УДК 531.38

Н.Ф. Гоголєва, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Донецький національний технічний університет, м. Покровськ
gonata123@ukr.net

Кінематичне тлумачення частинного розв'язку задачі про рух двох гіроскопів Лагранжа, з'єднаних неголономним шарніром

Постановка задачі про рух за інерцією двох гіроскопів Лагранжа, з'єднаних неголономним шарніром, надано у роботі [1]. У роботі [2] знайдений новий випадок інтегрованості задачі про рух двох гіроскопів Лагранжа, з'єднаних неголономним шарніром. Для цього розв'язку знайдені рівняння рухомих і нерухомих аксоїдів тіл системи.

***Ключові слова**: неголономний шарнір, система гіроскопів Лагранжа, рухомий аксоїд, нерухомий аксоїд.*
DOI: 10.31474/1996-1588-2017-2-25-40-47

Загальна постановка проблеми

О.П.Харламов и М.П.Харламов у роботі [3] запропонували реалізацію неголономної в'язі – неголономний шарнір, коли до внутрішньої або зовнішньої поверхні сферичної оболонки кріпиться рамка, що несе коліщатка (диски). Ця в'язь виключає відносні повороти тіл S і S_0 навколо осі неголономності.

У роботі [1] надано постановку задачі про рух за інерцією двох гіроскопів Лагранжа, з'єднаних неголономним шарніром. Система, що розглядається, замкнена: дванадцять рівнянь зв'язують дванадцять величин. У роботі [2] знайдено новий випадок інтегрованості задачі.

Основною метою при побудові точного рішення системи диференціальних рівнянь залишається одержання повної інформації про всі особливості цього руху. У деяких випадках отримані рішення дозволяють установити, як тіло орієнтоване у просторі і де воно перебуває у певний момент часу. Основна теорема кінематики (рух тіла відтворюється коченням незмінно пов'язаної з тілом лінійчатої поверхні (рухомого аксоїда) по нерухомій у просторі лінійчатій поверхні (нерухомому аксоїду)) дозволяє досягти такого повного рішення.

П.В. Харламовим були знайдені нові кінематичні рівняння [4,5, 6] . Це рівняння кутової швидкості для тіла, що має нерухому точку. У більш загальному випадку - це рівняння аксоїдів [7, 8]. При отриманні цих рівнянь автор зв'язав ці рівняння через горлові лінії. І хоча цей шлях у загальній постановці був природним, при розв'язку конкретних задач він виявився непростим. М.Ю.Лесіна [9] значно спростила цю процедуру, запропонувавши нові рівняння аксоїдів, де виявилося можливим одержати компоненти абсолютної швидкості загальної точки O тіл. Завдяки такому підходу, рівняння аксоїдів виводяться без додаткових квадратур, комп'ютерна візуалізація руху істотно спрощується.

В статті [10] викладено алгоритм знаходження рухомих і нерухомих аксоїдів тіл системи. Там же знайдено матрицю вкладення пов'язаних з тілами базисів у нерухомий базис.

Вихідні співвідношення

У роботі [2] розглянутий рух двох тіл S і S_0, при умовах що, тіло S сферично симетрично й одне з тіл системи закріплено в центрі мас: $N=0$. Це обмеження можна записати у вигляді

$$mm_0 ll_0/(m+m_0)=0.$$

Розглянемо варіант

$$l=0, \tag{1}$$

який означає, що тіло S закріплене в центрі мас. При цій умові отримане нове рішення задачі про рух двох гіроскопів Лагранжа, з'єднаних неголономним шарніром:

$$n_0(\theta)=C\sin(\lambda\theta+\beta), \tag{2}$$

де $C,\ \beta$ – сталі інтегрування.

$$n(\theta)=\frac{C\lambda}{(1-\lambda^2)}\left[\lambda\sin(\lambda\theta+\beta)\cos\theta-\cos(\lambda\theta+\beta)\sin\theta\right] \tag{3}$$

Замість параметрів $J,\ J_0$ був введений новий параметр $B>0$

$$J=B\lambda^2, \qquad J_0=B(1-\lambda^2).$$

$$\omega_2(\theta)=-\frac{C}{B\lambda(1-\lambda^2)}\left[\lambda\sin(\lambda\theta+\beta)\sin\theta+\cos(\lambda\theta+\beta)\cos\theta\right]. \tag{4}$$

$$\omega_3(\theta)=\frac{C}{B\lambda(1-\lambda^2)}\begin{bmatrix}\lambda\sin(\lambda\theta+\beta)\cos\theta-\\-\cos(\lambda\theta+\beta)\sin\theta\end{bmatrix}. \tag{5}$$

$$\Omega_2(\theta)=-\frac{C}{B\lambda(1-\lambda^2)}\cos(\lambda\theta+\beta), \tag{6}$$

$$\Omega_3(\theta)=\frac{C}{B(1-\lambda^2)}\sin(\lambda\theta+\beta), \tag{7}$$

$$\omega_*(\theta)=\omega_1(\theta)e_1+\omega_2(\theta)e_2+\frac{n(\theta)}{J}e_3, \tag{8}$$

$$\Omega_*(\theta)=\Omega_1(\theta)e_1+\Omega_2(\theta)e_2^0+\frac{n_0(\theta)}{J_0}e_3^0 . \qquad (9)$$

$$\Omega_1(\theta)=\frac{2A_0}{A_0-J_0}\kappa(\theta), \qquad (10)$$

$$\omega_1(\theta)=2\frac{2A_0-J_0}{A_0-J_0}\kappa(\theta), \qquad (11)$$

де

$$\kappa^2(\theta)=\frac{(A_0-J_0)^2}{4\left(A_0^2+2A_0J-JJ_0\right)^2}\cdot\left\{\left[g^2-\frac{(J+J_0)^2C^2}{J_0^2}\right]-\right. \qquad (12)$$
$$\left.-\frac{\left(A_0^2+2A_0J-JJ_0\right)(J+J_0)C^2}{JJ_0^2}\cos^2(\lambda\theta+\beta)\right\}.$$

Як показують співвідношення (2), (4)–(7), залежності $n_0(\theta)$, $\Omega_2(\theta)$, $\Omega_3(\theta)$ простіше залежностей $n(\theta)$, $\omega_2(\theta)$, $\omega_3(\theta)$.

Вектор $\mathbf{r}_*$ з початком у центрі мас системи C_*, що вказує точку О, $\mathbf{r}_*=-a\,\mathbf{e}_3-a_0\mathbf{e}_3^0$, при обмеженні (1) приймає вид

$$\mathbf{r}_*=-a_0\mathbf{e}_3^0 . \qquad (13)$$

Швидкість точки О [10] має вид

$$\mathbf{V}=-a(\omega_2\mathbf{e}_1-\omega_1\mathbf{e}_2)-a_0\left(\Omega_2\mathbf{e}_1-\Omega_1\mathbf{e}_2^0\right),$$

яке при обмеженні (1) можна записати так

$$\mathbf{V}=-a_0\left(\Omega_2\mathbf{e}_1-\Omega_1\mathbf{e}_2^0\right). \qquad (14)$$

Рухомий аксоїд тіла S_0 визначається рівнянням

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{0}}(\mu,\theta)=\mu\frac{\boldsymbol{\Omega}_*(\theta)}{\Omega_*(\theta)}+\frac{\boldsymbol{\Omega}_*(\theta)\times\mathbf{V}(\theta)}{\Omega_*^2(\theta)} . \qquad (15)$$

Розкладання $\xi^0(\mu,\theta)$ в напіврухомому базисі $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ таке

$$\xi^0(\mu,\theta)=\xi_1^0(\mu,\theta)\mathbf{e}_1+\xi_2^0(\mu,\theta)\mathbf{e}_2^0+\xi_3^0(\mu,\theta)\mathbf{e}_3^0 .$$

Підставивши (9), (14) в (15), находимо компоненти рухомого аксоїда у вигляді

$$\xi_1^0(\mu,\theta)=\left[\frac{\mu}{\Omega(\theta)}-\frac{a_0}{\Omega^2(\theta)}\frac{n_0(\theta)}{J_0}\right]\Omega_1(\theta),$$

$$\xi_2^0(\mu,\theta)=\left[\frac{\mu}{\Omega(\theta)}-\frac{a_0}{\Omega^2(\theta)}\frac{n_0(\theta)}{J_0}\right]\Omega_2(\theta), \qquad (16)$$

$$\xi_3^0(\mu,\theta)=a_0+\left[\frac{\mu}{\Omega(\theta)}-\frac{a_0}{\Omega^2(\theta)}\frac{n_0(\theta)}{J_0}\right]\frac{n_0(\theta)}{J_0},$$

де

$$\Omega^2(\theta)=\Omega_1^2(\theta)+\Omega_2^2(\theta)+n_0^2(\theta)/J_0^2 . \qquad (17)$$

Введемо функцію

$$F(\mu,\theta)=\frac{\mu}{\Omega(\theta)}-\frac{a_0}{\Omega^2(\theta)}\frac{n_0(\theta)}{J_0}, \qquad (18)$$

внесемо співвідношення (2), (6), (10), в (16)-(18), отримаємо

$$\xi_1^0(\mu,\theta)=\frac{2\mu_*}{\mu_*+\lambda^2-1}F(\mu,\theta)\kappa(\theta),$$

$$\xi_2^0(\mu,\theta)=-\frac{C}{B\lambda\left(1-\lambda^2\right)}F(\mu,\theta)\cos(\lambda\theta+\beta),$$

$$\xi_3^0(\mu,\theta)=-\frac{C}{B\left(1-\lambda^2\right)}F(\mu,\theta)\sin(\lambda\theta+\beta)+a_0 ,$$

де

$$F(\mu,\theta)=\frac{\mu}{\Omega(\theta)}-\frac{a_0}{\Omega^2(\theta)}\frac{C}{B\left(1-\lambda^2\right)}\sin(\lambda\theta+\beta),$$

$$\Omega^2(\theta)=1/B^2\left(\mu^2+2\mu\lambda^2+\lambda^4-\lambda^2\right)^2\times\times\left\{\mu^2g^2+\frac{C}{\left(1-\lambda^2\right)^2}\left(\mu+\lambda^2-1\right)\left(\mu+\lambda^2\right)\times\right\}\{\ \}-$$
$$-\frac{C^2\lambda^2\left(\mu+\lambda^2-1\right)^2\cos^2(\lambda\theta+\beta)}{B^2\left(1-\lambda^2\right)^2\lambda^2\left(\mu^2+2\mu\lambda^2+\lambda^4-\lambda^2\right)},$$

а $\kappa(\theta)$ визначено в (12).

Для побудови нерухомого аксоїда тіла S_0 скористаємося рівнянням

$$\boldsymbol{\zeta}^0(\mu,\theta)=\mathbf{r}_*+\boldsymbol{\xi}^0(\mu,\theta)=\mathbf{r}_*+\mu\frac{\boldsymbol{\Omega}_*}{\Omega_*}+\frac{\boldsymbol{\Omega}_*\times\mathbf{V}}{\Omega_*^2}$$

, де вектор $\mathbf{r}_*$ визначений співвідношенням (13).

Цей аксоїд повинен бути записаний у нерухомому базисі. Для цього спочатку введемо циліндричну систему координат [10] $\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\rho^0\mathbf{e}_\gamma^0$

$$\mathbf{e}_\nu=\frac{\mathbf{g}}{g}, \qquad \mathbf{e}_\rho^0=\frac{g\,\boldsymbol{\Omega}_*-\Omega_\nu\mathbf{g}}{g\,\Omega_\rho},$$

$$\mathbf{e}_\gamma^0=\frac{\mathbf{g}\times\boldsymbol{\Omega}_*}{g\,\Omega_\rho},$$

де $\Omega_\nu=(\boldsymbol{\Omega}_*\cdot\mathbf{g})/g$, $\Omega_\rho^2=\Omega_*^2-\Omega_\nu^2$.

Нерухомий базис $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ пов'язаний із циліндричною системою координат $\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\rho^0\mathbf{e}_\gamma^0$

$$\mathbf{E}_1=\mathbf{e}_\nu ,$$
$$\mathbf{E}_2=\mathbf{e}_\rho^0\cos\gamma-\mathbf{e}_\gamma^0\sin\gamma , \qquad (21)$$
$$\mathbf{E}_3=\mathbf{e}_\rho^0\sin\gamma+\mathbf{e}_\gamma^0\cos\gamma .$$

Віднесемо вектор $\mathbf{g}$ до напіврухомого базису $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$: $\mathbf{g}=G_1\mathbf{e}_1+G_2^0\mathbf{e}_2^0+G_3^0\mathbf{e}_3^0$.

З огляду на співвідношення

$$\mathbf{e}_2^0=\mathbf{e}_2\cos\theta+\mathbf{e}_3\sin\theta ,$$

$$\mathbf{e}_3^0=-\mathbf{e}_2\sin\theta+\mathbf{e}_3\cos\theta ,$$

для компонентів G_2^0, G_3^0 отримаємо вирази

$$G_2^0=(A_0+J)\,\Omega_2 ,$$
$$G_3^0=(J+J_0)n_0/J_0 . \qquad (22)$$

Кут γ знайдемо з рівняння $\gamma^{\bullet} = \dfrac{\mathbf{g} \bullet \left(\mathbf{\Omega}_* \times \mathbf{\Omega}^{\bullet}{}_*\right)}{g\,\Omega_\rho^2}$,

$$g\,\Omega_\rho^2 \gamma' = \Omega_1'\left(G_2^0 n_0 / J_0 - G_3^0 \Omega_2\right) + \Omega_2' \times \times \left(G_3^0 \Omega_1 - G_1 n_0 / J_0\right) + n_0'\left(G_1 \Omega_2 - G_2^0 \Omega_1\right) / J_0. \quad (23)$$

Вносимо співвідношення (2), (10), (12), (22) в (23) і в $\Omega_\nu = \mathbf{\Omega}_* \cdot \mathbf{g}/g$, $\Omega_\rho^2 = \Omega_*^2 - \Omega_\nu^2$ знаходимо

$$g\,\Omega_\nu = \frac{1}{\left(A_0^2 + 2A_0 J - JJ_0\right)} \times \times \left[A_0 g^2 + \frac{J + J_0}{J_0^2}(A + J)(A_0 - J_0)C^2 \right], \quad (24)$$

$$g^2 \Omega_\rho^2 = \frac{(A_0 - J_0)^2 (A_0 + J)^2 C^2}{\left(A_0^2 + 2A_0 J - JJ_0\right)^2 J_0^2} \times \times \left[g^2 - \frac{(J + J_0)^2 C^2}{J_0^2} \right] - \quad (25)$$
$$- \frac{(A_0 - J_0)^2 g^2}{\left(A_0^2 + 2A_0 J - JJ_0\right)} \frac{J}{(J + J_0)} \Omega_2^2,$$

$$g\,\Omega_\rho^2 \kappa \gamma' = -\frac{(A_0 - J_0)^2 (A_0 + J) C^2}{2\left(A_0^2 + 2A_0 J + JJ_0\right)^2 J_0^2} \times \times \left[g^2 - \frac{(J + J_0)^2 C^2}{J_0^2} \right] + \frac{(A_0 - J_0)^2}{2\left(A_0^2 + 2A_0 J - JJ_0\right)^2} \times \quad (26)$$
$$\left[\frac{A_0 J}{J + J_0} g^2 + \frac{(A_0 - J_0)(A_0 + J) J C^2}{J_0^2} \right] \Omega_2^2.$$

Введемо сталі

$$M_0 = -\frac{(A_0 - J_0)^2 J g^2}{\left(A_0^2 + 2A_0 J - JJ_0\right)(J + J_0)},$$

$$M_1 = \frac{(A_0 - J_0)^2 (A_0 + J)^2 C^2}{\left(A_0^2 + 2A_0 J - JJ_0\right)^2 J_0^2} \left| g^2 - \frac{(J + J_0)^2}{J_0^2} C^2 \right|$$
,

$$M_2 = -\frac{(A_0 - J_0)^2}{\left(A_0^2 + 2A_0 J - JJ_0\right)^2} \times \times \left[\frac{A_0 J}{J + J_0} g^2 + \frac{(A_0 - J_0)(A_0 + J) J C^2}{J_0^2} \right],$$

$$M_3 = \frac{(A_0 - J_0)^2 (A_0 + J) C^2}{\left(A_0^2 + 2A_0 J - JJ_0\right)^2 J_0^2} \left| g^2 - \frac{(J + J_0)^2}{J_0^2} C^2 \right|$$
.

і запишемо (26) у вигляді рівняння

$$\gamma'(-2\kappa) = g \frac{M_2 \Omega_2^2 + M_3}{M_0 \Omega_2^2 + M_1},$$

з якого маємо представлення для кута γ

$$\gamma = \nu^* t - B_0 \int \frac{d\theta}{\kappa(\theta)\left[M_0 \Omega_2^2(\theta) + M_1\right]}, \quad (27)$$

де

$$\nu = -g \frac{(J + J_0)}{2\left(A_0^2 + 2A_0 J - JJ_0\right)} \times \times \left[\frac{A_0}{J + J_0} + \frac{(A_0 - J_0)(A_0 + J) C^2}{g^2 J_0^2} \right],$$

$$B_0 = \frac{g (A_0 - J_0)^3 (A_0 + J) C^2}{2\left(A_0^2 + 2A_0 J - JJ_0\right)^3 J_0^2} \left[g^2 - \frac{(J + J_0)^2}{J_0^2} C^2 \right] \times \times \left[J - \frac{(A_0 + J)^2 (J + J_0) C^2}{J_0^2 g^2} \right].$$

З (27) слідує, що залежність γ від θ істотно спрощується, якщо коефіцієнт B_0 звертається в нуль. Це можливо в трьох випадках

$A_0 - J_0 = 0$,

$g^2 - (J + J_0)^2 C^2 / J_0^2 = 0$,

$J - (A_0 + J)^2 (J + J_0) C^2 / J_0^2 g^2 = 0$.

Перший з них означає, що тіло S_0 сферично симетрично, а обмеженням (1) ми виключили цей варіант. Друга умова, як вказує (12), приведе до негативного значення для $\kappa^2(\theta)$. Тому залишається третій варіант, що є обмеженням на постійну інтегрування g^2:

$$g^2 = (A_0 + J_0)^2 C^2 / J_0^2 \lambda^2. \quad (28)$$

Тепер для кута γ маємо

$$\gamma = \nu^* t,$$
$$\nu^* = C / J_0 \lambda. \quad (29)$$

Обмеження (28) істотно спрощує $\kappa(\theta)$ і θ від часу t

$$2\kappa = \frac{A_0 - J_0}{A_0^2 + 2A_0 J - JJ_0} \times \times \sqrt{\frac{\left(A_0^2 + 2A_0 J - JJ_0\right)(J + J_0) C^2}{JJ_0^2}} \sin(\lambda\theta + \beta),$$
(30)

а тому що $d\theta/dt = -2\kappa$, то інтегруванням отримуємо $\mathrm{tg}(\lambda\theta + \beta)/2 = e^{-b^*(t - t_0)}$, де

$$b^* = -\frac{A_0 - J_0}{\sqrt{A_0^2 + 2A_0 J - JJ_0}} \frac{C}{J_0}.$$

Оскільки

$\sin(\lambda\theta+\beta)=1/\mathrm{ch}\, b^{*}(t-t_0)$,
$\cos(\lambda\theta+\beta)=\mathrm{th}\, b^{*}(t-t_0)$
за умови (28) можна представити всі основні змінні як явні функції часу t.

Як показують співвідношення (16), праву частину (15) можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{\xi}^0(\mu,\theta)=-\mathbf{r}_*(\theta)+F(\mu,\theta)\boldsymbol{\Omega}_*(\theta).$$

Підставивши цей вираз в рівняння нерухомого аксоїда, знаходимо

$$\boldsymbol{\zeta}^0(\mu,\theta)=F(\mu,\theta)\boldsymbol{\Omega}_*(\theta).$$

Вектор $\boldsymbol{\Omega}_*(\theta)$ у нерухомій системі координат має вигляд

$$\boldsymbol{\Omega}_*(\theta)=\Omega_\nu\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2\Omega_\rho\cos\gamma+\mathbf{E}_3\Omega_\rho\sin\gamma. \quad (31)$$

Тепер запишемо компоненти аксоїда $\boldsymbol{\zeta}^0(\mu,\theta)$ в нерухомій системі координат $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$

$$\delta_1^0(\mu,\theta)=F(\mu,\theta)\Omega_\nu,$$
$$\delta_2^0(\mu,\theta)=F(\mu,\theta)\Omega_\rho\cos\gamma, \quad (32)$$
$$\delta_3^0(\mu,\theta)=F(\mu,\theta)\Omega_\rho\sin\gamma,$$

у якій $F(\mu,\theta),\ \Omega_\nu,\ \Omega_\rho,\ \gamma$ визначені співвідношеннями (20), (24), (25), (27), (29).

При русі рухомий аксоїд (16) котиться по нерухомому аксоїду (32) без ковзання, оскільки скалярний добуток $\boldsymbol{\Omega}_*\cdot\mathbf{V}$ дорівнює нулю.

Рівняння рухомого аксоїда тіла S має вигляд

$$\xi(\mu,\theta)=\mu\frac{\omega(\theta)}{\omega(\theta)}+\frac{\omega(\theta)\times V(\theta)}{\omega^2(\theta)},$$

де кутова швидкість $\boldsymbol{\omega}_*(\theta)$ тіла S в незмінно пов'язаному з тілом базисі задана співвідношенням (8), а швидкість шарніра –

$$\mathbf{V}(\theta)=-a\left(\omega_2(\theta)\mathbf{e}_1-\omega_1(\theta)\mathbf{e}_2\right)-$$
$$-a_0\left(\Omega_2(\theta)\mathbf{e}_1-\Omega_1(\theta)\mathbf{e}_2^0\right).$$

Знаходимо формули зворотних переходів між базисними векторами:

$$e_2=e_2^0\cos\theta-e_3^0\sin\theta,\quad e_3=e_2^0\sin\theta+e_3^0\cos\theta.$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}_*$ в напіврухомому базисі $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ має вигляд:

$$\omega(\theta)=\omega_1 e_1+\Omega_2 e_2^0+\frac{n_0}{J_0}e_3^0,$$

який з урахуванням виразу $\Omega_1-\omega_1=\theta^{\bullet}$, запишемо

$$\omega=\Omega-\theta\, e_1. \quad (33)$$

Підставляючи (33), (14) у вираз швидкості точки **O:** $\mathbf{V}=-a(\omega_2\mathbf{e}_1-\omega_1\mathbf{e}_2)$ та з огляду на (13), отримаємо спочатку таке подання

$$\xi(\mu,\theta)=-r-a_0\frac{n_0}{J_0}\frac{\Omega}{\omega^2}+a_0\frac{\omega_1\theta}{\omega^2}e_3^0, \quad (34)$$

яке в базисі $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ має вигляд

$$\xi(\mu,\theta)=\xi_1(\mu,\theta)e_1+\xi_2(\mu,\theta)e_2^0+\xi_3(\mu,\theta)e_3^0.$$

Його компоненти з урахуванням на (33) – (35) і $G_3(\theta)=(A_0+J)\Omega_2(\theta)\sin\theta+(J+J_0)n_0(\theta)\cos\theta/J_0$ такі

$$\xi_1(\mu,\theta)=\left(\frac{\mu}{\omega_*}-\frac{a_0\ n_0}{\omega_*^2\ J_0}\right)\omega_1(\theta)+\frac{2a_0 n_0(\theta)}{\omega_*^2\ J_0},$$

$$\xi_2(\mu,\theta)=\left(\frac{\mu}{\omega_*}-\frac{a_0\ n_0}{\omega_*^2\ J_0}\right)\omega_2(\theta)-$$
$$-a_0\left[1-\frac{2\omega_1(\theta)\,\kappa(\theta)}{\omega_*^2(\theta)}\right]\sin\theta, \quad (36)$$

$$\xi_3(\mu,\theta)=\left(\frac{\mu}{\omega_*}-\frac{a_0\ n_0}{\omega_*^2\ J_0}\right)\frac{n(\theta)}{J}+$$
$$+a_0\left[1-\frac{2\omega_1(\theta)\,\kappa(\theta)}{\omega_*^2(\theta)}\right]\cos\theta,$$

де $\omega_1(\theta),\ \omega_2(\theta),\ n_0(\theta),\ n(\theta),\ \kappa(\theta)$ задані відповідно (11), (2) – (4), (30).

Нерухомий аксоїд тіла S має вигляд

$$\delta(\mu,\theta)=r+\mu\frac{\omega}{\omega}+\frac{\omega\times V}{\omega^2}=r+\xi(\mu,\theta).$$

Цей вектор повинен бути записаний у нерухомому базисі $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$. Підставляючи співвідношення (34), отримаємо

$$\delta(\mu,\theta)=-a_0\frac{n_0(\theta)}{J_0}\frac{\Omega(\theta)}{\omega^2(\theta)}+a_0\frac{\omega_1(\theta)\theta}{\omega^2(\theta)}e_3^0. \quad (37)$$

Тому що вектор $\boldsymbol{\Omega}_*$ уже заданий у просторі $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ поданням (31), то виразивши $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2^0$, $\mathbf{e}_3^0$ через $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, отримаємо з урахуванням (37) розкладання вектора $\boldsymbol{\zeta}(\mu,\theta)$ в базисі $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$

$$\boldsymbol{\zeta}(\mu,\theta)=\delta_1(\mu,\theta)\mathbf{E}_1+\delta_2(\mu,\theta)\mathbf{E}_2+\delta_3(\mu,\theta)\mathbf{E}_3. \quad (38)$$

З огляду на

$$\mathbf{e}_\nu=\frac{\mathbf{g}}{g},\quad \mathbf{e}_\rho^0=\frac{g\boldsymbol{\Omega}_*-\Omega_\nu\mathbf{g}}{g\Omega_\rho},\quad \mathbf{e}_\alpha^0=\frac{\mathbf{g}\times\boldsymbol{\Omega}_*}{g\Omega_\rho},$$

знайдемо матрицю вкладення базису $\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\rho^0\mathbf{e}_\gamma^0$ в базис $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$

$$\mathbf{e}_\nu=\frac{G_1}{g}\mathbf{e}_1+\frac{G_2^0}{g}\mathbf{e}_2^0+\frac{G_3^0}{g}\mathbf{e}_3^0,$$

$$\mathbf{e}_\rho^0 = \frac{g\Omega_1 - \Omega_\nu G_1}{g\Omega_\rho}\mathbf{e}_1 + \frac{g\Omega_2 - \Omega_\nu G_2^0}{g\Omega_\rho}\mathbf{e}_2^0 + ,$$

$$+\frac{g\, n_0/J_0 - \Omega_\nu G_3^0}{g\Omega_\rho}\mathbf{e}_3^0$$

$$\mathbf{e}_\gamma^0 = \frac{G_2^0\, n_0/J_0 - G_3^0\Omega_2}{g\,\Omega_\rho}\mathbf{e}_1 + \frac{G_3^0\Omega_1 - G_1\, n_0/J_0}{g\,\Omega_\rho}\mathbf{e}_2^0 +$$

$$+\frac{G_1\Omega_2 - G_2^0\Omega_1}{g\,\Omega_\rho}\mathbf{e}_3^0$$

і звідси маємо

$$\mathbf{e}_1 = \frac{G_1}{g}\mathbf{e}_\nu + \frac{g\Omega_1 - \Omega_\nu G_1}{g\Omega_\rho}\mathbf{e}_\rho^0 + \frac{G_2^0\, n_0/J_0 - G_3^0\Omega_2}{g\Omega_\rho}\mathbf{e}_\gamma^0,$$

$$\mathbf{e}_2^0 = \frac{G_2^0}{g}\mathbf{e}_\nu + \frac{g\Omega_2 - \Omega_\nu G_2^0}{g\Omega_\rho}\mathbf{e}_\rho^0 + \frac{G_3^0\Omega_1 - G_1\, n_0/J_0}{g\Omega_\rho}\mathbf{e}_\gamma^0,$$

$$\mathbf{e}_3^0 = \frac{G_3^0}{g}\mathbf{e}_\nu + \frac{g\, n_0/J_0 - \Omega_\nu G_3^0}{g\Omega_\rho}\mathbf{e}_\rho^0 + \frac{G_1\Omega_2 - G_2^0\Omega_1}{g\Omega_\rho}\mathbf{e}_\gamma^0$$

.Використовуючи зв'язок між базисами $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ й $\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\rho^0\mathbf{e}_\gamma^0$ (21), отримуємо

$$\mathbf{e}_1 = \frac{G_1}{g}\mathbf{E}_1 + \left(\frac{g\Omega_1 - g\Omega_\nu G_1}{g\Omega_\rho}\cos\gamma - \frac{G_2^0\, n_0/J_0 - G_3^0\Omega_2}{g\Omega_\rho}\sin\gamma\right)\mathbf{E}_2 + \left(\frac{g\Omega_1 - \Omega_\nu G_1}{g\Omega_\rho}\sin\gamma + \frac{G_2^0\, n_0/J_0 - G_3^0\Omega_2}{g\Omega_\rho}\cos\gamma\right)\mathbf{E}_3,$$

$$\mathbf{e}_2^0 = \frac{G_2^0}{g}\mathbf{E}_1 + \left(\frac{g\Omega_2 - \Omega_\nu G_2^0}{g\Omega_\rho}\cos\gamma - \frac{G_3^0\Omega_1 - G_1 n_0/J_0}{g\Omega_\rho}\sin\gamma\right)\mathbf{E}_2 + \left(\frac{g\Omega_2 - \Omega_\nu G_2^0}{g\Omega_\rho}\sin\gamma + \frac{G_3^0\Omega_1 - G_1\, n_0/J_0}{g\Omega_\rho}\cos\gamma\right)\mathbf{E}_3, \quad (39)$$

$$\mathbf{e}_3^0 = \frac{G_3^0}{g}\mathbf{E}_1 + \left(\frac{g\, n_0/J_0 - \Omega_\nu G_3^0}{g\Omega_\rho}\cos\gamma - \frac{G_1\Omega_2 - G_2^0\Omega_1}{g\Omega_\rho}\sin\gamma\right)\mathbf{E}_2 + \left(\frac{g\, n_0/J_0 - \Omega_\nu G_3^0}{g\Omega_\rho}\sin\gamma + \frac{G_1\Omega_2 - G_2^0\Omega_1}{g\Omega_\rho}\cos\gamma\right)\mathbf{E}_3.$$

Підставив (31), (39) в (37) з урахуванням (38), визначаємо компоненти вектора $\zeta(\mu,\theta)$ в нерухомому базисі $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$.

$$\delta_1(\mu,\theta) = \left(\frac{\mu}{\omega_*} - \frac{a_0\, n_0}{\omega_*^2\, J_0}\right)\Omega_\nu + \mu\frac{2\kappa\, G_1}{\omega_* g} - a_0\frac{2\omega_1\kappa\, G_3^0}{\omega_*^2 g}$$

$$\delta_2(\mu,\theta) = \left(\frac{\mu}{\omega_*} - \frac{a_0\, n_0}{\omega_*^2\, J_0}\right)\Omega_\rho\cos\gamma + \mu\frac{2\kappa}{\omega_*}\left(\frac{g\Omega_1 - \Omega_\nu G_1}{g\Omega_\rho}\cos\gamma - \frac{G_2^0\, n_0/J_0 - G_3^0\Omega_2}{g\Omega_\rho}\sin\gamma\right) - a_0\frac{2\omega_1\kappa}{\omega_*^2}\left(\frac{g\, n_0/J_0 - \Omega_\nu G_3^0}{g\Omega_\rho}\cos\gamma - \frac{G_1\Omega_2 - G_2^0\Omega_1}{g\Omega_\rho}\sin\gamma\right), \quad (40)$$

$$\delta_3(\mu,\theta) = \left(\frac{\mu}{\omega} - \frac{a_0\, n_0}{\omega^2\, J_0}\right)\Omega_\rho\sin\gamma + \mu\frac{2\kappa}{\omega}\left(\frac{g\Omega_1 - \Omega_\nu G_1}{g\Omega_\rho}\sin\gamma + \frac{G_2^0 n_0/J_0 - G_3^0\Omega_2}{g\Omega_\rho}\cos\gamma\right) - a_0\frac{2\omega_1\kappa}{\omega^2}\left(\frac{g n_0/J_0 - \Omega_\nu G_3^0}{g\Omega_\rho}\sin\gamma + \frac{G_1\Omega_2 - G_2^0\Omega_1}{g\Omega_\rho}\cos\gamma\right),$$

де кут γ задано співвідношенням (27).

При русі рухомий аксоїд (36) котиться по нерухомому аксоїду (40), кочення супроводжується ковзанням уздовж загальної утворюючої зі швидкістю:

$$-\frac{a_0}{\omega_*}\left[\omega_1(\theta)\Omega_2(\theta) - \Omega_1(\theta)\Omega_2(\theta)\right] = \frac{2a_0\Omega_2(\theta)\kappa(\theta)}{\omega_*(\theta)}.$$

При візуалізації руху тіла S_0 необхідна ортогональна матриця вкладення E_{ij}^0 незмінно пов'язаного з тілом S_0 базису $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ з нерухомим базисом $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$

$$\mathbf{e}_1 = E_{11}^0\mathbf{E}_1 + E_{12}^0\mathbf{E}_2 + E_{13}^0\mathbf{E}_3,$$

$$\mathbf{e}_2^0 = E_{21}^0\mathbf{E}_1 + E_{22}^0\mathbf{E}_2 + E_{23}^0\mathbf{E}_3,$$

$$\mathbf{e}_3^0 = E_{31}^0\mathbf{E}_1 + E_{32}^0\mathbf{E}_2 + E_{33}^0\mathbf{E}_3.$$

Співвідношення для E_{ij}^0 маємо з (39)

$$E_{11}^0 = \frac{G_1}{g},$$

$$E_{12}^0 = \frac{g\Omega_1 - \Omega_\nu G_1}{g\Omega_\rho}\cos\gamma - \frac{G_2^0\, n_0/J_0 - G_3^0\Omega_2}{g\Omega_\rho}\sin\gamma$$

$$E_{13}^0 = \frac{g\Omega_1 - \Omega_\nu G_1}{g\Omega_\rho}\sin\gamma + \frac{G_2^0\, n_0/J_0 - G_3^0\Omega_2}{g\Omega_\rho}\cos\gamma,$$

$$E_{21}^0 = \frac{G_2^0}{g},$$

$$E_{22}^0 = \frac{g\Omega_2 - \Omega_\nu G_2^0}{g\Omega_\rho}\cos\gamma - \frac{G_3^0\Omega_1 - G_1\, n_0/J_0}{g\Omega_\rho}\sin\gamma,$$

$$E_{23}^0 = \frac{g\Omega_2 - \Omega_\nu G_2^0}{g\Omega_\rho}\sin\gamma + \frac{G_3^0\Omega_1 - G_1 n_0/J_0}{g\Omega_\rho}\cos\gamma,$$

$$E_{31}^0 = \frac{G_3^0}{g},$$

$$E_{32}^0 = \frac{g\,n_0/J_0 - \Omega_\nu G_3^0}{g\Omega_\rho}\cos\gamma - \frac{G_1\Omega_2 - G_2^0\Omega_1}{g\Omega_\rho}\sin\gamma, \qquad (41)$$

$$E_{33}^0 = \frac{g\,n_0/J_0 - \Omega_\nu G_3^0}{g\Omega_\rho}\sin\gamma + \frac{G_1\Omega_2 - G_2^0\Omega_1}{g\Omega_\rho}\cos\gamma,$$

де вирази, що стоять у чисельниках, дорівнюють

$$g\Omega_1 - \Omega_\nu G_1 = -2\kappa(A_0 + J)(J + J_0)C^2 / gJ_0^2,$$

$$G_2^0 n_0/J_0 - G_3^0\Omega_2 = (A_0 - J_0)\Omega_2 n_0/J_0,$$

$$g\Omega_2 - \Omega_\nu G_2^0 = \frac{\Omega_2(A_0 - J_0)}{\left(A_0^2 + 2A_0J - JJ_0\right)}\times \left[Jg - \frac{(J+J_0)(A_0+J)^2 C^2}{gJ_0^2}\right],$$

$$G_3^0\Omega_1 - G_1 n_0/J_0 = -2(A_0 + J)\kappa n_0/J_0,$$

$$g\,n_0/J_0 - \Omega_\nu G_3^0 = \frac{(A_0 - J_0)(A_0 + J)}{\left(A_0^2 + 2A_0J - JJ_0\right)} \left[g - \frac{(J+J_0)^2}{gJ_0^2}C^2\right]\frac{n_0}{J_0},$$

$$G_1\Omega_2 - G_2^0\Omega_1 = 2J\kappa\kappa_2,$$

а $n_0(\theta)$, $\Omega_2(\theta)$, $\kappa(\theta)$, $g\,\Omega_\rho(\theta)$, γ, G_1, G_2^0, G_3^0 відповідно визначені співвідношеннями (2), (6), (12), (25), (27), (22).

Для візуалізації руху тіла S необхідна матриця вкладення E_{ij}, що зв'язує базиси $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ й $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$. Це легко отримати, з огляду на вираз (39):

$$\begin{aligned} e_2 &= \left(E_{21}^0E_1 + E_{22}^0E_2 + E_{23}^0E_3\right)\cos\theta - \\ &-\left(E_{31}^0E_1 + E_{32}^0E_2 + E_{33}^0E_3\right)\sin\theta, \\ e_3 &= \left(E_{21}^0E_1 + E_{22}^0E_2 + E_{23}^0E_3\right)\sin\theta + \\ &+\left(E_{31}^0E_1 + E_{32}^0E_2 + E_{33}^0E_3\right)\cos\theta. \end{aligned} \qquad (42)$$

Матриця вкладення має вигляд

$$E_{1j} = E_{1j}^0, \qquad E_{2j} = E_{2j}^0\cos\theta - E_{3j}^0\sin\theta,$$

$$E_{3j} = E_{2j}^0\sin\theta + E_{3j}^0\cos\theta.$$

Компоненти матриць E_{ij}^0, E_{ij}, як слідує з (41), (42), залежать від $G_1(\theta)$, $G_2^0(\theta)$, $G_3^0(\theta)$, $\Omega_\nu(\theta)$, $\Omega_\rho(\theta)$, $\Omega_1(\theta)$, $\Omega_2(\theta)$, $n_0(\theta)/J_0$, тобто від величин, що характеризують тіло S_0.

Необхідно також мати рівняння траєкторії точки O в нерухомому базисі. Для цього в співвідношення (13) підставимо $\mathbf{e}_3^0$ з (39)

$$\mathbf{r}_* = x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + z\mathbf{E}_3,$$

де $x = -a_0\dfrac{(J+J_0)\,n_0(\theta)}{g\quad J_0}$,

$$y = -a_0\left\{\frac{(A_0 - J_0)(A_0 + J)}{\left(A_0^2 + 2A_0J - JJ_0\right)}\left[g^2 - \frac{(J+J_0)^2}{J_0^2}C^2\right]\times \frac{n_0(\theta)}{J_0 g^2\Omega_\rho}\cos\gamma - \right\}2\frac{J\,\kappa(\theta)\Omega_2(\theta)}{g\,\Omega_\rho}\sin\gamma, \qquad (43)$$

$$z = -a_0\left\{\frac{(A_0 - J_0)(A_0 + J)}{\left(A_0^2 + 2A_0J - JJ_0\right)}\left[g^2 - \frac{(J+J_0)^2}{J_0^2}C^2\right]\times \frac{n_0(\theta)}{J_0 g^2\Omega_\rho}\sin\gamma + \right\}2\frac{J\,\kappa(\theta)\Omega_2(\theta)}{g\,\Omega_\rho}\cos\gamma.$$

Це параметричні рівняння кривої, що лежить на сфері

$$x^2 + y^2 + z^2 = a_0^2.$$

Швидкість точки O - $\mathbf{V}$ у нерухомому базисі має вигляд

$$V = r = x\ E_1 + y\ E_2 + z\ E_3,$$

де x, y, z задані співвідношеннями (43).

Таким чином, отримані рівняння рухомих і нерухомих аксоїдів тіл S і S_0 для варіанта (1) – це рівняння (36), (40) для тіла S й рівняння (19), (32) для тіла S_0. Ці рівняння містять величини $\kappa(\theta)$, $\Omega_2(\theta)$, $n_0(\theta)$, $\Omega^2(\theta)$, мають вигляд (12), (6), (2), (17).

Висновки та напрямок подальших досліджень

У роботі [2] було знайдено частинний розв'язок задачі про рух двох гіроскопів Лагранжа, з'єднаних неголономним шарніром. Для побудови повного рішення необхідно було знайти рівняння рухомих і нерухомих аксоїдів для кожного з тіл системи. У цій роботі повне рішення знайдене, воно представлено коченням незмінно пов'язаної з тілом лінійчатої поверхні по нерухомій у просторі лінійчатій поверхні. У подальшому потрібно реалізувати комп'ютерну візуалізацію руху.

Список літератури

1. Лесина М. Е. Движение по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром / М. Е. Лесина, А. П. Харламов // Механика твердого тела. – 1995. – Вып. 27. – С.15-21.

2. Гоголєва Н.Ф. Новий випадок інтегрованості для одного класу руху за інерцією двох гіроскопів Лагранжа, з'єднаних неголономним шарніром / Н.Ф. Гоголєва // Наукові праці ДонНТУ. Серія: Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка. №1 (24) – Покровськ, 2017. – С.64-68.

3. Харламов А.П., Харламов М.П. Неголономный шарнир // Механика твердого тела. – 1995. – Вып. 27. – С. 1–7.

4. Харламов П. В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 28, № 3. – С. 502-507.

5. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела / П. В. Харламов – Новосибирск : Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1965. – 221 с.

6. Харламов П. В. Очерки об основаниях механики. Мифы, заблуждения и ошибки // П. В. Харламов – К. : Наук. думка, 1995. – 407 с.

7. Харламов М. П. О построении аксоидов пространственного движения твердого тела / М. П. Харламов // Механика твердого тела. – 1980. – Вып. 12. – С. 3-8.

8. Харламов М. П. О построении годографов угловой скорости тела, имеющего неподвижную точку / М. П. Харламов // Механика твердого тела. – 1981. – Вып. 13. – С. 10-14.

9. Лесина М. Е. Точные решения двух новых задач аналитической динамики систем сочлененных тел / М. Е. Лесина – Донецк : ДонГТУ, 1996. – 238 с.

10. Гоголева Н.Ф. Уравнения аксоидов задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром/ Гоголева Н.Ф., Зиновьева Я.В. // Механика твердого тела. – 2012. – Вып.42. – С. 202–212.

References

1. Lesina, M. E., Harlamov, A.P. (1995), *The inertial motion of two Lagrange gyroscopes connected by a non-holonomic hinge* [Dvizhenie po inertsii dvuh giroskopov Lagranzha, soedinennyih negolonomnyim sharnirom], Mehanika tverdogo tela, 1995, No 27, pp.15-21.

2. Gogoleva N.F. (2017), New case of integrability for one class of interial motions of two Lagrande gyroscopes connected with a nonholonomic hinge, [Naukoví pratsí Donets'kogo natsíonal'nogo tekhníchnogo uníversitetu. Seríya : Informatyka, kibernetyka ta obchyslyuval′na tekhnika]. №1 (24) – Pokrovs′k, 2017. – pp.64-68.

3. Harlamov, A.P., Harlamov, M.P. (1995), *Nonholonomic hinge* [Negolonomnyiy sharnir], Mehanika tverdogo tela, No. 27, pp. 1–7.

4. Kharlamov PV (1964), Kinematic interpretation of the motion of a body having a fixed point [Kinematicheskoye istolkovaniye dvizheniya tela, imeyushchego nepodvizhnuyu tochku]. Applied Mathematics and Mechanics. - 1964. - V. 28, № 3. - pp. 502-507.

5. Kharlamov PV (1965) Lectures on the dynamics of a rigid body, [Lektsii po dinamike tverdogo tela]. Novosibirsk: Izd. Novosib. state. University, 1965. - 221 p.

6. Kharlamov PV (1995) Essays on the foundations of mechanics. Myths, errors and mistakes. [Ocherki ob osnovaniyakh mekhaniki]. K.: Science. dumka, 1995. - 407 p.

7. Kharlamov MP (1980) On the construction of axoids of the spatial motion of a rigid body, [O postroyenii aksoidov prostranstvennogo dvizheniya tverdogo tela] . Mechanics of a rigid body. - 1980. - No. 12. - P. 3-8.

8. Kharlamov, MP. (1981) On the construction of hodographs of the angular velocity of a body having a fixed point,[O postroyenii godografov uglovoy skorosti tela, imeyushchego nepodvizhnuyu tochku]., Mechanics of a rigid body. - 1981. - No. 13. - pp. 10-14.

9. Lesina, M.E. (1996) Exact solutions of two new problems of the analytic dynamics of systems of articulated bodies.[Tochnyye resheniya dvukh novykh zadach analiticheskoy dinamiki sistem sochlenennykh tel]. Donetsk: DonSTU, 1996.-238 p.

10. Gogoleva N.F., Zinov'yeva YA.V. (2012), Equations of the axoids of the problem of the motion of two Lagrange gyroscopes connected by a nonholonomic hinge .[Uravneniya aksoidov zadachi o dvizhenii dvukh giroskopov Lagranzha, soyedinennykh negolonomnym sharnirom] Mechanics of a solid body. - 2012. - No 42. - pp. 202-212.

Надійшла до редакції 10.11.2017

Н.Ф. ГОГОЛЕВА
Донецкий национальный технический университет (Украина)

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ТОЛКОВАНИЕ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА, СОЕДИНЕННЫХ НЕГОЛОНОМНЫМ ШАРНИРОМ

Основной целью при построении точного решения системы дифференциальных уравнений остается получение полной информации о всех особенностях этого движения. В некоторых случаях полученные решения позволяют установить, как тело ориентировано в пространстве и где оно находится в данный момент времени. Основная теорема кинематики (движение тела воспроизводится качением неизменно связанной с телом линейчатой поверхности (подвижного аксоида) по неподвижной в пространстве линейчатой поверхности (неподвижному аксоиду)) позволяет достичь такого полного решения.

В данной работе получены уравнения аксоидов для каждого из тел системы. Найдены матрицы вложения неизменно связанных с телами базисов в неподвижный базис.

Ключевые слова: система гироскопов Лагранжа, неголономный шарнир, подвижный аксоид, неподвижный аксоид.

N.F. Gogoleva
Donetsk National Technical University

KINEMATICAL INTERPRETATION OF THE PARTIAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF MOTION OF TWO LAGRANGE GYROSCOPES CONNECTED WITH A NON-HOLONOMIC HINGE

The main goal of finding the exact solution of a system of differential equations is to obtain full information about all the features of this motion. In some cases, the solutions obtained allow us to establish how the body is oriented in space and where it is at a given time. The main theorem of kinematics (body motion is reproduced by rolling a ruled surface (loose axoid) invariably connected with the body along a fixed ruled surface (fixed axoid)) allows to find such a complete solution. In this paper, the axoid equations for each of the system's bodies have been obtained. The matrices of embedding bases invariably connected with the bodies in a fixed basis have been found.

Keywords: the system of Lagrange gyroscopes, non-holonomic hinge, moving axoids, fixed axoids.