УДК 531.38

Н.Ф. Гоголєва, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Донецький національний технічний університет, м. Покровськ
gonata@i.ua

# Новий випадок інтегрованості для одного класу руху за інерцією двох гіроскопів Лагранжа, з'єднаних неголономним шарніром

*Постановка задачі про рух за інерцією двох гіроскопів Лагранжа, з'єднаних неголономним шарніром, надано у роботі [1]. Система, що розглядається, замкнена: дванадцять рівнянь зв'язують дванадцять величин. У роботах [1, 2 ,3,4,5, 6] отримано нові розв'язки задачі. У цій роботі знайдено ще один новий розв'язок задачі на лінійному по других і третіх компонентах кутових швидкостей тіл інваріантному співвідношенні.*

***Ключові слова**: неголономний шарнір, система гіроскопів Лагранжа, точний розв'язок.*

## Загальна постановка проблеми

До теперішнього часу методи динаміки неголономних систем знайшли широке застосування в задачах сучасної техніки. Навіть дослідження руху одного тіла, підпорядкованого неголономному зв'язку, представляє дуже важку задачу, і число випадків, в яких це дослідження вдається довести до кінця, дуже невелике.

Разом з виведенням диференціальних рівнянь руху неголономних систем, розвивалися деякі методи їх інтеграції і узагальнювалися основні положення аналітичної механіки на системи з неінтегрованими зв'язками. В якості прикладів неголономних систем розглядалися, в основному, задачі академічного характеру. Досліджувалося, наприклад, кочення тіл обертання по нерухомих поверхнях без прослизання. Серед робіт цього напряму найбільш суттєвими є дослідження С.О.Чаплигіна і П.В.Воронця.

Значним вкладом в неголономну механіку стало повідомлення про новий вид зв'язку – неголономний шарнір. Його конструкцію описано в роботі [7].

Усебічно досліджено рух за інерцією тіла, з'єднаного неголономним шарніром з нерухомим тілом, якому належить вісь неголономності в роботі [8]. Спочатку запропоновано геометричне зображення руху тіла коченням без ковзання незмінно пов'язаного з тілом еліпсоїда по нерухомій прямій (аналог результату Пуансо в класичній задачі). Проте зведення цієї задачі до квадратури виявилося складнішою задачею в порівнянні з вказаним класичним аналогом.

В статті [9] поставлена задача про рух системи двох тіл $S$ и $S_0$, з'єднаних неголономним шарніром з віссю неголономності, незмінною в тілі $S_0$. Отримано рівняння руху такої системи. Надано й обернену постановку задачі для вказаних тіл. Обидві постановки використані в роботі [10] при побудові випадків інтегрованості отриманих рівнянь.

## Вихідні співвідношення

У роботі [1] отримано рівняння

$$(\xi+1)[\omega_3(\theta)-A_0k(\theta)-Nk_0(\theta)]=2[\omega_2'(\theta)-A_0k_0'(\theta)\sin\theta-Nk_0(\theta)],$$
$$(\xi-1)[\Omega_3(\theta)-Ak_0(\theta)-Nk(\theta)]=2[\Omega_2'(\theta)-Nk_0'(\theta)\sin\theta+Nk(\theta)],$$

які в силу кінематичних співвідношень

$$\Omega_3(\theta)\sin\theta=\Omega_2(\theta)\cos\theta-\omega_2(\theta),$$
$$\omega_3(\theta)\sin\theta=\Omega_2(\theta)-\omega_2(\theta)\cos\theta \tag{1}$$

приймають вид

$$(\xi+1)[\Omega_2-\omega_2\cos\theta-(A_0k+Nk_0)\sin\theta]= \\ =2[\omega_2'-A_0k_0'\sin\theta-Nk_0]\sin\theta, \tag{2}$$

$$(\xi-1)[\Omega_2\cos\theta-\omega_2-(Ak_0+Nk)\sin\theta]= \\ =2[\Omega_2'-Nk_0'\sin\theta+Nk]\sin\theta. \tag{3}$$

Доповнимо систему (1), (2), рівнянням

$$k'(\theta)=-k_0'(\theta)\cos\theta \tag{4}$$

і рівнянням, яке випливає з рівняння неголономного шарніра

$$\omega_2(\theta)\sin\theta=\frac{H}{J}k(\theta)\cos\theta-\frac{H}{J_0}k_0(\theta), \tag{5}$$

де $H$ надана так: $H=AA_0-N^2>0$.

Задамо інваріантне співвідношення

$$\omega_2'(\theta)-A_0k_0'(\theta)\sin\theta-Nk_0(\theta)=0, \tag{6}$$

тоді з рівняння (2) маємо дві можливості

$$\xi+1=0\,, \tag{7}$$
$$\Omega_2(\theta)-\omega_2(\theta)\cos\theta-[A_0k(\theta)+Nk_0(\theta)]\sin\theta=0\,. \tag{8}$$

Варіант (7) вже розглянуто у роботі [2], будемо вивчати інваріантне співвідношення (6) і послідуючого з нього (8).

Рівняння (3) дозволить знайти змінну $\xi$ після того, як з рівнянь (4), (5), (6), (8) будуть знайдені $k(\theta), k_0(\theta), \omega_2(\theta), \Omega_2(\theta)$.

Виключаючи послідовно $\omega_2(\theta), k'(\theta)$ за допомогою (4), (5), (6), отримаємо для змінної $k_0(\theta)$ лінійне однорідне диференційне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами.

$$\left[(1+H/A_0J_0)+(H/A_0J-1)\cos^2\theta\right]k_0''(\theta)+$$
$$+\left[N/A_0-3(H/A_0J-1)\cos\theta\right]k_0'(\theta)\sin\theta+ \qquad (9)$$
$$+(H/A_0J_0+2(\cos\theta)N/A_0)k_0(\theta)=0.$$

Замість параметрів $A,\ A_0,\ J,\ J_0,\ N$ введемо нові безрозмірні параметри

$$B_*=1+H/A_0J_0\ ,\quad D_*=H/A_0J-1\ ,\quad E_*=N/A_0\ , \qquad (10)$$

тоді рівняння (9) прийме вид

$$\left(B_*+D_*\cos^2\theta\right)k_0''(\theta)+\left(E_*-3D_*\cos\theta\right)k_0'(\theta)\sin\theta+$$
$$+\left(B_*-1+2E_*\cos\theta\right)k_0(\theta)=0. \qquad (11)$$

Внаслідок (11), коефіцієнт $B_*$ задовольняє умові $B_*>1$.

За допомогою заміни $\zeta=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{E_*-3D_*\cos\theta}{B_*+D_*\cos^2\theta}\sin\theta d\theta}$ перетворимо (11) до нормального виду $\zeta''+I(\theta)\zeta=0$, в якому інваріант $I(\theta)$ такий

$$I(\theta)=\frac{9}{4}+\frac{1}{4\left(D_*\cos^2\theta+B_*\right)^2}\ \left[4D_*E_*\cos^3\theta+\right.$$
$$+\left(-3D_*^2-2D_*B_*-4D_*+E^2\right)\cos^2\theta+ \qquad (12)$$
$$\left.+2E_*\left(D_*+3B_*\right)\cos\theta-6D_*B_*-5B_*^2-4B_*-E_*^2\right].$$

Спочатку розглянемо частинний випадок

$$D_*=0\ , \qquad (13)$$

який з урахуванням (10) можна записати так

$$H=A_0J\ ,$$

тоді рівняння (11) прийме вид

$$B_*k_0''(\theta)+E_*k_0'(\theta)\sin\theta+\left(B_*-1+2E_*\cos\theta\right)k_0(\theta)=0\ . \qquad (14)$$

Введемо параметри

$$a^*=\frac{NJ_0}{(J+J_0)A_0}\ ,\quad \lambda^2=\frac{J}{J+J_0} \qquad (15)$$

і представимо (14) як однорідне диференційне рівняння другого порядку

$$k_0''(\theta)+a^*k_0'(\theta)\sin\theta+\left(2a^*cos\theta+\lambda^2\right)k_0(\theta)=0\ . \qquad (16)$$

Так як

$$n(\theta)=Hk(\theta)\ ,\qquad n_0(\theta)=Hk_0(\theta)\ , \qquad (17)$$

то із співвідношення (16) слідує

$$n_0''(\theta)+a^*n_0'(\theta)\sin\theta+\left(2a^*\cos\theta+\lambda^2\right)n_0(\theta)=0\ . \qquad (18)$$

При обмеженні (13) інваріант $I(\theta)$ (12) такий

$$I(\theta)=\frac{1}{4B_*^2}\left[(E_*\cos\theta+3B_*)^2-\left(5B_*^2+4B_*+E_*^2\right)\right].$$

Як що

$$a^{*2}=\lambda^4-\lambda^2\ , \qquad (19)$$

то рівняння (18) має частинний розв'язок

$$n_{0.1}(\theta)=e^{a^*\cos\theta}\left(1-\sqrt{\lambda^2/(\lambda^2-1)}\ \cos\theta\right)=e^{a^*\cos\theta}\left(1-a^*\cos\theta/(\lambda^2-1)\right)$$

Другий частинний розв'язок $n_{0.2}(\theta)$ можна визначити по відомій формулі

$n_{0.2}(\theta)=n_{0.1}(\theta)\int\frac{1}{n_{0.1}^2(\theta)}e^{-a^*\cos\theta}d\theta$. Але, на жаль, умова (19) приводить до наступного: $N^2=-J/J_0$, а оскільки осьові моменти інерції тіл $J,\ J_0$ позитивні, та умова не виконується.

Тому залишається розглянути варіант $D_*=0$, $E_*=0$, який з урахуванням (10) призводить до умов

$$A=J\ , \qquad (20)$$
$$N=0\ , \qquad (21)$$

тобто тіло $S$ сферично симетрично і одно з тіл системи закріплене в центрі мас.

При обмеженнях (20), (21) рівняння (18) приймає вид $n_0''(\theta)+\lambda^2n_0(\theta)=0$, де $\lambda^2=J/(J+J_0)<1$. Загальний розв'язок цього рівняння запишемо у формі

$$n_0(\theta)=C\sin(\lambda\theta+\beta)\ , \qquad (22)$$

де $C,\ \beta$ – постійні інтеграції.

Із співвідношення (4) з урахуванням (17) знаходимо

$$n(\theta)=\frac{C\lambda}{\left(1-\lambda^2\right)}\ \left[\lambda\sin(\lambda\theta+\beta)\cos\theta-\cos(\lambda\theta+\beta)\sin\theta\right]. \qquad (23)$$

Замість параметрів $J,\ J_0$, зв'язаних співвідношенням (15), введемо новий параметр $B>0$:

$$J=B\lambda^2\ ,\qquad J_0=B\left(1-\lambda^2\right). \qquad (24)$$

Підставляючи знайдені розв'язки (22), (23) в (5) та враховуючи заміну (17), (24), отримуємо

$$\omega_2(\theta)=-\frac{C}{B\lambda\left(1-\lambda^2\right)}\left[\lambda\sin(\lambda\theta+\beta)\sin\theta+\cos(\lambda\theta+\beta)\cos\theta\right]. \qquad (25)$$

Після цього з (8), внаслідок (17), (21), (22), (23), (25) визначаємо $\Omega_2(\theta)$

$$\Omega_2(\theta)=-\frac{C}{B\lambda\left(1-\lambda^2\right)}\cos(\lambda\theta+\beta). \qquad (26)$$

За умовою, що

$$A_0-J_0\neq0 \qquad (27)$$

з рівняння (3) можемо знайти $\xi$

$$\xi-1=2A_0/(A_0-J_0). \qquad (28)$$

Із кінематичних співвідношень (1) знаходимо треті компоненти кутових швидкостей тіл $\Omega_3(\theta),\ \omega_3(\theta)$, підставив в них (25), (26),

$$\Omega_3(\theta)=\frac{C}{B\left(1-\lambda^2\right)}\sin(\lambda\theta+\beta)\ , \qquad (29)$$

$$\omega_3(\theta)=\frac{C}{B\lambda\left(1-\lambda^2\right)}\left[\lambda\sin(\lambda\theta+\beta)\cos\theta-\cos(\lambda\theta+\beta)\sin\theta\right]. \qquad (30)$$

Порівнюючи вирази (29) і (22), помічаємо, що

$$\Omega_3(\theta)=n_0(\theta)/J_0\ , \qquad (31)$$

тоді з рівняння $\dot{\Phi}(\theta)=n_0(\theta)/J_0-\Omega_3(\theta)$ отримуємо $\dot{\Phi}(\theta)=0$ (швидкість власного обертання тіла $S_0$ дорівнює нулю, тому напіврухливий базис $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ співпадає з базисом $\mathbf{e}_1^{*0}\mathbf{e}_2^{*0}\mathbf{e}_3^0$).

Із кінцевих співвідношень

$$\Omega_2(\theta)=\omega_2(\theta)\cos\theta+\omega_3(\theta)\sin\theta\,,\ \Omega_3(\theta)=-\omega_2(\theta)\sin\theta+\omega_3(\theta)\cos\theta\,,$$

знаходимо

$$\omega_2(\theta)=\Omega_2(\theta)\cos\theta-\Omega_3(\theta)\sin\theta\,,$$
$$\omega_3(\theta)=\Omega_2(\theta)\sin\theta+\Omega_3(\theta)\cos\theta\,,$$

Які внаслідок (31) запишемо так

$$\omega_2(\theta)=\Omega_2(\theta)\cos\theta-n_0(\theta)(\sin\theta)/J_0\ , \qquad (32)$$

$$\omega_3(\theta)=\Omega_2(\theta)\sin\theta+n_0(\theta)(\cos\theta)/J_0\ . \qquad (33)$$

Порівнюючи вирази (23), (30), встановлюємо, що

$$\omega_3(\theta)=n(\theta)/J\ , \tag{34}$$

тобто

$$n(\theta)/J=\Omega_2(\theta)\sin\theta+n_0(\theta)(\cos\theta)/J_0\ . \tag{35}$$

А так як $\varphi^\bullet(\theta)=n(\theta)/J-\omega_3(\theta)$, то $\varphi^\bullet(\theta)=0$, отже, швидкість власного обертання тіла $S$ дорівнює нулю, аналогічно, напіврухливий базис $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ співпадає з базисом $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3$

Кутові швидкості тіл $S$ и $S_0$ у незмінно пов'язаних з ними базисах мають вид

$$\omega_*(\theta)=\omega_1(\theta)e_1+\omega_2(\theta)e_2+\frac{n(\theta)}{J}e_3\ , \tag{36}$$

$$\Omega_*(\theta)=\Omega_1(\theta)e_1+\Omega_2(\theta)e_2^0+\frac{n_0(\theta)}{J_0}e_3^0\ . \tag{37}$$

Вирази $\Omega_1=(\xi-1)\kappa$, $\omega_1=(\xi+1)\kappa$, враховуючи (28), запишемо так

$$\Omega_1(\theta)=\frac{2A_0}{A_0-J_0}\kappa(\theta), \tag{38}$$

$$\omega_1(\theta)=2\frac{2A_0-J_0}{A_0-J_0}\kappa(\theta). \tag{39}$$

Для визначення змінної $\kappa(\theta)$ скористаємося інтегралом, що виражає сталість моменту кількості руху системи відносно її центру мас

$$G_1^2+G_2^2+G_3^2=g^2, \tag{40}$$

$$G_1=(A-N\cos\theta)\omega_1+(A_0-N\cos\theta)\Omega_1\ ,$$

$$G_2=(A-N\cos\theta)\omega_2+(A_0\cos\theta-N)\Omega_2-n_0\sin\theta\ ,$$

$$G_3=(A_0\Omega_2-N\omega_2)\sin\theta+n_0\cos\theta+n$$

(тут $G_1,G_2,G_3$ компоненти вектора $\mathbf{g}$ в напіврухомом базисі $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$).

Підставив (38), (39), (20), (21) в (40), отримаємо

$$G_1(\theta)=2(A_0^2+2A_0J-JJ_0)\kappa(\theta)/(A_0-J_0)\ . \tag{41}$$

Вирази (40) зручніше записати спочатку з урахуванням (32), (35)

$$G_2(\theta)=(A_0+J)\Omega_2(\theta)\cos\theta-(J+J_0)n_0(\theta)\sin\theta/J_0 \tag{42}$$

$$G_3(\theta)=(A_0+J)\Omega_2(\theta)\sin\theta+(J+J_0)n_0(\theta)\cos\theta/J_0\ . \tag{43}$$

Тепер знаходимо

$$G_2^2+G_3^2=(A_0+J)^2\Omega_2^2(\theta)+(J+J_0)^2n_0^2(\theta)/J_0^2$$

та, підставляючи сюди (22), (26), маємо

$$G_2^2+G_3^2=\frac{C^2}{(1-\lambda^2)^2}\left\{1+\left[(1+A_0/J)^2\lambda^2-1\right]\cos^2(\lambda\theta+\beta)\right\}. \tag{44}$$

Із інтегралу (40) з урахуванням (41), (44) визначаємо

$$\kappa^2(\theta)=\frac{(A_0-J_0)^2}{4(A_0^2+2A_0J-JJ_0)^2}\left\{\left[g^2-\frac{(J+J_0)^2C^2}{J_0^2}\right]-\frac{(A_0^2+2A_0J-JJ_0)(J+J_0)C^2}{JJ_0^2}\cos^2(\lambda\theta+\beta)\right\}. \tag{45}$$

Замість $A_0$ вводимо параметр $\mu_*$

$$A_0=B\mu_*\ , \tag{46}$$

а замість $\theta$ нову перемінну

$$\nu_*=\cos(\lambda\theta+\beta)\ , \tag{47}$$

тоді з (45), внаслідок (24), отримуємо

$$\kappa^2(\nu_*)=\frac{(\mu_*^2+\lambda^2-1)^2}{4B^2(\mu_*^2+2\mu_*\lambda^2+\lambda^4-\lambda^2)^2}\left\{\left[g^2-\frac{C^2}{(1-\lambda^2)^2}\right]-\frac{(\mu_*^2+2\mu_*\lambda^2+\lambda^4-\lambda^2)C^2}{\lambda^2(1-\lambda^2)^2}\nu_*^2\right\}$$

Рівняння системи $\theta^\bullet=-2\kappa$ з урахуванням (47) запишемо у вигляді $\nu_*^\bullet=2\lambda\kappa(\nu_*)\sqrt{1-\nu_*^2}$, з нього визначимо залежність часу $t$ від змінної $\nu_*$

$$t-t_0=\tilde{M}\int_{\nu_0}^{\nu_*}\frac{d\nu}{\sqrt{(1-\nu_*^2)(1-\tilde{K}^2\nu_*^2)}}\ , \text{ де}$$

$$\tilde{K}^2=\frac{C^2\left[(1+\mu_*/\lambda^2)^2\lambda^2-1\right]}{g^2(1-\lambda^2)^2-C^2}\ ,$$

$$\tilde{M}=\frac{B(1-\lambda^2)(\mu_*^2+2\mu_*\lambda^2+\lambda^4-\lambda^2)}{\lambda(\mu_*+\lambda^2-1)\sqrt{g^2(1-\lambda^2)^2-C^2}}\ .$$

Вводимо безрозмірний час $t_*$ : $t_*=(t-t_0)/\tilde{M}$, та отримуємо $t_*=\int\frac{d\nu_*}{\sqrt{(1-\nu_*^2)(1-\tilde{K}^2\nu_*^2)}}$. У правій частині маємо еліптичний інтеграл у формі Якобі.

Для визначення потенційної енергії пружного елементу скористаємося інтегралом енергії

$$A(\omega_1^2+\omega_2^2)+A_0(\Omega_1^2+\Omega_2^2)-2N(\Omega_1\omega_1\cos\theta+\Omega_2\omega_2)+n^2/J+$$
$$+n_0^2/J_0+2\Pi(\theta)=2h\ ,$$

який при обмеженнях (20), (21) приймає вид

$$J(\omega_1^2+\omega_2^2)+A_0(\Omega_1^2+\Omega_2^2)+n^2/J+n_0^2/J_0+2\Pi(\theta)=2h.$$

Підставив сюди (22)–(26), (38), (39), (46), знаходимо

$$2h_1-2\Pi(\theta)=\tilde{M}_*\cos^2(\lambda\theta+\beta),$$

де $\tilde{M}_*=-\frac{C^2(\mu_*-1+\lambda^2)(2\mu_*-1+\lambda^2)}{B(1-\lambda^2)^2(\mu_*^2+2\mu_*\lambda^2+\lambda^4-\lambda^2)}$, а в постійну $h_1$ включені $2h$ й інші постійні.

Таким чином, отримано ще один розв'язок задачі. Основні змінні задачі визначаються співвідношеннями (22), (23), (25), (26), (28) – (30), (45). Для завершення побудови розв'язку визначено потенціальну енергію пружного елементу.

## *Висновки та напрямок подальших досліджень*

Для знаходження розв'язку задачі використовується рівняння Абеля другого роду. Задаючи інваріантне співвідношення спеціального виду виконана редукція до одного диференціального рівняння другого порядку. Прийнявши обмеження, що одне з тіл системи закріплено в центрі мас і тіло S сферично симетрично, отримано новий розв'язок задачі про рух за інерцією двох гіроскопів Лагранжа, з'єднаних неголономним шарніром. В ході подальших досліджень доцільно побудувати повний розв'язок цієї задачі, тобто отримати рівняння рухомих і нерухомих аксоїдів.

### *Перелік використаної літератури*

1. Лесина М. Е. Движение по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром / М. Е. Лесина, А. П. Харламов // Механика твердого тела. – 1995. – Вып. 27. – С.15-21.
2. Лесина М. Е. Новое решение задачи о движение двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром / М. Е. Лесина, Н. Ф. Гоголева // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 51-57.
3. Лесина М. Е. Частное решение задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных неголономным шарниром / М. Е. Лесина, Н. Ф. Гоголева // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 63-69.
4. Лесина М. Е. Точное решение задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа соединенных неголономным шарниром / М. Е. Лесина, А. П. Харламов // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 80-86.
5. Гоголєва Н.Ф. Задача про рух по інерції двох гіроскопів Лагранжа, сполучених неголономним шарніром: інтегрований випадок / Н. Ф. Гоголєва// Науковий Вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Серія: Комп'ютерні системи та компоненти. – Том.4, випуск 4. – Чернівці: ЧНУ, 2013. – С.74–77.
6. Гоголева Н.Ф. Новый случай интегрируемости задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром/ Гоголева Н.Ф., Лесина М.Е. // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія : обчислювана техніка та автоматизація, №1 (28) – Донецьк , 2015. – С. 24 – 32.
7. Харламов А.П., Харламов М.П. Неголономный шарнир // Механика твердого тела. – 1995. – Вып. 27. – С. 1–7.
8. Харламов А.П. Движение по инерции тела, имеющего неподвижную точку и подчиненного неголономной связи // Механика твердого тела. – 1995. – Вып. 27. – С. 21–31.
9. Мозалевская Г.В., Харламова Е.И. Об уравнениях движения системы двух тел, сочлененных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 1995. – Вып.27. – С.8–11.
10. Мозалевская Г.В. Случаи интегрируемости уравнений движения системы гироскопов Лагранжа, сочлененных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 1995. – Вып.27. – С.12–15.

*Надійшла до редакції 10.03.2017*

**Н.Ф. ГОГОЛЕВА**
Донецкий национальный технический университет (Украина)

**НОВЫЙ СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДВИЖЕНИЙ ПО ИНЕРЦИИ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА, СОЕДИНЕННЫХ НЕГОЛОНОМНЫМ ШАРНИРОМ**

Для нахождения решения задачи используется уравнение Абеля второго рода. Задавая инвариантное соотношение специального вида, выполнена редукция к одному дифференциальному уравнению второго порядка. Приняв ограничения, что одно из тел системы закреплено в центре масс и тело S сферически симметрично, получено новое решение задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром.

***Ключевые слова: система гироскопов Лагранжа, неголономный шарнир, точное решение.***

**N.F. Gogoleva**
Donetsk National Technical University

**NEW CASE OF INTEGRABILITY FOR ONE CLASS OF INERTIAL MOTIONS OF TWO LAGRANGE GYROSCOPES CONNECTED WITH A NON-HOLONOMIC HINGE.**

The object of research is the system of equations of motion of two dynamically symmetric solids (Lagrange gyroscopes) connected with a non-holonomic hinge. The presence of non-integrable differential constraints in the mechanical system generates a number of behavior features of such systems. The number of cases in which the study was finish is low. With the help of invariant ratio (linear for the second and third components of the bodies angular velocities), the new solution of the problem of motion of two Lagrange gyroscopes connected with a non-holonomic hinge was obtained. Provided that one of the bodies of the system is fastened in the center of mass and the body S is spherically symmetric, the bodies' angular velocity components and the potential energy of the elastic element were found. It was found out that the velocities of the proper rotations of bodies are equal to zero, i.e., the semi-mobile bases coincide with the bases consistently associated with the bodies.

***Keywords: system of Lagrange gyroscopes, non-holonomic hinge, exact solution.***

## REFERENCES

1. Lesina, M. E., Harlamov, A.P. (1995), *The inertial motion of two Lagrange gyroscopes connected by a non-holonomic hinge* [Dvizhenie po inertsii dvuh giroskopov Lagranzha, soedinennyih negolonomnyim sharnirom], Mehanika tverdogo tela, 1995, No 27, pp.15-21.
2. Lesina, M.E., Gogoleva, N.F. (2006), *A new solution to the problem of the motion of two Lagrange gyroscopes connected by a nonholonomic hinge* [Novoe reshenie zadachi o dvizhenie dvuh giroskopov Lagranzha, soedinennyih negolonomnyim sharnirom], Mehanika tverdogo tela, No. 36, pp. 51-57.
3. Lesina, M.E., Gogoleva, N.F. (2008), *A particular solution of the problem of the motion of two Lagrange gyroscopes, articulated by a nonholonomic hinge* [Chastnoe reshenie zadachi o dvizhenii dvuh giroskopov Lagranzha, sochlenennyih ne-golonomnyim sharnirom], Mehanika tverdogo tela, No. 38, pp. 63-69.
4. Lesina, M. E., Harlamov, A.P. (2004), *Exact solution of the problem of the inertial motion of two Lagrange gyroscopes connected by a non-holonomic hinge* [Tochnoe reshenie zadachi o dvizhenii po inertsii dvuh giroskopov Lagranzha soedi-nennyih negolonomnyim sharnirom], Mehanika tverdogo tela, No. 34, pp. 80-86.
5. Gogoleva, N.F. (2013), *The problem of the collapse of the Lagrange gyroscopes, which are obtained by non-holonomic arrows: the integrated case* [Zadacha pro ruh po inertsiyi dvoh giroskopiv Lagranzha, spoluchenih negolonomnim sharnirom: Integrovaniy vipadok], Naukoviy Vísnik Chernívets'kogo natsíonal'nogo úníversitetu ímení Yuríya Fed'kovicha. Seríya: Komp'yuterní sistemi ta komponenti, Volume 4, issue 4, pp.74–77.
6. Gogoleva, N.F., Lesina, M.E. (2015), *A new case of integrability of the problem of the motion of two Lagrange gyroscopes connected by a nonholonomic hinge* [Novyy sluchay integriruyemosti zadachi o dvizhenii dvukh giroskopov Lagranzha, soyedinennykh negolonomnym sharnirom], Naukoví pratsí Donets'kogo natsíonal'nogo tekhníchnogo úníversitetu. Seríya : obchislyuvana tekhníka ta avtomatizatsíya, No.1 (28), pp. 24–32.
7. Harlamov, A.P., Harlamov, M.P. (1995), *Nonholonomic hinge* [Negolonomnyiy sharnir], Mehanika tverdogo tela, No. 27, pp. 1–7.
8. Harlamov, A.P. (1995), *Motion by inertia of a body having a fixed point and subordinate to a non-holonomic link* [Dvizhenie po inertsii tela, imeyuschego nepodvizhnuyu tochku i podchinennogo negolonomnoy svyazi], Mehanika tverdogo tela, No. 27, pp. 21–31.
9. Mozalevskaya, G.V., Harlamova, E.I. (1995) *On the equations of motion of a system of two bodies articulated by a nonholonomic hinge* [Ob uravneniyah dvizheniya sistemyi dvuh tel, sochlenennyih negolonomnyim sharnirom], Mehanika tverdogo tela, No.27, pp.8–11.
10. Mozalevskaya, G.V. (1995), *The cases of integrability of the equations of motion of the Lagrange gyroscopes system, articulated by a nonholonomic hinge* [Sluchai integriruemosti uravneniy dvizheniya sistemyi giroskopov Lagranzha, sochlenennyih negolonomnyim sharnirom], Mehanika tverdogo tela, No.27, pp.12–15.