрицательного переполнения суммы $C = (A+B) < 0$ на границах этого интервала, согласно (30), формируется двоичный код

$$\text{С}_{\text{ДК}}(n,1) = \begin{cases}(V-V)_{mV} = 0 < 2^{n-1},\\ \left(V-\frac{V}{2}-1\right)_{mV} = \frac{V}{2}-1 =\\ \quad = 2^{n-1}-1 < 2^{n-1}.\end{cases}$$

Отсюда следует, что в области отрицательного переполнения в старшем разряде дополнительного кода формируется состояние $\text{С}_{\text{ДК}}(n)=0$.

Поскольку отрицательное переполнение суммы $C = A+B$, согласно (30), возможно только при $(A+B) < 0$, $NA = NB = 1$, признак отрицательного переполнения суммы (A+B) должен формироваться при следующем наборе двоичных переменных:

$$\text{С}_{\text{ДК}}(n) = 0,\ NA = NB = 1. \quad (33)$$

В области положительного переполнения суммы $C = (A+B) > 0$ на границах этого интервала, согласно (31), образуется двоичный код

$$\text{С}_{\text{ДК}}(n,1) = \begin{cases}(V+V/2)_{mV} = V/2 = 2^n/2 = 2^{n-1},\\ (V+V-2)_{mV} = (V-2) = 2^n-2 =\\ \quad = 2(2^{n-1}-1) > 2^{n-1}.\end{cases}$$

Отсюда следует, что в области положительного переполнения функции $\text{С}_{\text{ДК}}(C)$ в старшем разряде двоичного кода $\text{С}_{\text{ДК}}(n,1)$ формируется состояние $\text{С}_{\text{ДК}}(n) = 1$.

В силу этого и с учетом (31) признак ППП должен формироваться при следующем наборе двоичных переменных:

$$\text{С}_{\text{ДК}}(n) = 1,\ NA = NB = 0. \quad (34)$$

В целом алгоритм фиксации признаков переполнения в схеме суммирования целых чисел, согласно (33)–(34), табл.1 и 2, описывается логическими выражениями:

$$ОПП = NA\ NB\ \overline{C_{ДК}(n)};$$
$$ППП = \overline{NA}\ \overline{NB}\ C_{ДК}(n); \quad (35)$$
$$ПП = ОПП \vee ППП.$$

Таблица 1. Алгоритм контроля отрицательного и положительного переполнения в канонической схеме суммирования целых чисел

NA	0	0	0	0	1	1	1	1
NB	0	0	1	1	0	0	1	1
$C_{дк}(n)$	0	1	0	1	0	1	0	1
ОПП	0	0	0	0	0	0	1	0
ППП	0	1	0	0	0	0	0	0

Таблица 2. Алгоритм контроля переполнения в канонической схеме суммирования целых чисел

ОПП	0	0	1	1
ППП	0	1	0	1
ПП	0	1	1	*

При реализации операции вычитания целых чисел посредством сумматора неотрицательных чисел (рис.1) разность чисел C = A – B будем искать, согласно (13), в виде остатка по модулю V, который на основании свойств операции вычисления остатка разности [4] представим цепочкой равносильных равенств

$$(A - B)_{mV} = (V + (A - B))_{mV} =$$
$$= (V + A + V - (V+B))_{mV} =$$
$$= ((V + A)_{mV} + V - (V + B)_{mV})_{mV}.$$

Отсюда следует, что согласно (18) и с учетом свойств операции вычисления остатков по модулю $V = 2^n$ имеет место равенство

$$C_{ДК}(n,1) = (A_{ДК}(n,1) + V - B_{ДК}(n,1))_{mV},$$

где $C_{ДК}(n,1) = (V + C)_{mV} = (V + (A - B))_{mV}$;
$A_{ДК}(n,1) = (V + A)_{mV}$; $B_{ДК}(n,1) = (V + B)_{mV}$;
$(|A|,|B|,|A - B|) < V$.

Поскольку

$$V - B_{ДК}(n,1) = 2^n - B_{ДК}(n,1) =$$
$$= (2^n - 1) - B_{ДК}(n,1) + 1 =$$
$$= 1\cdot2^{n-1} + 1\cdot2^{n-2} + \ldots + 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0 - B_{ДК}(n)\cdot2^{n-1} -$$
$$- B_{ДК}(n-1)\cdot2^{n-2} - \ldots - B_{ДК}(2)\cdot2^1 - B_{ДК}(1)\cdot2^0 + 1 =$$
$$= (1 - B_{ДК}(n))\cdot2^{n-1} + (1 - B_{ДК}(n-1))\cdot2^{n-2} + \ldots +$$
$$+ (1 - B_{ДК}(2))\cdot2^1 + (1 - B_{ДК}(1))\cdot2^0) + 1 =$$
$$= \overline{B_{ДК}(n)}\cdot2^{n-1} + \overline{B_{ДК}(n-1)}\cdot2^{n-2} + \ldots + \overline{B_{ДК}(2)}\cdot2^1 +$$
$$+ \overline{B_{ДК}(1)}\cdot2^0 + 1 = \overline{B_{ДК}(n)}\ \overline{B_{ДК}(n-1)} \ldots$$
$$\ldots \overline{B_{ДК}(2)}\ \overline{B_{ДК}(1)} + 1 = \overline{B_{ДК}(n,1)} + 1,$$

то справедливо

$$C_{ДК}(n,1) = (A_{ДК}(n,1) + \overline{B_{ДК}(n,1)} + 1)_{mV}, \quad (36)$$

где $\overline{B_{ДК}(n,1)}$ – поразрядная инверсия двоичного кода $B_{ДК}(n,1)$.

Таким образом, для реализации схемы вычитания целых чисел посредством сумматора неотрицательных чисел (рис.1), согласно (36), необходимо выполнить операции:

$$a(n,1) = (A_{ДК}(n,1);\ b(n,1) = \overline{B_{ДК}(n,1)};\ e = 1. \quad (37)$$

Тогда на информационных выходах суммы $S(n,1)$ сумматора неотрицательных чисел получим

$$S(n,1) = (A_{ДК}(n,1) + \overline{B_{ДК}(n,1)} + 1)_{mV} = C_{ДК}(n,1). \quad (38)$$

При допустимых значениях операндов $A \in [-V/2;\ V/2-1]$ и $B \in [-V/2;\ V/2-1]$ разность чисел C = A – B в общем случае определяется интервалом (–V; V). Поскольку функция $C_{ДК}(C)$ определена на отрезке [–V/2; V/2-1], при вычитании может возникать отрицательное и положительное переполнение. При $C \in [-(V-1); -(V/2+1)]$ происходит отрицательное, а при $C \in [V/2; (V-1)]$ – положительное переполнение $C_{ДК}(n,1)$.

В области отрицательного переполнения разности C = A – B < 0 на границах этого интервала формируется двоичный код

$$C_{ДК}(n,1) = \begin{cases} \left(V - (V-1)\right)_{mV} = 1 < 2^n \\ \left(V - \left(\frac{V}{2} + 1\right)\right)_{mV} = \frac{V}{2} - 1 = \\ = 2^{n-1} - 1 < 2^n. \end{cases}$$

Следовательно, в области отрицательного переполнения в старшем разряде дополнительного кода $C_{ДК}(n,1)$ формируется значение $C_{ДК}(n)=0$.

Поскольку отрицательное переполнение C = A – B возможно только при A < 0 (NA=1) и B > 0 (NB=0), признак ОПП должен формироваться при следующей комбинации двоичных переменных:

$$C_{ДК}(n) = 0,\ NA = 1,\ NB = 0. \quad (39)$$

В области положительного переполнения разности C = A – B при $C \in [V/2;\ (V-1)]$ на границах этого интервала формируется двоичный код

$$C_{ДК}(n,1) = \begin{cases} \left(V + \frac{V}{2}\right)_{mV} = \frac{V}{2} = 2^{n-1} \\ \left(V + (V-1)\right)_{mV} = V - 1 = \\ = 2^n - 1 > 2^{n-1}. \end{cases}$$

Следовательно, в области положительного переполнения в старшем разряде дополнительного кода $C_{ДК}(n,1)$ формируется значение $C_{ДК}(n)=1$.

Таким образом, поскольку положительное переполнение разности C = (A – B) возможно, согласно (32), только при A > 0 (NA = 0) и B < 0 (NB = 1), признак ППП разности C = A – B в схеме вычитания целых чисел должен формироваться при следующем наборе переменных:

$$C_{ДК}(n) = 1,\ NA = 0,\ NB = 1. \quad (40)$$

Следовательно, согласно (39), (40) и табл.3, алгоритм контроля переполнения в схеме вычитания целых чисел определяется логическими выражениями:

$$\text{ОПП} = \text{NA}\,\overline{\text{NB}}\,\overline{\text{C}_{\text{ДК}}(n)};$$
$$\text{ППП} = \overline{\text{NA}}\,\text{NB}\,\text{C}_{\text{ДК}}(n); \qquad (41)$$
$$\text{ПП} = \text{ОПП} \vee \text{ППП}.$$

Таблица 3. Алгоритм контроля переполнения в канонической схеме вычитания целых чисел

NA	0	0	0	0	1	1	1	1
NB	0	0	1	1	0	0	1	1
$С_{дк}(n)$	0	1	0	1	0	1	0	1
ОПП	0	0	0	0	1	0	0	0
ППП	0	0	0	1	0	0	0	0
ПП	0	0	0	1	1	0	0	0

В объединенной схеме суммирования и вычитания целых чисел (рис.2) на входах сумматора неотрицательных чисел, согласно (19) и (36), реализованы операции:

$$a(n,1) = \text{A}_{\text{ДК}}(n,1);$$
$$b(n,1) = \text{B}_{\text{ДК}}(n,1) \oplus \text{SUB} = \begin{cases} \text{B}_{\text{ДК}}(n,1) \text{ при SUB} = 0, \\ \overline{\text{B}_{\text{ДК}}(n,1)} \text{ при SUB} = 1; \end{cases}$$
$$e = \text{SUB},$$

где SUB – признак выполнения операции вычитания в операционном блоке.

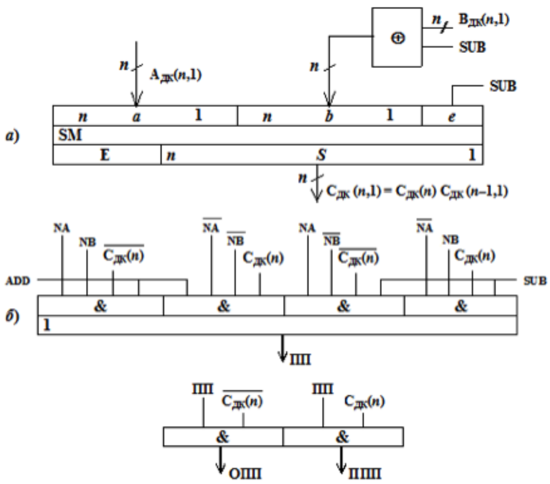

Рисунок 2 - Каноническая схема суммирования и вычитания целых чисел: *а*) операционный блок; *б*) схема контроля переполнения разрядной сетки сумматора

Схема фиксации переполнения, согласно каноническим выражениям (35) и (41), реализована в соответствии с эквивалентными логическими выражениями:

$$\text{ПП} = (\text{NA NB}\,\overline{\text{C}_{\text{ДК}}(n)} \vee \overline{\text{NA}}\,\overline{\text{NB}}\,\text{C}_{\text{ДК}}(n)) \wedge \text{ADD} \vee$$
$$\vee (\text{NA}\,\overline{\text{NB}}\,\overline{\text{C}_{\text{ДК}}(n)} \vee \overline{\text{NA}}\,\text{NB}\,\text{C}_{\text{ДК}}(n)) \wedge \text{SUB}; \qquad (42)$$
$$\text{ОПП} = \text{ПП} \wedge \overline{\text{C}_{\text{ДК}}(n)};$$
$$\text{ППП} = \text{ПП} \wedge \text{C}_{\text{ДК}}(n),$$

где ADD – признак операции суммирования целых чисел в операционном устройстве.

Таким образом, алгоритм контроля переполнения в канонической схеме суммирования и вычитания целых чисел описывается различными формулами при суммировании и вычитании чисел, что приводит к увеличению аппаратных затрат.

Контроль переполнения в композиционной схеме суммирования

При использовании выходного переноса сумматора в алгоритме контроля переполнения разрядной сетки сумматора, согласно табл.4 и табл.5, операции фиксации общего переполнения при суммировании и вычитании целых чисел описываются одинаковыми логическими выражениями. В силу этого алгоритм контроля сводится к реализации равенств:

$$\text{ПП} = \text{E}\overline{e_{\text{N}}} \vee \overline{\text{E}}e_{\text{N}} = \text{E} \oplus e_{\text{N}};$$
$$\text{ОПП} = \text{ПП} \wedge \overline{\text{C}_{\text{ДК}}(n)}; \qquad (43)$$
$$\text{ППП} = \text{ПП} \wedge \text{C}_{\text{ДК}}(n),$$

где e_{N} – входной перенос в знаковый разряд сумматора (рис.3).

Таблица 4. Алгоритм контроля переполнения в композиционной схеме суммирования целых чисел

NA	0	0	0	0	1	1	1	1
NB	0	0	1	1	0	0	1	1
e_{N}	0	1	0	1	0	1	0	1
$С_{дк}(n)$	0	1	1	0	1	0	0	1
E	0	0	0	1	0	1	1	1
ПП	0	1	0	0	0	0	1	0
ОПП	0	0	0	0	0	0	1	0
ППП	0	1	0	0	0	0	0	0

Таблица 5. Алгоритм контроля переполнения в композиционной схеме вычитания целых чисел

NA	0	0	0	0	1	1	1	1
NB	0	0	1	1	0	0	1	1
e_{N}	0	1	0	1	0	1	0	1
$С_{дк}(n)$	1	0	0	1	0	1	1	0
E	0	1	0	0	1	1	0	1
ПП	0	0	0	1	1	0	0	0
ОПП	0	0	0	0	1	0	0	0
ППП	0	0	0	1	0	0	0	0

Для формирования входного переноса e_{N} в знаковый разряд сумматора в операционном устройстве реализуются композиционные преобразования, т.е. одноразрядный сумматор знаковых разрядов структурно оформляется в виде отдельного функционального узла, что в большинстве случаев затрудняет реализацию схемы в интегральном исполнении.

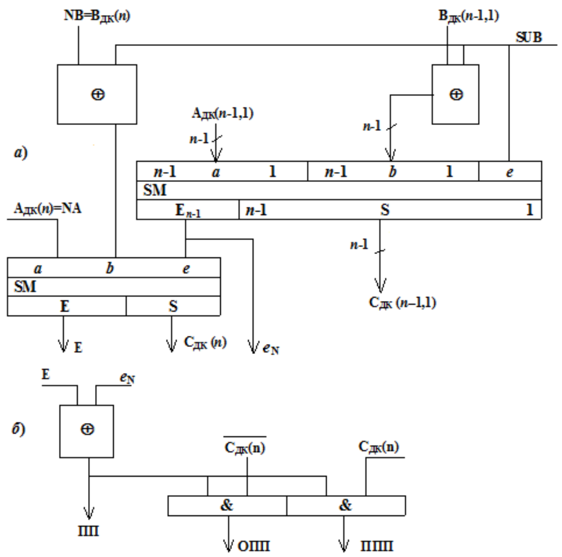

Рисунок 3 - Композиционная схема суммирования и вычитания целых чисел: *а*) операционный блок; *б*) схема контроля переполнения разрядной сетки сумматора

Суммирование и контроль переполнения в формате смещенных дополнительных кодов

При использовании в качестве операндов смещенных определенным образом дополнительных кодов в схеме суммирования и вычитания целых чисел обеспечивается однородность операционного сумматора и упрощение схемы контроля переполнения разрядной сетки.

В каноническом варианте, согласно (18), алгоритм суммирования целых чисел A и B описывается формулой

$$C_{\text{ДК}}(n,1) = (A_{\text{ДК}}(n,1) + B_{\text{ДК}}(n,1))_{mV}.$$

Используя свойства операции вычисления остатков по модулю V, представим выражение цепочкой равенств

$$\begin{aligned} C_{\text{ДК}}(n,1) &= (A_{\text{ДК}}(n,1) + B_{\text{ДК}}(n,1) + V)_{mV} = \\ &= ((A_{\text{ДК}}(n,1) + V/2) + (B_{\text{ДК}}(n,1) + V/2))_{mV} = \\ &= ((A_{\text{ДК}}(n,1) + V/2)_{mV} + (B_{\text{ДК}}(n,1) + V/2)_{mV})_{mV} = \\ &= \left(A^{\text{См}}_{\text{ДК}}(n,1) + B^{\text{См}}_{\text{ДК}}(n,1)\right)_{mV}, \end{aligned} \qquad (44)$$

где $A^{\text{См}}_{\text{ДК}}(n,1)$ – смещенный дополнительный код операнда A:

$$\begin{aligned} A^{\text{См}}_{\text{ДК}}(n,1) &= (A_{\text{ДК}}(n,1) + V/2)_{mV} = \\ &= (\text{NA}\ A_{\text{ДК}}(n\text{-}1,1) + 2^{n-1})_{mV} = \\ &= (\text{NA}\cdot 2^{n-1} + A_{\text{ДК}}(n\text{-}1)\cdot 2^{n-2} + \ldots + A_{\text{ДК}}(2)\cdot 2^{1} + \\ &\quad + A_{\text{ДК}}(1)\cdot 2^{0} + 2^{n-1})_{mV} = \\ &= ((\text{NA}\cdot 2^{n-1} + 2^{n-1})_{mV} + A_{\text{ДК}}(n\text{-}1)\cdot 2^{n-2} + \ldots + \\ &\quad + A_{\text{ДК}}(2)\cdot 2^{1} + A_{\text{ДК}}(1)\cdot 2^{0})_{mV} = \\ &= (((\text{NA} + 1)\cdot 2^{n-1})_{mV} + A_{\text{ДК}}(n - 1)\cdot 2^{n-2} + \ldots + \\ &\quad + A_{\text{ДК}}(2)\cdot 2^{1} + A_{\text{ДК}}(1)\cdot 2^{0})_{mV} = \\ &= \overline{\text{NA}}\cdot 2^{n-1} + A_{\text{ДК}}(n - 1)\cdot 2^{n-2} + \ldots + A_{\text{ДК}}(2)\cdot 2^{1} + \\ &\quad + A_{\text{ДК}}(1)\cdot 2^{0} = \overline{\text{NA}}\ A_{\text{ДК}}(n\text{-}1,1). \end{aligned}$$

Аналогично имеем смещенный дополнительный код операнда B:

$$B^{\text{См}}_{\text{ДК}}(n,1) = (B_{\text{ДК}}(n,1) + V/2)_{mV} = \overline{\text{NB}}\ B_{\text{ДК}}(n - 1,1)$$

Для реализации соотношения (44) в сумматоре неотрицательных чисел необходимо выполнить операции:

$$a(n,1) = A^{\text{См}}_{\text{ДК}}(n,1); \quad b(n,1) = B^{\text{См}}_{\text{ДК}}(n,1); \quad e = 0.$$

Тогда на информационных выходах суммы получим:

$$\begin{aligned} S(n,1) &= \left(A^{\text{См}}_{\text{ДК}}(n,1) + B^{\text{См}}_{\text{ДК}}(n,1)\right)_{mV} = C_{\text{ДК}}(n,1); \\ \Sigma(n+1,1) &= A^{\text{См}}_{\text{ДК}}(n,1) + B^{\text{См}}_{\text{ДК}}(n,1) = \text{E}\ S(n,1) = \\ &= \text{E}\ C_{\text{ДК}}(n,1) = \text{E}\ C_{\text{ДК}}(n)\ C_{\text{ДК}}(n - 1,1), \end{aligned} \qquad (45)$$

где $\Sigma(n+1,1)$ – двоичный код полной суммы смещенных дополнительных кодов операндов.

Численное значение полной суммы, согласно (45), на выходе сумматора определяется выражением

$$\begin{aligned} \Sigma(n+1,1) &= \text{E}\ C_{\text{ДК}}(n)\ C_{\text{ДК}}(n\text{-}1,1) = A^{\text{См}}_{\text{ДК}} + B^{\text{См}}_{\text{ДК}} = \\ &= (A_{\text{ДК}}(n,1) + V/2)_{mV} + (B_{\text{ДК}}(n,1) + V/2)_{mV} = \\ &= ((V + A)_{mV} + V/2)_{mV} + ((V + B)_{mV} + V/2)_{mV} = \\ &= (V + A + V/2)_{mV} + (V + B + V/2)_{mV} = \\ &= (A + V/2)_{mV} + (B + V/2)_{mV} = \\ &= A + V/2 + B + V/2 = V + (A + B) = V + C, \end{aligned} \qquad (46)$$

где $(A+V/2)_{mV} = (A+V/2)$ при $A \in [–V/2; V/2)$;
$(B+V/2)_{mV} = (B+V/2)$ при $B \in [–V/2; V/2)$;
$C = A + B$.

При $C = A + B \geq 0$ и отсутствии переполнения $C_{\text{ДК}}(n,1)$ ($C \in [0; V/2)$) полная сумма $\Sigma(n+1,1)$ на границах допустимого промежутка определяется двоичным кодом

$$\Sigma(n+1,1) = \text{E}\ C_{\text{ДК}}(n)\ C_{\text{ДК}}(n\text{-}1,1),$$

равным

$$\Sigma(n+1,1) = \begin{cases} V + 0 = V = 2^n = \\ = 1\cdot 2^n + 0\cdot 2^{n-1} \text{ при } C = 0, \\ V + \left(\frac{V}{2} - 1\right) = 2^n + (2^{n-1} - 1) > \\ > 1\cdot 2^n + 0\cdot 2^{n-1} \text{ при } C = \left(\frac{V}{2} - 1\right). \end{cases}$$

Таким образом, при ППП = 0 на выходе сумматора формируется двоичный код

$$\text{E}\ C_{\text{ДК}}(n) = 10. \qquad (47)$$

При $C = A+B > 0$ и возникновении положительного переполнения ($C \in [V/2;V–2]$) на границах области положительного переполнения, согласно (46), образуется двоичный код

$$\Sigma(n+1,1) = \begin{cases} V + \dfrac{V}{2} = 2^n + 2^{n-1} \text{ при } C = \dfrac{V}{2}, \\ V + (V-2) = 2V-2 = 2\cdot 2^n - 2 = \\ = 2^n + 2^n - 2 = 2^n + 2\cdot 2^{n-1} - 2 = \\ = 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-1} - 2 > \\ > 2^n + 2^{n-1} \quad \text{при } C = V-2. \end{cases}$$

Таким образом, в области положительного переполнения C = A + B в старших разрядах полной суммы образуется двоичный код

$$E\,C_{ДК}(n) = 11. \quad (48)$$

При C = A + B < 0 и отсутствии отрицательного переполнения (C ∈ [–V/2; –1]) двоичный код полной суммы на границах допустимого интервала определяется соотношениями

$$\Sigma(n+1,1) = \begin{cases} V - \frac{V}{2} = \frac{V}{2} = 2^{n-1} \text{ при } C = -\frac{V}{2}, \\ V - 1 = 2^n - 1 = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 > \\ > 2^{n-1} \text{ при } C = -1. \end{cases}$$

Следовательно, при C = A + B < 0 и отсутствии отрицательного переполнения $C_{ДК}(n,1)$ в старших разрядах двоичного кода полной суммы формируется двоичный код

$$E\,C_{ДК}(n) = 01. \quad (49)$$

При C = A + B < 0 в области отрицательного переполнения $C_{ДК}(n,1)$ (C ∈ [–V; –(V/2+1)]) двоичный код полной суммы на границах области отрицательного переполнения определяется соотношениями:

$$\Sigma(n+1,1) = \begin{cases} V - V = 0 < 2^{n-2} \text{ при } C = -V, \\ V - \frac{V}{2} - 1 = \frac{V}{2} - 1 = 2^{n-1} - 1 < \\ < 2^{n-2} \text{ при } C = -(V/2+1). \end{cases}$$

Следовательно, при C = A + B < 0 и возникновении отрицательного переполнения в старших разрядах двоичного кода полной суммы сумматора получим

$$E\,C_{ДК}(n) = 00. \quad (50)$$

Таким образом, при суммировании целых чисел с использованием смещенных дополнительных кодов операндов алгоритм фиксации переполнения, согласно (47)–(50) и табл.6, определяется логическими выражениями:

$$\begin{aligned} ПП &= \overline{E}\,\overline{C_{ДК}(n)} \vee E\,C_{ДК}(n) = \overline{E \oplus C_{ДК}(n)}; \\ ОПП &= ПП \wedge \overline{C_{ДК}(n)}; \qquad (51) \\ ППП &= ПП \wedge C_{ДК}(n). \end{aligned}$$

Таблица 6. Алгоритм контроля переполнения суммы целых чисел при смещенных кодах операндов

E	$C_{дк}(n)$	ПП	ОПП	ППП
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

При вычислении разности C = A – B в каноническом варианте алгоритм вычитания чисел, согласно (36), описывается формулой

$$C_{ДК}(n,1) = (A_{ДК}(n,1) + \overline{B_{ДК}(n,1)} + 1)_{mV}.$$

Используя свойства операции суммирования чисел по модулю, представим выражение цепочкой равенств

$$\begin{aligned} C_{ДК}(n,1) &= (A_{ДК}(n,1) + \overline{B_{ДК}(n,1)} + 1)_{mV} = \\ &= (A_{ДК}(n,1) + \overline{B_{ДК}(n,1)} + 1 + V)_{mV} = \\ &= \big((A_{ДК}(n,1) + V/2)_{mV} + \\ &+ (\overline{B_{ДК}(n,1)} + V/2)_{mV} + 1\big)_{mV} = \\ &= \big((A_{ДК}(n,1) + 2^{n-1})_{mV} + \\ &+ (\overline{B_{ДК}(n,1)} + 2^{n-1})_{mV} + 1\big)_{mV} = \\ &= \big(A^{См}_{ДК}(n,1) + \overline{B^{См}_{ДК}(n,1)} + 1\big)_{mV}, \end{aligned} \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{B^{См}_{ДК}}(n,1) &= \big(\overline{B_{ДК}(n,1)} + 2^{n-1}\big)_{mV} = \\ &= \big(\overline{NB}\,\overline{B_{ДК}(n-1,1)} + 2^{n-1}\big)_{mV} = \\ &= \big((\overline{NB} + 2^{n-1})_{mV} + \overline{B_{ДК}(n-1,1)}\big) = \\ &= NB\,\overline{B_{ДК}(n-1,1)}. \end{aligned}$$

Следовательно, для реализации разности C = A – B в сумматоре неотрицательных целых чисел необходимо выполнить операции:

$$\begin{aligned} a(n,1) &= \overline{NA}\,A_{ДК}(n-1,1); \\ b(n,1) &= NB\,\overline{B_{ДК}(n-1,1)}; \\ e &= 1. \end{aligned}$$

Тогда на выходе сумматора получим

$$\begin{aligned} S(n,1) &= \big(A^{См}_{ДК} + \overline{B^{См}_{ДК}} + 1\big)_{mV} = C_{ДК}(n,1), \\ \Sigma(n+1,1) &= A^{См}_{ДК} + \overline{B^{См}_{ДК}} + 1 = \\ &= E\,C_{ДК}(n)\,C_{ДК}(n-1,1). \end{aligned} \quad (53)$$

Численное значение двоичного кода полной суммы Σ(n+1,1) на выходе сумматора определяется формулой

$$\begin{aligned} \Sigma(n+1,1) &= E\,C_{ДК}(n)\,C_{ДК}(n-1,1) = \\ &= A^{См}_{ДК}(n,1) + \overline{B^{См}_{ДК}(n,1)} + 1 = \\ &= \Big(A_{ДК}(n,1) + \frac{V}{2}\Big)_{mV} + \Big(\overline{B_{ДК}(n,1)} + \frac{V}{2}\Big)_{mV} + 1 = \\ &= \Big((V+A)_{mV} + \frac{V}{2}\Big)_{mV} + \\ &+ \Big((V-1) - B_{ДК}(n,1) + \frac{V}{2}\Big)_{mV} + 1 = \\ &= \Big(V + A + \frac{V}{2}\Big)_{mV} + V - 1 - \\ &- \Big((V+B)_{mV} + \frac{V}{2}\Big)_{mV} + 1 = \\ &= \Big(A + \frac{V}{2}\Big)_{mV} + V - \Big(V + B + \frac{V}{2}\Big)_{mV} = \\ &= A + \frac{V}{2} + V - B - \frac{V}{2} = V + A - B = V + C, \end{aligned} \quad (54)$$

где C = A – B.

Поскольку функции $C_{ДК}$ (A+B) и $C_{ДК}$ (A–B) определены одинаковым интервалом [–V/2;V/2-1] и выражение (54) аналогично формуле (46), условием отсутствия переполнения при положительном и отрицательном значении разности (A–B) будут наборы двоичных кодов (47) и (49) соответственно.

Отрицательное и положительное переполнения разности при A∈[–V/2; (V/2-1)] и B∈[–V/2; (V/2-1)] определяются соответственно интервалами [–(V–1); –(V/2+1)] и [V/2; V–1], отличающимися от соответствующих интервалов отрицательного и положительного переполнения суммы (A+B). В силу этого необходимо специальное исследование условий переполнения разности (A–B).

При (C = A – B) > 0 и возникновении положительного переполнения на границах области положительного переполнения [V/2; V–1] формируется двоичный код

$$\Sigma(n+1,1) = \begin{cases} \mathrm{V} + \frac{\mathrm{V}}{2} = 2^n + 2^{n-1} \text{ при } \mathrm{C} = \frac{\mathrm{V}}{2}, \\ \mathrm{V} + \mathrm{V} - 1 = 2^n + 2^n - 1 > \\ \quad > 2^n + 2^{n-1} \text{ при } \mathrm{C} = \mathrm{V} - 1. \end{cases}$$

Следовательно, при положительном переполнении разности C = A – B в старших разрядах полной суммы формируется двоичный код E $C_{ДК}(n)$ = 11, который совпадает с признаком (48), определяющим положительное переполнение суммы (A+B).

При C = A – B < 0 и факте отрицательного переполнения численное значение двоичного кода полной суммы на границах области отрицательного переполнения [–(V–1); –(V/2+1)] определяется соотношениями:

$$\Sigma(n+1,1) = \begin{cases} \mathrm{V} - \mathrm{V} + 1 = 1 \text{ при } \mathrm{C} = -(\mathrm{V} - 1), \\ \mathrm{V} - \frac{\mathrm{V}}{2} - 1 = \frac{V}{2} - 1 = \\ = 2^{n-1} - 1 \text{ при } \mathrm{C} = -(V/2 + 1). \end{cases}$$

Отсюда следует, что при C = A – B и отрицательном переполнении в старших разрядах полной суммы формируется двоичный код E $C_{ДК}(n)$ = 00, который совпадает с признаком (50), характеризующим отрицательное переполнение суммы (A+B).

В силу того, что признаки отрицательного и положительного переполнения суммы A+B и разности A–B совпадают, логические выражения (51) описывают операцию контроля переполнения как при суммировании, так и при вычитании чисел.

В объединенной схеме вычитания (SUB=1) и суммирования (SUB=0) целых чисел (рис.4) на основе смещенных дополнительных кодов операндов операция в сумматоре неотрицательных целых чисел, согласно (44), (51) и (52), выполняется в соответствии с формулами:

$$a\,(n,1) = \overline{\mathrm{NA}}\ \mathrm{A}_{ДК}(n-1,1);$$
$$b\,(n,1) = \overline{\mathrm{NB}}\ \mathrm{B}_{ДК}(n-1,1)\oplus\mathrm{SUB};$$
$$e = \mathrm{SUB};$$
$$\text{ПП} = \overline{\mathrm{E}\oplus\mathrm{C}_{ДК}(n)};$$
$$\text{ОПП} = \text{ПП}\wedge\overline{\mathrm{C}_{ДК}(n)};$$
$$\text{ППП} = \text{ПП}\wedge\mathrm{C}_{ДК}(n).$$

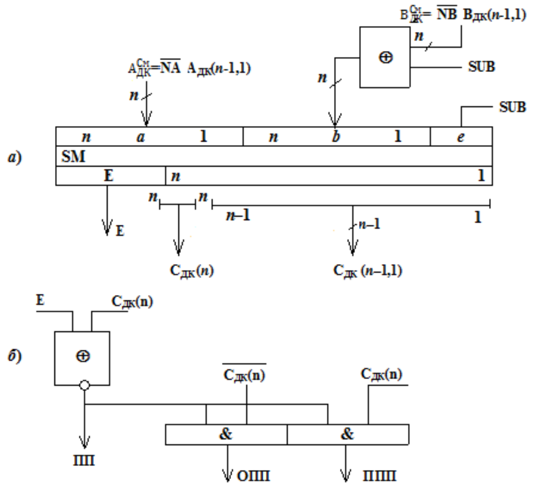

Рисунок 4 - Схема вычитания (SUB=1) и суммирования (SUB=0) целых чисел на основе смещенных дополнительных кодов операндов:
а) операционный сумматор; *б*) схема контроля переполнения разрядной сетки сумматора

Заключение

Основные преимущества предлагаемой схемы суммирования и вычитания целых чисел при смещенных кодах операндов сводятся к следующему:
– в операционном устройстве используется однородный сумматор для обработки как цифровых, так и знаковых разрядов;
– для контроля переполнения разрядной сетки сумматора используются стандартные информационные сигналы сумматора – выходной перенос и старший разряд суммы на информационных выходах сумматора неотрицательных чисел;
– переполнение разрядной сетки сумматора контролируется одинаково как при суммировании, так и вычитании чисел;
– дополнительные коды операндов преобразуются в смещенные коды перекоммутацией выходов знаковых триггеров, что не требует дополнительных аппаратных затрат;
– на информационных выходах сумматора при отсутствии переполнения разрядной сетки формируется дополнительный код результата.

Список использованной литературы

1. Уэйкерли Дж.Ф. Проектирование цифровых устройств / Дж.Ф. Уэйкерли. – Т.1. – М.: Постмаркет, 2002.
2. Таненбаум Э. Архитектура компьютера / Э. Таненбаум, Т. Остин. - 6-е изд. – СПб: Питер, 2013.
3. Жуков И.А. Компьютерная схемотехника. Методы построения и проектирования / И.А. Жуков, Н.П. Бабич. – К.: МК-Пресс, 2004.
4. Каган Б.М. Цифровые вычислительные машины и системы / Б.М. Каган, М.М. Каневский. – М.: Энергия, 1974.

Надійшла до редакції 20.02.2016

В.А. СВЯТНИЙ, В.В. ЛАПКО, О.В. САМОЩЕНКО
Донецький національний технічний університет

МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС КОМП'ЮТЕРНИХ ОПЕРАЦІЙ ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ ПРИ ЗМІЩЄНИХ КОДАХ ОПЕРАНДІВ

Бінарний код суми суматора невід'ємних цілих чисел запропоновано описати як суму операндів за модулем, тобто ваговим коефіцієнтом переносу, який виводиться. Для аналітичного опису операцій додавання і віднімання цілих чисел запропоновано використовувати методику обчислення суми та різниці чисел за модулем суматора. Показано, що традиційне визначення додаткового кода цілих чисел компактно описується однією операцією розрахунку залишку змінної, яка зміщена за модулем суматора.
Рівнозначними перетвореннями суми та різниці цілих чисел за модулем суматора побудовані математичні моделі дій з розрахунку додаткового коду суми і різниці цілих чисел, а також логічні формулювання для контролю переповнення розрядної сітки суматора.
Із використанням методики обчислення залишків суми та різниці чисел за модулем суматора розрахунок суми та різниці чисел у додатковому коді ідентичній обробці зміщених додаткових кодів операндів, тобто залишків за модулем суматора від суми додаткового коду операндів і зниженого вдвічі модуля суматора. Аналітично описані властивості математичної моделі, яка запропонована, та алгоритми контролю переповнення розрядної сітки операційного суматора. Показано, що схема для обчислення додаткового коду суми і різниці цілих чисел на основі зміщених додаткових кодів операндів принципово відрізняється від існуючих тим, що для контролю переповнення розрядної сітки операційного суматора використовуються лише стандартні інформаційні сигнали суматора, тобто перенос, який виводиться, та старший розряд додаткового коду результату на інформаційних виходах суматора.
Ключові слова: суматор, додатковий код, зміщений код, переповнення.

V.A. SVYATNY, V.V. LAPKO, A.V. SAMOSHCHENKO
Donetsk National Technical University

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF COMPUTER OPERATIONS OF ADDITION AND SUBTRACTION ON INTEGERS WITH SHIFTED OPERAND CODES

Binary sum of adder of nonnegative integers is suggested to be described as a sum of operands with weighting coefficient of output transfer as a modulo. For analytical description of addition and subtraction operations on integers the use of methodology of sum and difference calculation using adder modulo is suggested. It was shown that the traditional definition of additional code of integers can be compactly described by one operation of remainder calculation of variable shifted by adder modulo.
Using equal conversions of sum and difference of integers by adder modulo both mathematical models of operation of additional code calculation for sum and difference of integers and logical expressions for control of bit grid overflow were designed.
Using the technique of calculation of remainders of sum and difference with adder modulo calculation process for sum and difference in additional code is reduced to handling shifted additional codes of operands – remainders of adder modulo of sum of additional codes of operands and reduced by factor of two adder modulo. Properties of the suggested mathematical models and algorithms of bit grid overflow control of operational adder are analytically described. It was shown that the scheme for additional code calculation for sum and difference of integers that is based on shifted additional operand codes is fundamentally different from existing ones in that for bit grid overflow control of operational adder only standard adder informational signals, output transfer and high-order bit of result additional code on informational outputs of adder, are used.
Key words: adder, additional code, shifted code, overflow.