

УДК 514.182.7, УДК 622.243.27

В. О. Близнюк, студент  
О. В. Фролов, канд. техн. наук, доц.  
Донецький національний технічний університет, Україна  
frolgx@gmail.com

## Моделювання траєкторій скривлених свердловин методом гелікоїдальних дуг

Розглянуто метод апроксимації траєкторії стовбура скривлених свердловин дугами гвинтових ліній. Запропоновано конструктивну модель визначення аксіального напрямку поточної ділянки траєкторії як напрямку лінії перетину бісекторних площин кутів між дотичними в трьох послідовних точках інклінометричних вимірювань. Отримані параметри координатних перетворень до локальної системи координат, в якій будується поточна дуга гвинтової лінії. Розглянуто алгоритм визначення параметрів поточної ділянки траєкторії – кута між дотичною та віссю, меж зміни параметра положення точки на лінії та радіусу циліндра, на якому знаходиться поточна ділянка траєкторії.

**Ключові слова:** свердловина, стовбур свердловини, азимут, зенітний кут, довжина дуги, гвинтова лінія, бісекторна площина.

DOI: 10.31474/1996-1588-2017-2-25-12-21

### Вступ

Проблема визначення форми та положення свердловин у просторі стосується вельми широкого кола питань, що виникають на всіх етапах освоєння родовищ корисних копалин.

Так, на етапі розвідки родовищ просторова інформація по свердловинам використовується для створення уяви про геологічну будову товщі порід (розташування в надрах продуктивних пластів, покладів та порід, структурних особливостей родовища) та запаси корисних копалин.

На етапах будівництва та експлуатації родовищ вимоги до точності та оперативності отримання просторових даних значно підвищуються:

- сучасні методи геологічного моделювання, складення схем розробки родовищ потребують достовірної оцінки початкових та залишкових запасів, локалізації геологічних структур, які ускладнюють ведення робіт;

- видобуток нафти та газу потребує направлено буріння, контроль за яким використовує просторову інформація для цілей орієнтування бурового обладнання, недопущення перетину нової свердловини з вже існуючими, попередження бурильників про потенціальні проблеми, визначення місць аварій, викидів та загорянь.

Сучасний розвиток приборів та вимірювальних систем потребує й розробки відповідного програмно-інформаційного забезпечення, в основу якого покладено ті чи інші методи математичного моделювання.

Таким чином, проблема удосконалення існуючих методів моделювання профілю стовбура свердловини є актуальною науковою проблемою.

### Аналіз методів розрахунку траєкторій стовбура свердловин

Інклінометричні дослідження проводять в окремих точках траєкторії стовбура свердловини за

допомогою інклінометрів – приборів, що вимірюють параметри траєкторії за допомогою магнітних (або гіроскопічних) та гравітаційних датчиків [2]. Ці вимірювання можуть проводитись як в процесі буріння свердловини, так і після його закінчення.

Параметрами траєкторії стовбура свердловини, що вимірюються при інклінометричних дослідженнях є величини азимуту  $\alpha$  та зенітного кута  $\theta$  в точках траєкторії стовбура, а також відстань  $\Delta l_i$  між точками вимірювань (див. рис.1).

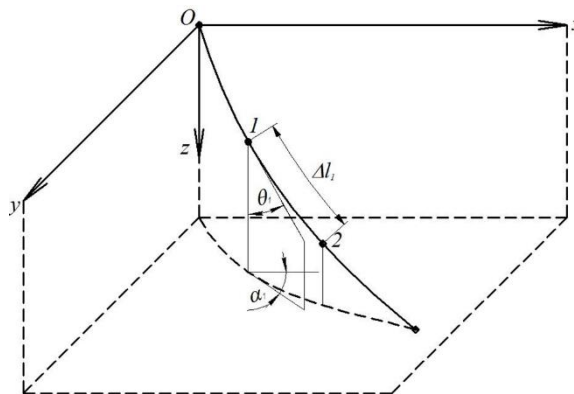


Рисунок 1 - Параметри траєкторії стовбура свердловини

Із кожною свердловиною пов'язують систему прямокутних координат (рис.1), що має початок в усті свердловини та наступні напрями осей:

- $z$  – донизу за напрямом прямовисних ліній;
- $x$  – за північним напрямом географічного або магнітного меридіану;
- $y$  - за східним напрямом відповідної паралелі або перпендикулярно до осей  $x$  та  $z$ .

Задача побудови траєкторії стовбура свердловини полягає в тому [2], щоб за відомим масивом інклінометричних вимірів визначити

координати відповідних точок в системі координат, що пов'язана з устям свердловини, тобто визначити глибину та горизонтальні зміщення по осям  $x$  та  $y$ .

Проекції  $(dx, dy, dz)$  елементарного інтервалу  $(dl)$  стовбуру свердловини [2]:

$$\begin{aligned} dx &= dl \cos \alpha \sin \theta, \\ dy &= dl \sin \alpha \sin \theta, \\ dz &= dl \cos \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Інтегруючи ці вирази по довжині інтервалу отримують елементарні переміщення:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \int_0^{\Delta l} \cos \alpha \sin \theta \, dl, \\ \Delta y &= \int_0^{\Delta l} \sin \alpha \sin \theta \, dl, \\ \Delta z &= \int_0^{\Delta l} \cos \theta \, dl. \end{aligned} \quad (2)$$

Оскільки значення функцій  $\alpha=\alpha(l)$  та  $\theta=\theta(l)$  відомі тільки на кінцях інтервалу (в точках вимірювань), відомі методи обчислення координат траєкторії стовбуру свердловини використовують встановлені закономірності зміни зенітного кута та азимуту (їх згладжені залежності), або вважають відомою геометрію самого інтервалу.

Найпростіші методи розрахунку використовують результати кутових вимірювань в двох сусідніх точках траєкторії, більш складні методи використовують результати в трьох та більше точках. Огляди методів розрахунку наведених в монографії [2] та в статті [3]. Доповнимо цей матеріал деякими дослідженнями.

Сплайнові методи розрахунку траєкторії [4, 5] використовують значення в декількох точках вимірювань (від чотирьох). В точках спряження ділянок забезпечується існування похідних, кривина таких ліній мінімальна. Недоліком цих методів можна вважати необхідність чисельного інтегрування порою досить складних виразів для отримання координат точок траєкторії стовбура свердловини.

Метод гелікоїдальних дуг [6] допускає припущення, що ділянка траєкторії свердловини між точками вимірювань апроксимується гвинтовою лінією (правою чи лівою). Гелікоїдальні дугі проводять таким чином, щоб напрями дотичних на кінцях інтервалів збігалися із даними вимірювань. Для побудови кожної дуги траєкторії згідно з даним методом використовуються дані за трьома точками вимірювань, що дозволяє врахувати інформацію не тільки про локальну кривину, але й про локальний скрут. Цей метод можна вважати компромісним між менш точними

простішими методами та складними методами, що використовують алгоритми чисельного інтегрування і, як наслідок, більш вимогливі до апаратного забезпечення. В вітчизняній літературі метод гелікоїдальних дуг майже не представлений – в монографії [2] присутні тільки загальні відомості про метод без математичного опису та алгоритму програмної реалізації. Наведений в [2] матеріал до того ж містить суперечливе твердження, що метод використовує апроксимацію ділянки стовбуру свердловини лише гвинтовою лінією правого напрямку, яке з незрозумілих причин виключає випадки лівої скрученості траєкторії, або зміни напрямку закручення. Новітні закордонні джерела [7] також містять питання, що потребують уточнення: наприклад, вважається, що дві суміжні ділянки траєкторії належать до одного циліндру.

### Конструктивна модель

Метод гелікоїдальних передбачає використання дуг гвинтових ліній для апроксимації траєкторії стовбуру скривленої свердловини. Ці дуги потрібно визначити таким чином, щоб дотичні до них у початкових та кінцевих збігалися за напрямками з відповідними даними інклінометричної зйомки, а довжина дуг дорівнювала інтервалам зйомки. Для отримання параметрів поточної дуги використовують дані за трьома точками вимірювань. При цьому в загальному випадку двома точками ( $i$  та  $i+1$ ) будуть точки, які з'єднає поточна дуга траєкторії (початок та кінець інтервалу), а, третьою точкою, буде попередня точка для даної ділянки траєкторії ( $i-1$ ) [2].

Алгоритм побудови довільної ділянки траєкторії за методом гелікоїдальних дуг може бути розкладений на такі етапи:

- 1) Визначення аксіального напрямку для поточної дуги траєкторії;
- 2) Перетворення координат до нової (локальної) системи з початком у поточній ( $i$ -й) точці дуги та наступними напрямками координатних осей:
  - $z$  за напрямом осі гвинтової лінії;
  - $x$  за напрямом ортогональним до напрямку дотичної в поточній точці (отриманим за результатами інклінометричних вимірювань) та напрямку осі  $z$  в бік, що визначається за правилом гвинта;
  - $y$  за напрямом ортогональним до напрямків осей  $x$  та  $z$ , щоб координатна система залишалась правою;
- 3) Знаходження параметрів дуги гвинтової лінії, якою моделюється поточна ділянка траєкторії свердловини – радіус циліндра, кут нахилу

гвинтової лінії, межа зміни параметру положення точки на цій лінії;

4) Побудова поточної ділянки траєкторії у вигляді дуги правої чи лівої гвинтової лінії, яка має початкову точку в початку координат нової системи та параметри визначені на попередньому етапі. В деяких випадках для вирішення прикладних завдань на цьому етапі достатньо отримати координати кінцевої точки ділянки [2].

Для визначення аксіального напрямку на першому етапі алгоритму пропонується наступна конструктивна схема. Skorистаємось відомою властивістю дотичних до гвинтової лінії мати сталий кут з її віссю [8, стр. 45]. Стає ясным, чому даних за напрямками лише двох дотичних виявляється недостатньо для побудови осі гвинта, - адже, геометричне місце ліній, що мають рівний нахил до двох заданих – це площина, в якій знаходиться безліч напрямів. Маючи ж напрями дотичних в трьох послідовних точках вимірювань, отримати аксіальний напрям в загальному випадку стає можливим, як результат перетину двох бісекторних площин кутів між напрямками дотичних в  $(i-1)$ -й та  $i$ -й,  $i$ ,  $i$ -й та  $(i+1)$ -й точками вимірювань. Виключення складає лише випадки колінеарності напрямів будь-яких двох із трьох послідовних дотичних.

Визначившись з аксіальним напрямом другий етап використовує стандартну процедуру координатних перетворень, яка не викликає ускладнень, тому привернемо увагу до третього етапу алгоритму. На цьому етапі визначаються параметри дуги гвинтової лінії, що нарощує траєкторію свердловини на поточній її ділянці на довжину відстані між точками вимірювань. Отже, в загальному випадку, цей етап використовує дані двох вимірювань - в  $i$ -й та  $(i+1)$ -й точці. При цьому зміна параметра положення точки на лінії гвинтової дуги відбувається в межах від нуля ( $i$ -та точка) до значення, що визначається лише кутом між дотичними, -  $(i+1)$ -ша точка. За кутовий параметр гвинтової лінії в роботі прийнятий кут між її дотичною та віссю. Це дозволяє будувати дуги правого чи лівого напрямку не змінюючи орієнтації координатної системи. Радіус циліндра, на якому знаходиться дуга гвинтової лінії, обчислюється за отриманими значеннями кутового параметру, кута між дотичними, а також відстані між  $i$ -ю та  $(i+1)$ -ю точками вимірювань.

Розглянемо окремі випадки побудови ділянок траєкторій. Насамперед, слід відділити випадок побудови двох суміжних ділянок траєкторії за спільним напрямом осі. Такі обставини виникають на початку створення траєкторії стовбуру

свердловини при  $i=0$ , коли попередня інформація відсутня, а також у випадках колінеарності напрямів у  $(i-1)$ -й та  $(i+1)$ -й точці вимірювань. В таких обставинах можливо зробити крок вперед та використати інформацію за  $i$ -ю,  $(i+1)$ -ю та  $(i+2)$ -ю точками. При цьому зауважимо, що ділянки між  $i$ -ю,  $(i+1)$ -ю та  $(i+2)$ -ю точками хоча й мають спільний аксіальний напрям, але належать в загальному випадку до двох різних гвинтових ліній. Ці гвинтові лінії мають рівний кут нахилу на розгортці, але лежать на кругових циліндрах різних радіусів, що дотикаються один до одного уздовж спільної твірної, яка паралельна аксіальному напрямку та проходить через  $(i+1)$ -шу точку траєкторії. Збігання гвинтових ліній та їх циліндрів можливе лише у випадку збігання напрямів дотичних, одночасної рівності кутів між ними та відстаней між  $i$ -ю та  $(i+1)$ -ю,  $i$ ,  $(i+1)$ -ю та  $(i+2)$ -ю точками.

В роботі [2], як окремий, зазначено випадок компланарності дотичних в трьох послідовних точках вимірювань, коли дуга гвинтової лінії перетворюється на дугу кола. Запропонований вище алгоритм не виключає цього та не потребує в загальному випадку будь-якої модифікації для такого випадку.

### Математичний опис моделі

Задля скорочення об'єму матеріалу доцільно скористатися векторною формою представлення основної частини, переходячи, де потрібно до координатної.

Позначимо через  $\mathbf{t}_{i-1}$ ,  $\mathbf{t}_i$  та  $\mathbf{t}_{i+1}$  вектори, що визначають напрями послідовних дотичних до траєкторії стовбуру свердловини отримані за даними інклінометричної зйомки. Координати цих векторів:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{i-1} & \{ \sin \theta_{i-1} \cos \alpha_{i-1}; \sin \theta_{i-1} \sin \alpha_{i-1}; \cos \theta_{i-1} \}, \\ \mathbf{t}_i & \{ \sin \theta_i \cos \alpha_i; \sin \theta_i \sin \alpha_i; \cos \theta_i \}, \\ \mathbf{t}_{i+1} & \{ \sin \theta_{i+1} \cos \alpha_{i+1}; \sin \theta_{i+1} \sin \alpha_{i+1}; \cos \theta_{i+1} \}. \end{aligned} \quad (3)$$

де:  $\theta_{i-1}$ ,  $\theta_i$ ,  $\theta_{i+1}$  - зенітні кути у відповідних точках вимірювань;

$\alpha_{i-1}$ ,  $\alpha_i$ ,  $\alpha_{i+1}$  - азимуты точок вимірювань.

Для визначення аксіального напрямку за конструктивною моделлю, потрібно отримати бісекторні площини кутів між напрямками дотичних  $\mathbf{t}_{i-1}$  і  $\mathbf{t}_i$  та  $\mathbf{t}_i$  і  $\mathbf{t}_{i+1}$ , які позначимо відповідно як  $\varphi_{i-1,i}$  та  $\varphi_{i,i+1}$ . Найпростіше це зробити наступним чином: оскільки напрями дотичних задають одиничні, а, отже, рівні за модулем вектори, скористаємось властивостями суми та різниці таких

векторів. Сума векторів  $\mathbf{t}_{i-1}$  і  $\mathbf{t}_i$  визначає слід бісекторної площини в площині кута між ними, їх різниця направлена ортогонально до нього, а, отже, визначає нормаль до бісекторної площини. Аналогічні побудови призводять до визначення нормалі до бісекторної площини кута  $\varphi_{i,i+1}$  між  $\mathbf{t}_i$  і  $\mathbf{t}_{i+1}$ . Позначаючи ці нормалі як  $\mathbf{nb}_{i-1,i}$  та  $\mathbf{nb}_{i,i+1}$ , будемо мати:

$$\begin{aligned}\mathbf{nb}_{i-1,i} &= \mathbf{t}_i - \mathbf{t}_{i-1}, \\ \mathbf{nb}_{i,i+1} &= \mathbf{t}_{i+1} - \mathbf{t}_i.\end{aligned}\quad (4)$$

Маючи напрями нормалей бісекторів можливо безпосередньо перейти до визначення аксіального напрямку не переходячи до рівнянь бісекторних площин та лінії їх перетину. Оскільки аксіальний напрям повинен бути паралельним до обох бісекторних площин, він має бути перпендикулярним до їхніх нормалей. Таким чином, напрям осі гвинта  $\mathbf{w}$  найпростіше отримати через векторний добуток векторів нормалей

$$\mathbf{w} = \mathbf{nb}_{i-1,i} \times \mathbf{nb}_{i,i+1}.\quad (5)$$

Підставляючи до (5) замість  $\mathbf{nb}_{i-1,i}$  та  $\mathbf{nb}_{i,i+1}$  праву частину (4) та здійснивши перетворення, отримаємо наступний вираз  $\mathbf{w}$

$$\mathbf{w} = \mathbf{t}_{i+1} \times \mathbf{t}_i + \mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_{i+1} + \mathbf{t}_{i-1} \times \mathbf{t}_i.\quad (6)$$

Як бачимо, векторний добуток нормалей до бісекторних площин дотичних взятих в порядку послідовності вимірювань виражається сумою векторних добутків напрямів інклінометричних вимірювань, де добуток суміжних векторів  $\mathbf{t}_{i-1}$  і  $\mathbf{t}_i$  та  $\mathbf{t}_i$  і  $\mathbf{t}_{i+1}$  беруться в порядку послідовності вимірювань, а вектор добутку крайніх векторів  $\mathbf{t}_{i-1}$  і  $\mathbf{t}_{i+1}$  береться в протилежному порядку. Оскільки інклінометричні напрями є одиничними векторами, величина вектору  $\mathbf{w}$  буде визначатись значенням синусів кутів між відповідними напрямками. Напрямок цього вектору буде залежати від переважаючої направленості повороту від вектору  $\mathbf{t}_{i-1}$  до вектору  $\mathbf{t}_i$ , від  $\mathbf{t}_i$  до  $\mathbf{t}_{i+1}$  та від  $\mathbf{t}_{i+1}$  до  $\mathbf{t}_{i-1}$ .

В згаданих в попередньому підпункті випадках побудови ділянок траєкторії стовбуру свердловини за алгоритмом з кроком вперед, аксіальний напрям можна отримати згідно з виразом

$$\mathbf{w} = \mathbf{t}_{i+2} \times \mathbf{t}_i + \mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_{i+1} + \mathbf{t}_{i+1} \times \mathbf{t}_{i+2}.\quad (7)$$

Розглянемо випадки невизначеності аксіального напрямку. Для цього розглянемо рівняння (6). Рівність нулю його правої частини як суми трьох векторних складових можлива лише у разі їх компланарності, що в свою чергу

призводить до умови компланарності напрямів трьох послідовних вимірювань. Однак однієї цієї умови виявляється не достатньо, адже в загальному випадку сума векторних добутків трьох компланарних векторів дає напрям паралельний векторному добутку будь-якої їхньої пари, що збігається з нормаллю до площини векторів. Таким чином, крім цієї умови необхідно ще виконання умови рівності нулевій суми трьох паралельних векторів добутків  $\mathbf{t}_{i-1} \times \mathbf{t}_i$ ,  $\mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_{i+1}$  та  $\mathbf{t}_{i+1} \times \mathbf{t}_{i-1}$ . Зазначена сума визначається алгебраїчною сумою модулів векторних добутків. Модулі ж векторних добутків одиничних векторів  $\mathbf{t}_{i-1}$ ,  $\mathbf{t}_i$  та  $\mathbf{t}_{i+1}$  в свою чергу визначаються значенням синусів трьох направлених кутів  $\varphi_{i-1,i}$ ,  $\varphi_{i,i+1}$  та  $\varphi_{i-1,i+1}$  між цими векторами, з яких останній кут є алгебраїчною сумою двох попередніх. Напишемо другу умову у вигляді рівняння

$$\sin \varphi_{i-1,i} + \sin \varphi_{i,i+1} - \sin (\varphi_{i-1,i} + \varphi_{i,i+1}) = 0.$$

Вочевидь розв'язками цього рівняння будуть такі співвідношення між кутами  $\varphi_{i-1,i}$ ,  $\varphi_{i,i+1}$  та  $\varphi_{i-1,i+1}$ : 1)  $\varphi_{i-1,i} = 0$ ,  $\varphi_{i,i+1} = 0$ ; 2)  $\varphi_{i-1,i} \neq 0$ ,  $\varphi_{i,i+1} = 0$ ; 3)  $\varphi_{i-1,i} = 0$ ,  $\varphi_{i,i+1} \neq 0$ ; 4)  $\varphi_{i-1,i} = -\varphi_{i,i+1}$ . Ці розв'язки можливо об'єднати в два випадки співвідношень векторних добутків: - одночасної рівності нулевій кожного з трьох добутків  $\mathbf{t}_{i-1} \times \mathbf{t}_i$ ,  $\mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_{i+1}$  та  $\mathbf{t}_{i+1} \times \mathbf{t}_{i-1}$  (розв'язок 1); - рівності нулевій одного з зазначених трьох добутків, коли два інших добуток рівні та протилежно направлені (розв'язки 2, 3 та 4).

Для розв'язку 1 - дві послідовні ділянки траєкторії можливо з'єднати одним відрізком прямої між  $(i-1)$ -ю та  $(i+1)$ -ю точками вимірювань. Для розв'язку 2 - потрібно з'єднати відрізком прямої тільки поточну ділянку траєкторії, тобто відбувається перехід від криволінійної ділянки до прямолінійної. Для розв'язку 3 - навпаки відбувається перехід від прямолінійної ділянки до криволінійної, тому можливо зробити крок вперед та спробувати побудувати гвинтову лінію за даними  $i$ -ї,  $(i+1)$ -ї та  $(i+2)$ -ї точок вимірювань. Розв'язок 4 відзначається зміною напрямку спряження двох послідовних ділянок при рівних кутах між дотичними. Побудувати поточну ділянку траєкторії у випадку розв'язку 4 можливо скориставшись алгоритмом із кроком вперед, або не змінюючи алгоритму використавши при визначенні осьового напрямку векторний добуток  $\mathbf{w} = \mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_{i+1}$ .

Розберемо питання переходу від глобальної системи координат (рис. 1) до локальної системи з

початком в поточній точці траєкторії. Напрямок осі  $z$  цієї системи нами вже було визначено, адже ним є напрям аксіального вектору  $\mathbf{w}$ . Позначимо напрям осі  $x$  як  $\mathbf{u}$  та отримаємо нього як векторний добуток вектору  $\mathbf{t}_i$  на вектор  $\mathbf{w}$ . Розкладаючи  $\mathbf{t}_i \times \mathbf{w}$  на векторно-векторні добутки, що складаються з комбінацій векторів  $\mathbf{t}_{i-1}$ ,  $\mathbf{t}_i$  та  $\mathbf{t}_{i+1}$ , і, далі ці добутки за тими ж векторами, будемо мати наступний вираз

$$\mathbf{u} = \mathbf{t}_i \times \mathbf{w} = (1 - \cos \varphi_{i,i+1}) \mathbf{t}_{i-1} + (\cos \varphi_{i,i+1} - \cos \varphi_{i-1,i}) \mathbf{t}_i + (\cos \varphi_{i-1,i} - 1) \mathbf{t}_{i+1}. \quad (8)$$

У виразі (8) через  $\varphi_{i-1,i}$ ,  $\varphi_{i,i+1}$  та  $\varphi_{i-1,i+1}$  позначено кути між векторами напрямів в  $(i-1)$ -й,  $i$ -й,  $i+1$ -й точках вимірювань. Косинуси цих кутів можливо отримати за звичайними формулами аналітичної геометрії, використовуючи координати векторів (3):

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{i-1,i} &= \sin \theta_{i-1} \sin \theta_i \cos(\alpha_i - \alpha_{i-1}) + \\ &+ \cos \theta_{i-1} \cos \theta_i, \\ \cos \varphi_{i,i+1} &= \sin \theta_i \sin \theta_{i+1} \cos(\alpha_{i+1} - \alpha_i) + \\ &+ \cos \theta_i \cos \theta_{i+1}, \\ \cos \varphi_{i-1,i+1} &= \sin \theta_{i-1} \sin \theta_{i+1} \cos(\alpha_{i+1} - \alpha_{i-1}) + \\ &+ \cos \theta_{i-1} \cos \theta_{i+1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Перейдемо до визначення напрямку  $\mathbf{v}$  осі  $y$ , що ортогональний векторам  $\mathbf{u}$  та  $\mathbf{w}$ . Для цього вектору  $\mathbf{v}$  у випадку правої системи буде діяти вираз

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u} = \mathbf{w} \times (\mathbf{t}_i \times \mathbf{w}) = (\mathbf{w}^2) \mathbf{t}_i - (\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w}, \quad (10)$$

де:  $\mathbf{w}^2$  - скалярний квадрат вектору  $\mathbf{w}$ ;

$\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{w}$  - скалярний добуток векторів  $\mathbf{t}_i$  та  $\mathbf{w}$ .

Вираз для скалярного квадрату аксіального вектору має вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^2 &= \sin^2 \varphi_{i-1,i} + \sin^2 \varphi_{i,i+1} + \sin^2 \varphi_{i-1,i+1} + \\ &+ 2(\cos \varphi_{i-1,i} \cos \varphi_{i,i+1} + \cos \varphi_{i-1,i} \cos \varphi_{i-1,i+1} + \\ &+ \cos \varphi_{i,i+1} \cos \varphi_{i-1,i+1}) - 2(\cos \varphi_{i-1,i} + \cos \varphi_{i,i+1} + \\ &+ \cos \varphi_{i-1,i+1}), \end{aligned}$$

який можна замінити на наступну еквівалентну форму, що не потребує обчислення синусу:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^2 &= 6 - (\cos \varphi_{i-1,i} + 1)^2 - (\cos \varphi_{i,i+1} + 1)^2 - \\ &- (\cos \varphi_{i-1,i+1} + 1)^2 + 2(\cos \varphi_{i-1,i} \cos \varphi_{i,i+1} + \\ &+ \cos \varphi_{i-1,i} \cos \varphi_{i-1,i+1} + \cos \varphi_{i,i+1} \cos \varphi_{i-1,i+1}). \end{aligned} \quad (11)$$

Скалярний добуток векторів  $\mathbf{t}_i$  та  $\mathbf{w}$  отримаємо з урахуванням правої частини виразу (6) як векторно-скалярні добутки комбінацій векторів  $\mathbf{t}_{i-1}$ ,  $\mathbf{t}_i$  та  $\mathbf{t}_{i+1}$ , з яких тільки одна не є нульовою. Будемо мати

$$\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_{i+1}, \mathbf{t}_{i-1}), \quad (12)$$

де в скобках позначено змішані (векторно-скалярні) добутки відповідних векторів. Вираз квадрату змішаного добутку [9] приводить до

$$(\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{w})^2 = 1 - \cos^2 \varphi_{i-1,i} - \cos^2 \varphi_{i,i+1} - \cos^2 \varphi_{i-1,i+1} + 2 \cos \varphi_{i-1,i} \cos \varphi_{i,i+1} \cos \varphi_{i-1,i+1}. \quad (13)$$

У випадку формули (6) будемо використовувати знак «+» перед радикалом із правої частини (13).

Нормуючи вектори  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  та  $\mathbf{w}$ , визначимо орти  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  та  $\mathbf{k}'$  напрямів осей локальної системи координат. Будемо мати

$$\mathbf{i}' = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \mathbf{j}' = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \mathbf{k}' = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}, \quad (14)$$

де:  $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}^2}$ ,  $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}^2}$  та  $|\mathbf{w}| = \sqrt{\mathbf{w}^2}$  - модулі відповідних векторів. Скалярний квадрат вектору  $\mathbf{w}$  може бути отримано з (11), скалярні квадрати векторів  $\mathbf{u}$  та  $\mathbf{v}$  визначаються формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^2 &= 2\mathbf{w}^2(1 + \cos \varphi_{i-1,i} \cos \varphi_{i,i+1} + \\ &+ \cos \varphi_{i-1,i} \cos \varphi_{i-1,i+1} + \cos \varphi_{i,i+1} \cos \varphi_{i-1,i+1} - \\ &- \cos \varphi_{i-1,i} - \cos \varphi_{i,i+1} - \cos \varphi_{i-1,i+1} - \\ &- \cos \varphi_{i-1,i} \cos \varphi_{i,i+1} \cos \varphi_{i-1,i+1}), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbf{v}^2 = 2(1 - \cos \varphi_{i-1,i})(1 - \cos \varphi_{i,i+1})(1 - \cos \varphi_{i-1,i+1}).$$

Позначивши напрямні косинуси векторів  $\mathbf{i}' - \{l_1, m_1, n_1\}$ ,  $\mathbf{j}' - \{l_2, m_2, n_2\}$  та  $\mathbf{k}' - \{l_3, m_3, n_3\}$ , напишемо формули переходу від локальної системи до глобальної:

$$\begin{aligned} x &= x_i + l_1 x' + l_2 y' + l_3 z', \\ y &= y_i + m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \\ z &= z_i + n_1 x' + n_2 y' + n_3 z', \end{aligned} \quad (16)$$

де:  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  - координати поточної точки траєкторії, від якої нарощується ділянка.

Перейдемо до визначення параметрів дуги гвинтової лінії, що будується від поточної точки в локальній системі координат. Спочатку, напишемо параметричні рівняння гвинтової лінії відносно системи координат із початком в точці з нульовим значенням параметра положення  $u$ , віссю  $z'$  направленою паралельно аксіальному напрямку, віссю  $x'$  направленою згідно з напрямом нормалі до поверхні циліндра гвинтової лінії та віссю  $y'$ , що розташовується згідно із напрямом правого закручування. Вони матимуть наступний вигляд:

$$x' = a(\cos u - 1), y' = a \sin u, z' = a \operatorname{ctg} \beta u, \quad (17)$$

де:  $a$  - параметр форми гвинтової лінії, що дорівнює радіусу циліндра, на якому вона розташована;  $\beta$  - параметр форми гвинтової лінії, що визначає кут нахилу її дотичних до осі.

Отже, згідно до розглянутої моделі, параметрами дуги гвинтової лінії, що визначаються, будуть: параметри форми  $a$  та  $\text{ctg } \beta$ , а також значення параметра положення  $u_K$ , якому відповідає кінцева точка  $K$  гвинтової дуги.

Вираз для котангенсу кута між дотичною та віссю отримуємо із співвідношення скалярного добутку тангенціального та аксіального векторів до модулю їх векторного добутку:

$$\text{ctg } \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{t}_i \times \mathbf{w}|} = \frac{\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{u}|}. \quad (18)$$

Знайдемо тангенціальний вектор гвинтової лінії, диференціюючи та нормуючи рівняння (17). Будемо мати координати орта дотичної

$$\mathbf{t} \left\{ -\frac{\sin u}{\sqrt{1+\text{ctg}^2 \beta}}, \frac{\cos u}{\sqrt{1+\text{ctg}^2 \beta}}, \frac{\text{ctg } \beta}{\sqrt{1+\text{ctg}^2 \beta}} \right\}. \quad (19)$$

Як бачимо, напрям дотичної цілком залежить тільки від двох параметрів лінії (17) -  $u$  та  $\text{ctg } \beta$ . Останній параметр нами вже отримано. Далі напишемо рівняння для косинусу кута між напрямками дотичних гвинтової лінії, що взяті в двох її точках:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{t}_K}{|\mathbf{t}_0| |\mathbf{t}_K|} \\ &= \frac{1}{1+\text{ctg}^2 \beta} (\cos(u_K - u_0) + \text{ctg}^2 \beta) \end{aligned}, \quad (20)$$

де:  $u_0$ ,  $u_K$  - значення параметру положення у початковій та кінцевих точках дуги. За прийнятою схемою значення  $u_0=0$ , отже, рівняння (20) перетвориться на

$$\cos \varphi = \frac{1}{1+\text{ctg}^2 \beta} (\cos u_K + \text{ctg}^2 \beta). \quad (21)$$

З іншого боку кут  $\varphi$  між дотичними можна обчислити за даними інклінометрії згідно (9) - ним буде кут  $\varphi_{i,i+1}$  для однієї дуги в алгоритмі з кроком назад, та кути  $\varphi_{i,i+1}$  та  $\varphi_{i+1,i+2}$  для двох дуг у випадку алгоритму з кроком вперед. Розв'язавши рівняння (21) відносно  $\cos u_K$ , отримуємо

$$\cos u_K = \cos \varphi_{i,i+1} (1+\text{ctg}^2 \beta) - \text{ctg}^2 \beta \quad (22)$$

- для алгоритму з кроком назад та першої ділянки в алгоритмі з кроком вперед;  
та

$$\cos u_K = \cos \varphi_{i+1,i+2} (1+\text{ctg}^2 \beta) - \text{ctg}^2 \beta, \quad (23)$$

- для другої ділянки в алгоритмі з кроком вперед

Взявши арккосинус правої частини рівнянь (22) та (23), будемо мати значення параметра

положення кінцевої точки відповідних дуг гвинтових ліній.

Перейдемо до розгляду питання визначення радіуса  $a$  циліндра гвинтової лінії. Довжину дуги гвинтової лінії від початкової до кінцевої точки можна отримати згідно з виразом [18]:

$$s = \int_0^{u_K} a \sqrt{1+\text{ctg}^2 \beta} du = a \sqrt{1+\text{ctg}^2 \beta} u_K. \quad (24)$$

Прирівнявши значення  $s$  значенню  $\Delta l$  відстані між точками вимірювання для поточної ділянки та розв'язавши (24) відносно  $a$ , будемо мати

$$a = \frac{\Delta l}{u_K \sqrt{1+\text{ctg}^2 \beta}}, \quad (25)$$

де в якості значення  $\Delta l$  будемо використовувати: значення відстані  $\Delta l_{i,i+1}$  - для алгоритму з кроком назад та першого інтервалу в алгоритмі з кроком вперед; значення відстані  $\Delta l_{i+1,i+2}$  - для другого інтервалу в алгоритмі з кроком вперед.

Рівняння (25) визначає залежність радіуса  $a$  від інших параметрів дуги гвинтової лінії при заданій її довжини. Цей факт підтверджує сформульоване раніше положення, що суміжні ділянки траєкторії навіть, якщо й мають спільний аксіальний напрям, в загальному випадку лежать на циліндрах різних радіусів, адже кути між дотичними, що визначають  $u_K$ , та відстані між точками вимірювань в цьому випадку різні.

Координати кінцевої точки дуги гвинтової лінії в локальній системі координат отримуємо визначивши її параметри та підставивши до правої частини (17):

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\Delta l}{u_K \sqrt{1+\text{ctg}^2 \beta}} (\cos u_K - 1), \\ y' &= \frac{\Delta l}{u_K \sqrt{1+\text{ctg}^2 \beta}} \sin u_K, \\ z' &= \frac{\Delta l}{\sqrt{1+\text{ctg}^2 \beta}} \text{ctg } \beta. \end{aligned} \quad (26)$$

Підставивши праву частину останніх виразів до формул (16) координатних перетворень замість  $x'$ ,  $y'$  та  $z'$ , отримуємо координати кінцевої точки поточної ділянки траєкторії стовбура скривленої свердловини.

### Результати моделювання

Запропонована модель була реалізована в системі комп'ютерної математики Maple 2016. В середовищі цієї системи була розроблена програма на внутрішній мові Maple, яка виконує обчислення

траєкторії стовбура свердловини та графічні побудови. При цьому виконуються наступні дії:

- читання та перетворення початкових даних;
- обчислення коефіцієнтів координатних перетворень з локальної до глобальної координатних систем;
- обчислення параметрів та кінцевих точок дуг, що апроксимують ділянки траєкторії;
- графічна побудова траєкторії засобами системи Maple 2016;
- експорт отриманих результатів для подальшого використання в інших комп'ютерних системах.

Початковими даними програми є результати інклінометричної зйомки у вигляді файлу електронної таблиці Excel, яка містить два стовбці із значеннями зенітного кута та азимуту – у випадку сталої відстані між точками вимірювань, або три стовбці – у випадку мінливої відстані. Дані з файлу за допомогою функції ImportData завантажуються у матрицю вхідних даних. Далі ця матриця спеціальною процедурою перетворюється на список векторів, що мають координати обчислені згідно (3).

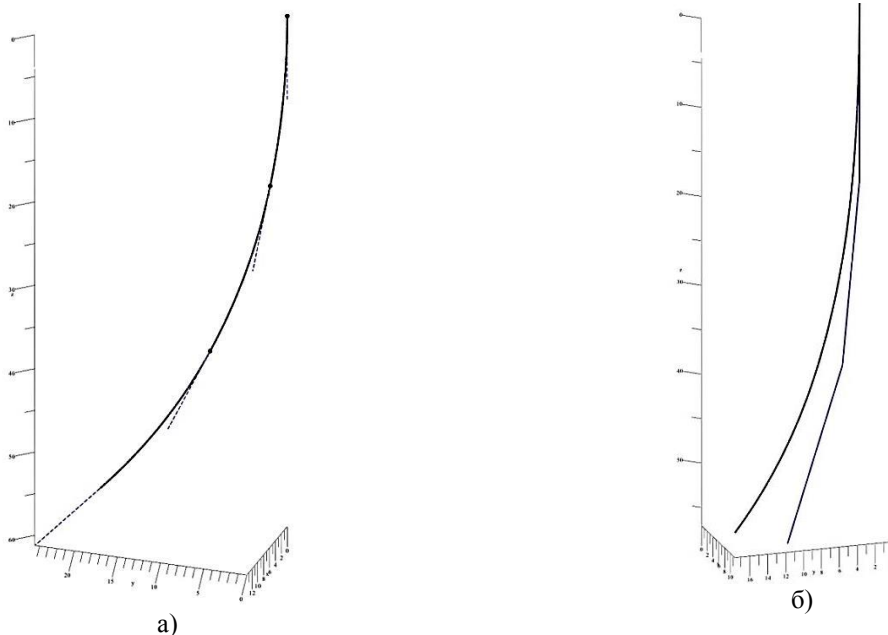
Коефіцієнти координатних перетворень формуються процедурою, яка реалізує циклічний процес, в якому за допомогою функцій бібліотеки LinearAlgebra обчислюються скалярні та векторні добутки векторів списку вхідних даних, а також відбувається нормування отриманих векторів. На виході процедури утворюються три списки, що містять координати ортів осей локальних систем. Зауважимо, що у випадках невизначеності аксіального напрямку у відповідних місцях

зазначених списків координат утворюються нульові вектори. Це дозволяє спростити логіку подальших обчислень. Параметри дуг ділянок траєкторії також об'єднуються в список параметрів, що містить значення  $\text{ctg } \beta$ ,  $u_k$  та  $a$ .

Обчислення координат точок траєкторії виконується ітераційною процедурою, яка для отримання координат точок дуги на  $i$ -му кроці в якості початку використовує значення кінцевої точки дуги ( $i-1$ -го кроку). Якщо дуга гвинтової лінії на деякій ділянці стає невизначеною, її замінює відрізок дотичної прямої в кінцевій точці попередньої дуги. Координати кінцевих точок дуг траєкторії виділяються в окремий список.

Для побудови траєкторії в системі Maple 2016 використовувалась функція `sparsecurve` бібліотеки `plots`. За допомогою цієї функції в процесі ітерації формувались графічні об'єкти дуг відповідних ділянок траєкторії. По закінченні ітераційної процедури ці графічні об'єкти відображались функцією `display` тієї ж бібліотеки. Сформовані списки векторів, параметрів дуг, координат точок за бажанням можливо експортувати до формату Excel функцією `Export` бібліотеки `ExcelTools`.

Для тестування розробленої програми брались як реальні дані інклінометричних зйомок свердловин, так і дані, що відображають можливі характерні випадки траєкторій – випадки плоскої траєкторії, траєкторій, що закручується вліво та вправо, або змінюють напрямок закручування, випадки невизначеності аксіального напрямку. Результати моделювання наведені на рис. 2.



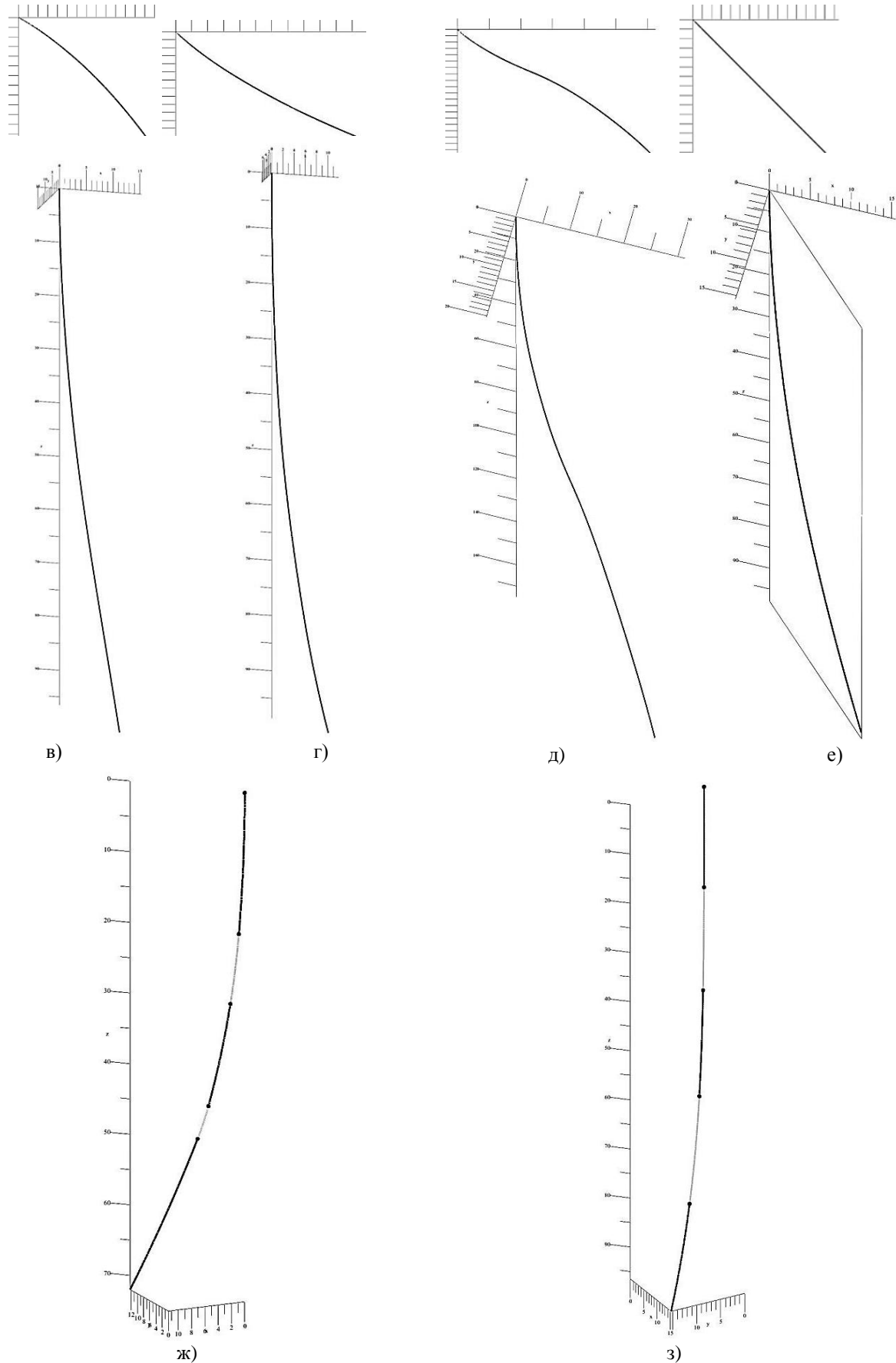


Рисунок 2 – Траєкторії стовбура свердловин: а) побудована разом з її дотичними напрямками; б) побудовані за тангенціальним методом та методом гелікоїдальних дуг; в) правого напрямку; г) лівого напрямку; д) змінного напрямку; е) плоска траєкторія; ж) траєкторія з інтервалами змінної довжини; з) траєкторія з інтервалами сталої довжини.



**Висновки**

Запропоновано метод визначення аксіального напрямку ділянки траєкторії як напрямку лінії перетину бісекторних площин кутів між інклінометричними напрямками, який не потребує розв'язку системи рівнянь.

Встановлено, що дуга гвинтової лінії, якою апроксимується ділянка траєкторії, може мати праву або ліву орієнтацію в залежності від напрямку зміни кутів послідовних інклінометричних вимірювань.

Компланарність результатів трьох послідовних вимірювань в загальному випадку не

накладає обмежень на використання методу гелікоїдальних дуг, адже, в цьому випадку метод дає результати аналогічні методу кругових дуг.

Ітераційний процес побудови траєкторії стовбуру свердловини за методом гелікоїдальних дуг, використовує при визначенні аксіального напрямку як основний алгоритм з кроком назад, який спирається на попередні обчислення. Алгоритм з кроком вперед рекомендовано використовувати лише в окремих випадках, коли попередніх даних ще не існує або, коли вони не дають змоги визначити аксіальний напрямок.

**Список літератури**

1. Стрельченко В.В. Геофизические исследования скважин. Учебник для вузов / В. В. Стрельченко. - М.: ООО «Недра-Бизнесцентр». - 2008. - 551 с.: ил.
2. Исаченко В. Х. Инклинометрия скважин / В. Х. Исаченко. – М.: Недра, 1987. – 216 с.
3. Кондров Н.С. Обзор методов расчёта профиля ствола наклоннонаправленной скважины / Н.С. Кондров, А.А. Щевелёв // Проблемы современной науки и образования, 2017. - №22 (104) - С. 24 - 28.
4. Sampaio J. H. Planning 3D well trajectories using spline-in-tension functions / J. H. Sampaio. // Journal of Energy Resources Technology. – Vol. 129, 2007. – P. 289–299.
5. Sampaio J. H. Designing 3D directional well trajectories using Bezier curves / J. H. Sampaio. // Journal of Energy Resources Technology. – Vol. 139, 2017. – Issue 3. – 8 p.
6. Callas N. P. Computing directional surveys with a helical method / N. P. Callas // Society of Petroleum Engineers Journal, Dec. 1976. - P. 327-336.
7. Žiga Š. Comparison of the directional survey calculation methods applied on real well data, Measurement / Škrjanc Žiga, Milivoj Vulić. // Journal of the International Measurement Confederation. – Vol. 94, 2016. - P. 239-244
8. Выгодский М. Я. Дифференциальная геометрия / М. Я. Выгодский. – М.-Л.: Гос. Изд-во техн.-теор. л-ры, 1949. – 513 с.
9. Лаптев Г.Ф. Элементы векторного исчисления/ Г. Ф. Лаптев. - М.: Наука, 1975. – 336 с.

Надійшла до редакції 10.11.2017

**REFERENCES**

1. Strelchenko V.V. (2008) *Geophysical survey of wells [Geophizicheskiye issledovaniya skvazhin]*, Moscow, 2008, 551p .
2. Isachenko V. Kh. (1987) *Well directional survey [Inklinimetrya skvazhin]*, Moscow, Nedra, 1987, 216 p.
3. Kondrov N.S. Shchevelev A.A. (2017) *Directional drilling calculation methods review [Obzor metodov rascheta profilya stvola naklono-napravlenoy skvazhini]*, Problems of modern science and education, 2017, no. 22 (104), pp. 24 -28.
4. Sampaio J. H. (2007) *Planning 3D well trajectories using spline-in-tension functions*, Journal of energy resources technology, vol. 129, 2007, pp. 289–299.
5. Sampaio J. H. (2017) *Designing 3D directional well trajectories using Bezier curves*, Journal of Energy Resources Technology, vol. 139, 2017, Issue 3, 8 p.
6. Callas N. P. (1976) *Computing Directional Surveys With a Helical Method*, Society of Petroleum Engineers Journal, Dec. 1976, pp. 327-336.
7. Žiga Š. *Comparison of the directional survey calculation methods applied on real well data*, Measurement, Journal of the International Measurement Confederation, vol. 94, 2016, pp. 239-244
8. Vygodsky M. Ya. (1949) *Differential geometry [Differencialnaya geometriya]*, Moscow-Leningrad, 1949, 513 p.
9. Laptev G.F. (1975) *Elements of the vector calculus [Elementi vektornogo ischisleniya]*, Moscow, Nauka, 1975, 336 p.

**В.А. БЛИЗНЮК, О.В. ФРОЛОВ**

Донецкий национальный технический университет, г. Покровск, Украина

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ИСКРИВЛЕННЫХ СКВАЖИН МЕТОДОМ ГЕЛИКОИДАЛЬНЫХ ДУГ**

Рассмотрен метод аппроксимации траекторий ствола искривленных скважин дугами винтовых линий. Предложено конструктивное решение для определения аксиального направления текущего участка траектории как направления линии пересечения бисекторных плоскостей углов между касательными в трех

---

последовательных точках инклинометрических измерений. Получены параметры координатных преобразований к локальной системе координат, в которой строится текущая дуга винтовой линии. Рассмотрен алгоритм определения параметров текущей участка траектории - угла между касательной и осью, границ изменения параметра положение точки на линии и радиуса цилиндра, на котором находится текущая участок траектории.

**Ключевые слова:** скважина, ствол скважины, азимут, зенитный угол, длина дуги, винтовая линия, бисекторная плоскость.

**V. BLIZNUK, O. FROLOV**

Donetsk National Technical University, Pokrovsk, Ukraine

#### **MODELING OF WELL TRAJECTORIES BY THE METHOD OF HELIKOIDAL ARCS**

The paper considers the method of geometrical modelling of curved well trajectories with the helical arcs. The constructive model of the determination of the axial direction of the current trajectory interval as a direction of the intersection line of the bisector planes of the angles between the tangents at the three consecutive points of the inclinometric measurements is proposed. On the basis of this, we obtain the parameters of coordinate transformations to the local coordinate system, in which the helical arc is constructed.

The algorithm for determining the parameters of the current arc - the angle between the tangent and the axis, the limits of the change of the position parameter and the radius of the cylinder is considered. The cases of indeterminacy of the axial direction and possible modifications of the proposed model are investigated. Based on the obtained dependencies, a program for calculating the well trajectory has been developed and the results of simulation have been obtained for the typical cases of the input data and the geometry of the trajectories.

**Keywords:** well, wellbore, azimuth, zenith angle, arc length, helix, bisector plane.