

О.Н. Романюк, д-р. техн. наук, проф.,  
О. В. Мельник, аспірант,  
О.В. Романюк, канд. техн. наук, доц.,  
Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Україна  
vinncei@gmail.com

## Реалізація кругової інтерполяції при використанні гексагонального растру

*Запропоновано модифікацію методу оцінювальної функції для інтерполяції кола на гексагональному растрі. Визначено типи крокових приростів для різних ділянок координатного простору. Наведено формули для розрахунку оцінювальної функції.*

**Ключові слова:** гексагональний растр, метод оцінювальної функції, графічний примітив.

### Вступ

У комп'ютерній графіці інтерполяція дуги кола є важливою задачею, оскільки коло відноситься до примітивів (відрізок прямої, коло, еліпс) які є основою побудови графічних зображень. Коло належить до графічних примітивів, які мають високу питому вагу.

Оскільки зображення задаються у дискретній формі та інтерполюються на квадратному растрі, це не завжди забезпечує високу якість відтворення.

Для покращення якості зображень шукають альтернативи квадратному растру, як приміром застосовують гексагональний або ще його називають стільниковий растр [1].

### Аналіз методів інтерполяції кола

"Прямий" метод [2] формування кіл, який базується на використанні рівняння кола  $y_i^2 = \sqrt{R^2 - x_i^2}$ , не знайшов широкого поширення в зв'язку з необхідністю виконання триваломістких операцій.

Найпершими методами, які давали можливість реалізувати відтворення кола, були методи що базувались на вирішенні диференціальних рівнянь і застосовували для цього цифрові інтегратори. Метод передбачає у структурі інтерполятора наявність двох цифрових інтеграторів, охоплених перехресними від'ємними зворотними зв'язками.

Відносно велика похибка обмежує використання цих методів, незважаючи на простоту апаратної реалізації. Слід також відмітити, що методи, основані на використанні цифрових інтеграторів, забезпечують постійність колової швидкості руху точки по дузі незалежно від радіуса кола, що суттєво зменшує продуктивність інтерполятора.

Для формування кіл часто використовують кусково-лінійну апроксимацію кола [2]. До недоліків такого методу слід віднести необхідність у досить великій кількості ділянок апроксимації для забезпечення необхідної точності, наявність додаткової похибки апроксимації дуги.

Вказані недоліки відсутні для методів, основаних на обчисленні оцінювальної функції  $OF_i$ , яка при коловій інтерполяції в точці  $(x_i, y_i)$  визначається різницею [3]:  $OF_i = (x_i^2 + y_i^2) - R^2$ , де  $R$  – радіус кола. Різниця від'ємна для кожної точки, яка лежить у середині кола; додатна для кожної точки, яка лежить зовні цього кола, і дорівнює нулю для всіх точок кола. Така властивість дозволяє, залежно від знака  $OF_i$ , здійснювати в координатному просторі одиничний приріст у напрямку зміни знака оцінювальної функції, що дає можливість наблизити траєкторію точки зображення до відтворюваного кола.

При формуванні траєкторій кіл необхідно враховувати, що:

коло є симетричною фігурою, що дозволяє суттєво скоротити час обчислення, оскільки для отримання всіх точок кола досить сформулювати їх лише для одного октанта;

необхідно проводити аналіз переходу через границі октантів, оскільки при цьому змінюється направлення крокових приростів.

Мета статті – модифікація методу оцінювальної функції для формування кола на гексагональному растрі.

### Модифікація методу

При використанні гексагонального растру для інтерполяції кола є особливості у використанні крокових приростів, які залежать від того, на якій ділянці координатного простору відтворюється дуга кола [4,5].

Розглянемо першу чверть кола з центром у початку координат. Інтерполяцію будемо про-

водити проти годинникової стрілки, з точки кола, що має координати  $y=0, x=R$ , де  $R$  – радіус кола, яке потрібно буде згенерувати на гексагональному растрі. Будемо вважати, що центр кола і початкова точка інтерполяції знаходяться у вузлі гексагонального растру (рис. 1).

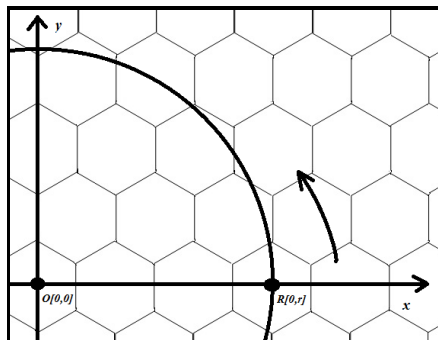


Рисунок 1 - Початкові точки і напрям інтерполяції першої чверті кола радіусом R

Як видно з рисунку 1, при генеруванні кола проти часової стрілки  $x$ -координата крокової траєкторії буде монотонно спадати, а  $y$  зростати.

Для будь-якої точки на траєкторії кола при інтерполяції проти годинникової стрілки існує тільки три можливих елементарних прирости, що найкращим чином наближають коло (рис. 2).

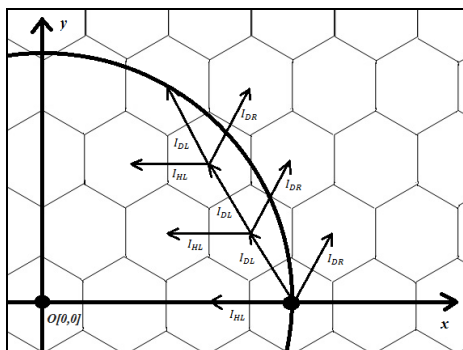


Рисунок 2 - Кроки інтерполяції

Можливі такі кроки інтерполяції. Це горизонтальний крок вліво, діагональний крок вліво та діагональний крок вправо. На рисунку 2 зображено кроки інтерполяції. Крок  $I_{HL}$  - горизонтально вліво, крок  $I_{DL}$  - діагонально вліво, крок  $I_{DR}$  - діагонально вправо.

Доведено, що для формування крокової траєкторії кола в першому октанті в секторі від  $0^\circ$  до  $30^\circ$ , найменша похибка має місце при використанні діагональних кроків. При використанні горизонтального кроку похибка інтерполяції буде перевищувати 0,5 кроку дискретизації.

Розглянемо формування крокової траєкторії в першому октанті в секторі від  $0^\circ$  до

$30^\circ$ . У цьому випадку формування крокової траєкторії можливе діагональними кроками інтерполяції: крок  $I_{DL}$  - діагонально вліво, крок  $I_{DR}$  - діагонально вправо (рис. 3).

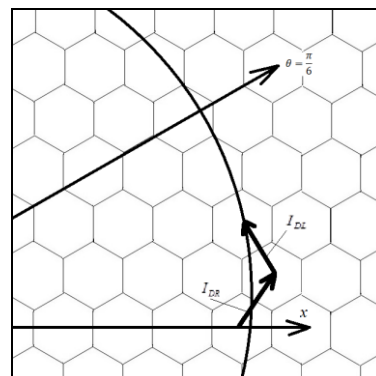


Рисунок 3 - Інтерполяція дуги кола в секторі від  $0^\circ$  до  $30^\circ$

На кожному кроці інтерполяції, доцільно вибирати той піксел, для якого є мінімальним значення квадрату відстані між пікселем і точкою на колі.

$$I_{DL} = \left| \left( x_i - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( y_i + \frac{3}{2\sqrt{3}} \right)^2 - R^2 \right|$$

$$I_{DR} = \left| \left( x_i + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( y_i + \frac{3}{2\sqrt{3}} \right)^2 - R^2 \right|$$

Загальний вигляд формули оцінювальної функції для інтерполяції кола в точці  $x_i, y_i$  має такий вигляд

$$OF_i = (x_i^2 + y_i^2) - R^2.$$

Розрахуємо значення оцінювальної функції на наступному  $i+1$ -му кроці інтерполяції для кожного з можливих кроків.

$$OF_{DL(i+1)} = \left( \left( x_i - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( y_i + \frac{3}{2\sqrt{3}} \right)^2 \right) - R^2 =$$

$$= x_i^2 + y_i^2 - R^2 - x_i + \frac{3}{\sqrt{3}} y_i + 1 =$$

$$= OF_i - x_i + \sqrt{3} y_i + 1.$$

$$OF_{DR(i+1)} = \left( \left( x_i + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( y_i + \frac{3}{2\sqrt{3}} \right)^2 \right) - R^2 =$$

$$= x_i^2 + y_i^2 - R^2 + x_i + \sqrt{3} y_i + 1 =$$

$$= OF_i + x_i + \sqrt{3} y_i + 1.$$

Отримані значення оцінювальної функції мають такий вигляд

$$OF_{DL(i+1)} = OF_i - x_i + \sqrt{3} y_i + 1.$$

$$OF_{DR(i+1)} = OF_i + x_i + \sqrt{3} y_i + 1.$$

Залежно від результату порівняння оцінювальних функцій вибираємо такий крок інтерполяції, який відповідає найменшому значенню оцінювальних функцій.

Розглянемо наступну частину дуги кола. Для формування крокової траєкторії в першому октанті в секторі від  $30^\circ$  до  $90^\circ$  відтворимо ділянку кола, що відповідає дузі  $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ . У першому октанті в секторі від  $30^\circ$  до  $90^\circ$  при формуванні крокової траєкторії кола найменша похибка має місце при використанні  $I_{DL}$  - діагонального лівого і  $I_{HL}$  - горизонтального лівого кроків (рис. 4).

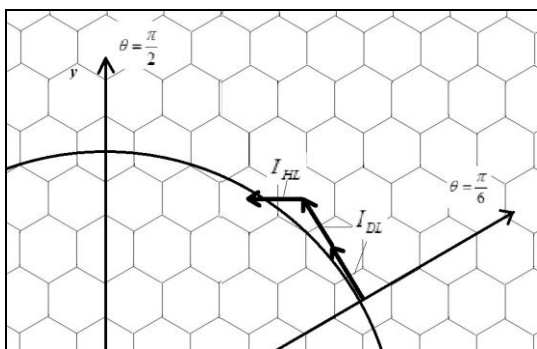


Рисунок 4 - Інтерполяція дуги кола в секторі від  $30^\circ$  до  $90^\circ$

Розрахунок оцінювальної функції на наступному  $i+1$ -му кроці інтерполяції для першого октанту дуги кола  $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ :

$$\begin{aligned} OF_{DL(i+1)} &= \left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_i + \frac{3}{2\sqrt{3}}\right)^2 - R^2 = \\ &= x_i^2 + y_i^2 - R^2 - x_i + \frac{3}{\sqrt{3}}y_i + 1 = \\ &= OF_i - x_i + \sqrt{3}y_i + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OF_{HL(i+1)} &= (x_i - 1)^2 + (y_i^2) - R^2 = \\ &= x_i^2 - 2x_i + 1 + y_i^2 - R^2 = \\ &= x_i^2 + y_i^2 - R^2 - 2x_i + 1 = \\ &= OF_i - 2x_i + 1. \end{aligned}$$

Отримаємо такі значення оцінювальних функцій:

$$\begin{aligned} OF_{DL(i+1)} &= OF_i - x_i + \sqrt{3}y_i + 1. \\ OF_{HL(i+1)} &= OF_i - 2x_i + 1. \end{aligned}$$

Подальше формування крокової траєкторії - в другому октанті в секторі від  $90^\circ$  до  $150^\circ$  ділянка кола, що відповідає дузі  $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$ .

Для крокової траєкторії кола в першому октанті в секторі від  $90^\circ$  до  $150^\circ$  найменша похибка має місце при використанні  $I_{DL}$  - діагонального лівого і  $I_{HL}$  - горизонтального лівого кроків (рис.5).

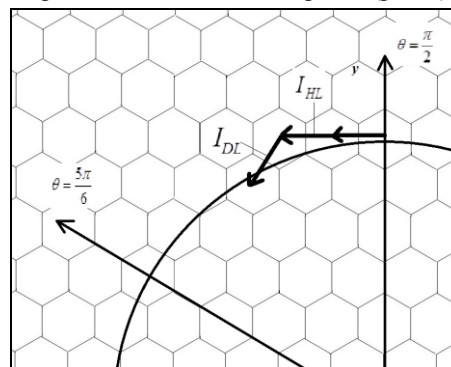


Рисунок 5 - Інтерполяція дуги кола в секторі від  $90^\circ$  до  $150^\circ$

Розраховані вирази квадрату відстані між пікселем і точкою на колі будуть:

$$\begin{aligned} I_{DL} &= \left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_i - \frac{3}{2\sqrt{3}}\right)^2 - R^2. \\ I_{HL} &= |(x_i - 1)^2 + (y_i)^2 - R^2|. \end{aligned}$$

Отже, формули оцінювальної функції на наступному  $i+1$ -му кроці інтерполяції для другого октанту дуги кола  $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$  такі:

$$\begin{aligned} OF_{DL(i+1)} &= \left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_i - \frac{3}{2\sqrt{3}}\right)^2 - R^2 = \\ &= x_i^2 + y_i^2 - R^2 - x_i - \frac{3}{\sqrt{3}}y_i + 1 = \\ &= OF_i - x_i - \sqrt{3}y_i + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OF_{HL(i+1)} &= (x_i - 1)^2 + (y_i^2) - R^2 = \\ &= x_i^2 - 2x_i + 1 + y_i^2 - R^2 = \\ &= x_i^2 + y_i^2 - R^2 - 2x_i + 1 = \\ &= OF_i - 2x_i + 1. \end{aligned}$$

Таким чином:

$$\begin{aligned} OF_{DL(i+1)} &= OF_i - x_i - \sqrt{3}y_i + 1. \\ OF_{HL(i+1)} &= OF_i - 2x_i + 1. \end{aligned}$$

Для формування крокової траєкторії в другому та третьому октанті в секторі від  $150^\circ$  до  $210^\circ$  відтворимо ділянку кола, що відповідає дузі  $\theta \in \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ .

У другому та третьому октанті в секторі від  $150^\circ$  до  $210^\circ$  найменша похибка інтерполяції має місце при використанні  $I_{DL}$  - діагонального лівого і  $I_{DR}$  - діагонального правого кроків (рис. 6).

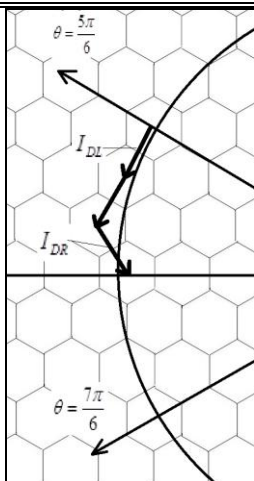


Рисунок 6 - Интерполяция дуги кола в секторе від 150° до 210°

Провівши розрахунки оцінювальної функції на  $i+1$ -му кроці інтерполяції отримуємо:

$$\begin{aligned}
 OF_{DL(i+1)} &= \left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_i - \frac{3}{2\sqrt{3}}\right)^2 - R^2 = \\
 &= x_i^2 + y_i^2 - R^2 - x_i - \frac{3}{\sqrt{3}}y_i + 1 = \\
 &= OF_i - x_i - \sqrt{3}y_i + 1. \\
 OF_{DR(i+1)} &= \left(x_i + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_i - \frac{3}{2\sqrt{3}}\right)^2 - R^2 = \\
 &= x_i^2 + y_i^2 - R^2 + x_i - \sqrt{3}y_i + 1 = \\
 &= OF_i + x_i - \sqrt{3}y_i + 1.
 \end{aligned}$$

Для розглянутого випадку іаємо такі значення оцінювальної функції:

$$\begin{aligned}
 OF_{DL(i+1)} &= OF_i - x_i - \sqrt{3}y_i + 1. \\
 OF_{DR(i+1)} &= OF_i + x_i - \sqrt{3}y_i + 1.
 \end{aligned}$$

У третьому октанті в секторі від 210° до 270° найменша похибка інтерполяції має місце при використанні  $I_{DR}$  - діагонального правого та  $I_{HR}$  - горизонтального правого кроків (рис. 7).

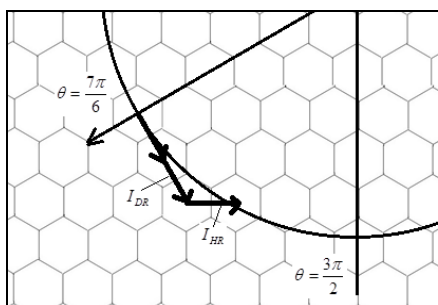


Рисунок 7 - Интерполяция дуги кола в секторе від 210° до 270°

Обчислення на  $i+1$ -му кроці інтерполяції оцінювальної функції:

$$\begin{aligned}
 OF_{DR(i+1)} &= \left(x_i + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_i - \frac{3}{2\sqrt{3}}\right)^2 - R^2 = \\
 &= x_i^2 + y_i^2 - R^2 + x_i - \sqrt{3}y_i + 1 = \\
 &= OF_i + x_i - \sqrt{3}y_i + 1. \\
 OF_{HR(i+1)} &= (x_i + 1)^2 + (y_i)^2 - R^2 = \\
 &= x_i^2 + y_i^2 - R^2 + 2x_i + 1 = \\
 &= OF_i + 2x_i + 1.
 \end{aligned}$$

Отримано такі значення:

$$\begin{aligned}
 OF_{DR(i+1)} &= OF_i + x_i - \sqrt{3}y_i + 1. \\
 OF_{HR(i+1)} &= OF_i + 2x_i + 1.
 \end{aligned}$$

Подальше формування крокової траєкторії в четвертому октанті в секторі від 270° до 330° відповідає дузі  $\theta \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right]$ . Найменша

похибка інтерполяції буде при використанні  $I_{HR}$  - горизонтального правого і  $I_{DR}$  - діагонального правого кроків (рис. 8).

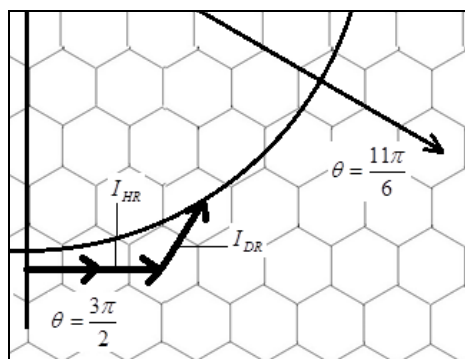


Рисунок 8 - Интерполяция дуги кола в секторе від 270° до 330°

Значення оцінювальної функції на  $i+1$ -му кроці інтерполяції буде:

$$\begin{aligned}
 OF_{HR(i+1)} &= (x_i + 1)^2 + (y_i)^2 - R^2 = \\
 &= x_i^2 + y_i^2 - R^2 + 2x_i + 1 = \\
 &= OF_i + 2x_i + 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 OF_{DR(i+1)} &= \left(x_i + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_i + \frac{3}{2\sqrt{3}}\right)^2 - R^2 = \\
 &= x_i^2 + y_i^2 - R^2 + x_i + \sqrt{3}y_i + 1 = \\
 &= OF_i + x_i + \sqrt{3}y_i + 1.
 \end{aligned}$$

Отже:

$$\begin{aligned}
 OF_{DR(i+1)} &= OF_i + x_i + \sqrt{3}y_i + 1. \\
 OF_{HR(i+1)} &= OF_i + 2x_i + 1.
 \end{aligned}$$

Остання ділянка кола відповідає дузі  $\theta \in \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$ . Найменша похибка інтерполяції буде при використанні  $I_{DR}$  - діагонального правого і  $I_{DL}$  - діагонального лівого кроків (рис. 9).

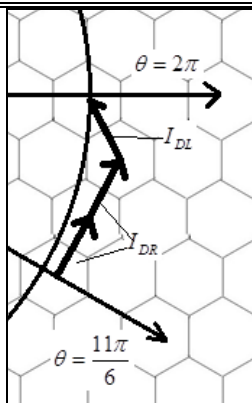


Рисунок 9 - Інтерполяція дуги кола в секторі від 330° до 360°

Для цієї частини дуги значення оцінювальної функції на  $i+1$ -му кроці інтерполяції:

$$OF_{DR(i+1)} = (x_i + \frac{1}{2})^2 + (y_i + \frac{3}{2\sqrt{3}})^2 - R^2 =$$

$$= x_i^2 + y_i^2 - R^2 + x_i + \sqrt{3}y_i + 1 =$$

$$= OF_i + x_i + \sqrt{3}y_i + 1.$$

$$OF_{DL(i+1)} = (x_i - \frac{1}{2})^2 + (y_i + \frac{3}{2\sqrt{3}})^2 - R^2 =$$

$$= x_i^2 + y_i^2 - R^2 - x_i + \sqrt{3}y_i + 1 =$$

$$= OF_i - x_i + \sqrt{3}y_i + 1.$$

Таким чином:

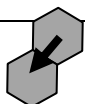
$$OF_{DR(i+1)} = OF_i + x_i + \sqrt{3}y_i + 1.$$

$$OF_{DL(i+1)} = OF_i - x_i + \sqrt{3}y_i + 1.$$

Зведемо отримані результати до таблиці 1.

Таблиця 1. Типи крокових приростів і відповідні значення оцінювальних функцій

Ділянка	Типи крокових приростів і значення ОФ
$\theta \in [0, \frac{\pi}{6}]$	 $OF_{DL(i+1)} = OF_i - x_i + \sqrt{3}y_i + 1$
	 $OF_{DR(i+1)} = OF_i + x_i + \sqrt{3}y_i + 1$
$\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$	 $OF_{DL(i+1)} = OF_i - x_i + \sqrt{3}y_i + 1$
	 $OF_{HL(i+1)} = OF_i - 2x_i + 1$



$\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$	$OF_{DL(i+1)} = OF_i - x_i - \sqrt{3}y_i + 1$
	 $OF_{HL(i+1)} = OF_i - 2x_i + 1$
$\theta \in [\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$	$OF_{DL(i+1)} = OF_i - x_i - \sqrt{3}y_i + 1$
	 $OF_{DR(i+1)} = OF_i + x_i - \sqrt{3}y_i + 1$
$\theta \in [\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}]$	$OF_{DR(i+1)} = OF_i + x_i - \sqrt{3}y_i + 1$
	 $OF_{HR(i+1)} = OF_i + 2x_i + 1$
$\theta \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}]$	 $OF_{DR(i+1)} = OF_i + x_i + \sqrt{3}y_i + 1$
	 $OF_{HR(i+1)} = OF_i + 2x_i + 1$
$\theta \in [\frac{11\pi}{6}, 2\pi]$	$OF_{DL(i+1)} = OF_i - x_i + \sqrt{3}y_i + 1$
	 $OF_{DR(i+1)} = OF_i + x_i + \sqrt{3}y_i + 1$

**Висновки**

У роботі запропоновано модифікацію методу оцінювальної функції для інтерполяції кола на гексагональному растрі. Визначено формули для обчислення оцінювальної функції при інтерполяції дуги кола в різних ділянках декартової системи координат.

**Список літератури**

1. Романюк О. Н. Особливості гексагональної моделі пікселя / О. В. Мельник, О. Н. Романюк // Міжнародний науково-технічний журнал «Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах», Хмельницький, ХНУ, 2014р. №1 (46) – 214 с. С. 91-95.
2. Петух А.М. Інтерполяція в задачах контурного формоутворення [Монографія] / Петух А.М., Обідник Д.Т., Романюк О.Н. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2007. – 103 с.
3. Романюк О.Н, Використання методу оцінювальної функції для задач антиаліаїзingu /М. С. Курінний, О. Н. Романюк // Сборник научных трудов НГУ. – №19. – Том 2. – Дніпропетровськ: НГУ. – 2004. – С. 200-208.
4. T. C. Hales, "The Honeycomb Conjecture,"/ Hales T. C. //Discrete Computational Geometry.Vol. 25. 2001. P. 1 – 22.
5. R. C. Staunton and N. Storey, "A comparison between square and hexagonal sampling methods for pipeline image processing," Proc. SPIE, vol. 1194. 1989. P. 142 – 151.

Надійшла до редакції 10.03.2017

**А.Н. РОМАНИЮК, А.В. МЕЛЬНИК**

Винницький національний технічний університет

**РЕАЛИЗАЦИЯ КРУГОВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ГЕКСАГОНАЛЬНОГО РАСТРА**

В данной работе предлагается модифицированный метод для интерполяции дуги окружности на гексагональном растре. Получены формулы оценочной функции для интерполяции окружности. Определены типы шаговых приростов для разных участков дискретного пространства. Рассмотрены особенности генерации окружности на гексагональном растре.

**Ключевые слова:** гексагональный раст, метод оценочной функции, графический примитив.

**O.N. ROMANYUK, O. V. MELNYK**

Vinnitsia National Technical University

**REALIZATION CIRCULAR INTERPOLATION IN A HEXAGONAL GRID**

In this paper the method of estimate functions to interpolate circle on a hexagonal grid was described. The formulas for estimating function to interpolate segments are derived. Method for valuation of functions for circle arc interpolation on a hexagonal grid was modified. There are defined the types of stepping increments for different areas of discrete space. It is derived a formula for calculating of the circle arc interpolation function in different octant of the Cartesian coordinate system.

It is shown that derived formulas are not integer factorization compared with a square raster. These methods which are widely used for rectangular raster can be modified and adapted for a hexagonal grid. The basic element of hexagonal raster is right equilateral hexagon.

Theoretically investigated properties of images showed the advantage of the hexagonal grid over the standard rectangular. The modified method of assessment tool can be used in high realistic computer graphics systems.

**Keywords:** hexagonal raster, estimate functions, graphics primitive.

**References**

1. Romanyuk, O.N., Mel'nyk, O.V. (2014), *The features of hexagonal model of pixel* [Osoblyvosti heksahonal'noyi modeli piksela], Mizhnarodnyy naukovo-tekhnichnyy zhurnal «Vymiryuval'na ta obchyslyuval'na tekhnika v tekhnolohichnykh protsesakh», Khmel'nyts'kyy, KhNU, No.1 (46), p. 91-95.
2. Pyetukh, A.M., Obidnyk, D.T., Romanyuk, O.N. (2007) *Interpolation in contour shaping problems* [Interpolyatsiya v zadachakh konturnoho formoutvorennya]: Monograph. Vinnitsya: UNIVERSUM-Vinnitsya, 2007. – 103 p.
3. Kurinnyy M.S., Romanyuk O.N (2004) Using of estimation function method for antialiasing problems. *Vykorystannya metodu otsynoval'noyi funktsiyi dlya zadach antyaliayzynhu. Sbornyk nauchnykh trudov NHU, No.19, Vol.2, Dnipropetrovs'k, p. 200-208.*
4. Hales, T. C. (2001), The Honeycomb Conjecture, *Discrete Computational Geometry*, Vol. 25, p. 1 – 22.
5. Staunton and, R. C., Storey, N. (1989), A comparison between square and hexagonal sampling methods for pipeline image processing, *Proc. SPIE*, vol. 1194, p. 142 – 151.