

УДК 004.853

С. И. Вяткин, канд. техн. наук, с.н.с.<sup>1</sup>А.Н. Романюк, д-р техн. наук, проф.<sup>2</sup>А.В. Снигур, канд. техн. наук., доцент<sup>2</sup>Н.С. Костюкова, канд. техн. наук, доцент<sup>3</sup><sup>1</sup> Институт автоматизации и электротехники СО РАН<sup>2</sup> Винницкий национальный технический университет<sup>3</sup> Донецкий национальный технический университет

## Теоретико-множественные операции над свободными формами на основе управляющих сеток

*В данной работе описывается метод вычисления приближенных теоретико-множественных операций (объединение, пересечение, разность) свободных форм, ограниченных поверхностями подделения со множественными разрешениями. Представлены алгоритмы генерации управляющей сетки для аппроксимации поверхности, оптимизации и параметризации новых поверхностей по отношению к исходным поверхностям, описана подгонка новых поверхностей к геометрии исходных поверхностей. Алгоритмы направлены на минимизацию размера и оптимизацию управляющей сетки: исходные управляющие сетки модифицируются и изменяются только в районе пересечения.*

**Ключевые слова:** подделение поверхностей, поверхности со множественными разрешениями, геометрическое моделирование.

DOI: 10.31474/1996-1588-2019-1-28-12-18

### Введение

Логические операции являются естественным способом построения сложного твердого тела объекта из простых примитивов. Такой подход очень распространен в автоматизированном геометрическом дизайне. Искусственные объекты могут быть построены из простых частей, таких как цилиндры, прямоугольные блоки и сферы. Однако в большинстве случаев результат логических операций не может быть представлен точно. Чтобы избежать этой проблемы, следует использовать для представления объектов дерево логических операций. При таком представлении также необходима реализация различных алгоритмов. Такой подход называется конструктивной твердотельной геометрией (CSG) [1]. Однако для многих приложений подход CSG не является эффективным или подходящим, чаще всего приходится иметь дело с граничным представлением твердых тел (B-Rep), и булевы операции должны быть реализованы на основе этой базы. Такая реализация довольно трудна для B-Rep более высокого порядка, поскольку это требует выполнения операций вычисления пересечения параметрических поверхностей, разделения их на куски и построения новых поверхностей из этих частей. Существующие системы обычно рассматривают B-Rep как набор разрезанных сплайновых патчей, разделяющих границы. Границы отдельных патчей часто совпадают лишь приблизительно: трудно гарантировать, что две кривые в разных параметрических доменах идентичны в пространстве. Каждая операция

пересечения приводит к получению все более сложных и трудных для применения кривых, и к результирующим моделям применять гладкие деформации проблематично. Вычисления должны выполняться с особой тщательностью, чтобы избежать трещин, артефактов и т. д. Выполнение элементарной операции, необходимой для такого представления поверхности – вычисление пересечения двух NURBS патчей – превращается в сложную проблему. В результате логические операции часто выполняются медленно и не вполне надежно, хотя и известны случаи получения отличных результатов в твердотельном моделировании.

В работе [2] описан метод разбиения поверхностей. Метод предполагает, что для поверхностей разбиения должна быть изменена связность управляющей сетки, а новая поверхность должна быть параметризована. Однако нет необходимости объединять управляющие сетки двух отдельных поверхностей. В нашем случае нет необходимости использовать специальную комбинированную схему разбиения [3] для представления кривой пересечения. В работе [2] параметризация не оптимизируется.

Вопросы подгонки поверхностей решаются по-разному. В работе [4] разработана методика сглаживания

поверхностей разбиения. Метод [4] представляет собой конструкцию контрольной сетки для сглаживания двух поверхностей разбиения. Вопросы соответствия геометрии кривой пересечения и аппроксимации результатов булевых операций не учитываются. Поверхности разбиения обсуждаются также в [5] и [6].

При простоте выполнения логических операций для CSG объектов их визуализация требует значительных затрат, интерактивный рендеринг возможен только для простых объектов. С другой стороны, реализовать теоретико-множественные операции намного сложнее для мультиразрешающих поверхностей. Существует достаточно обширное исследование по твердотельному моделированию с B-Rep [7], в котором акцент делается на точности и правильной последовательной обработке вырожденных случаев. Для вычисления приближенных кривых пересечений используются методики с возмущениями [8]. Часть работы авторов по оптимизации параметризации строится на методах, использующих оптимизационные сетки [9]. Различные методы решения подобных задач были предложены в [10].

В данной статье рассматривается подход к вычислению результата булевых операций над B-Rep твердыми телами. Особенность заключается в представлении границы поверхности как кусочно-гладкой поверхности разбиения (для краткости назовем такие твердые тела свободными формами). Преимуществом данного представления является его простота: поверхность определяется управляющей сеткой с тегами углов. Такое представление автоматически гарантирует непрерывность и гладкость поверхности. Данные представления достаточно популярны, так как позволяют значительно упростить моделирование сложных объектов.

### Описание метода

Предлагаемая работа является модификацией методов эффективной визуализации объектов CSG, описанных в [11, 12]. Работа главным образом мотивирована требованиями приложений в компьютерной анимации и концептуальном дизайне. Целью является обеспечение быстрых и надежных расчетов, с возможностью сглаживания результатов выполнения булевых операций с деформациями свободной формы и другими видами поверхностных манипуляций. Эти цели кардинально меняют набор задач, которые необходимо решить. Пересечение поверхности с поверхностью, обычно рассматриваемое как центральная часть реализации булевых операций, становится вторичным. В частности, ослабляется требование того, чтобы топология кривых пересечения вычислялась точно, основной акцент делается на алгоритмах построения аппроксимирующих многообразных поверхностей. Вместо того, чтобы корректировать

представление к потребностям логических операций, например, путем введения кривых, используются кусочно-гладкие кривые правила разбиения [13] для получения представления четких элементов на мультиразрешающих поверхностях.

Основные шаги включают: построение грубой управляющей сетки для результата логической операции; определение и оптимизацию параметров результата разбиения; иерархическую подгонку для поверхности, параметризованной над другой поверхностью.

Авторы применяют булеву операцию (пересечение, разность или объединение) к двум твердотельным, заданным параметрически поверхностям (рис. 1), предполагая, что каждая из них является ориентируемой замкнутой поверхностью. Поверхность  $M$  этого типа разделяет пространство в ограниченный и неограниченный связанные объемы. Свободные формы, заданные  $M$  - это ограниченные объемы.

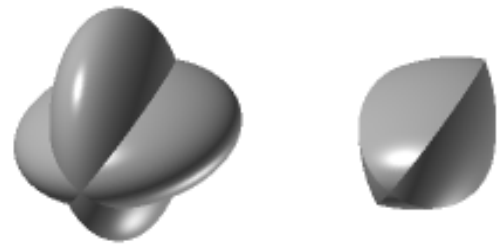


Рисунок 1 - Теоретико-множественные операции над объектами (слева – объединение, справа – пересечение)

Рассмотрим шаги решения задачи.

Шаг 1. Вычисление приближенной кривой пересечения, нахождение ее изображений в каждой из двух параметрических областей исходных поверхностей.

Шаг 2. Построение связанной управляющей сетки и начальная параметризация частей результирующей поверхности на домене исходных поверхностей.

Шаг 3. Оптимизация параметризации на исходном домене (оригинале).

Шаг 4. Определение геометрического положения опорных точек с использованием иерархической подгонки.

**Разбиение  
поверхностей** мультиразрешающих

Рассмотрим поверхности разбиения, уделяя особое внимание параметризации. Разбиение поверхности определяется начальной управляющей сеткой. Авторы используют вариант схемы разбиения для треугольных сеток с правилами для углов [13]. Мультиразрешающие поверхности расширяют поверхности разбиения путем ввода деталей на каждом уровне. Вычисление более тонкой сетки происходит путем добавления смещений деталей к более грубой сетке.

Процесс реконструкции поверхности от грубой сетки к детальной называют синтезом. Пусть  $S$  - оператор подделения (матричное сопоставление контрольных точек на более грубом уровне с более тонким уровнем); пусть  $p^l$  - вектор контрольных точек на уровне  $l$ ,  $d^{l+1}$  - коэффициенты для следующего уровня деления. Правило вычисления контрольных точек на более тонком уровне выглядит таким образом:

$$p^{l+1} = Sp^l + d^{l+1}.$$

Обратный процесс преобразования данных высокого разрешения к грубой сетке называется анализом. Для его выполнения должен быть известен способ получения грубой сетки из сетки высокого уровня.

**Параметризация начальной управляющей сетки.**

Предположим, что начальная управляющая сетка представляет собой простой многогранник, не имеющий самопересечений. Данное предположение не используется в дальнейших выводах, но упрощает презентацию. Предположим, что каждый раз при применении правил вычисления более тонкой управляющей сетки также применяется подделение средней точки к копии исходного управляющего многогранника. Следует обратить внимание, что каждая контрольная точка, которая включается в сетку, использует подделение, соответствующее средней точке. Другим важным фактом является то, что подделение средней точки не меняет управляющий многогранник, рассматриваемый как множество точек. Поскольку подделение выполняется неоднократно, отображение получается более плотным. В пределе получается карта управляющего многоугольника на поверхности. Эта параметризация позволяет сразу вычислить произвольный параметр положения в соответствии с подходом, изложенным в [14], который тривиально обобщает метод на мультиразрешение.

Авторами используется термин «параметрическая область поверхности» для верхнего уровня управляющей сетки, на котором происходит параметризация. Треугольники

управляющей сетки верхнего уровня называются параметрическими треугольниками. Параметрическое положение точки определяется индексом треугольника, в котором она расположена, вместе с барицентрическими координатами треугольника. Вершины сетки называются контрольными точками. Несколько контрольных точек (по одной для каждого уровня  $l \geq i$ ) соответствуют вершинам более высокого уровня.

**Линейные диаграммы вершин**

Довольно часто необходимо постоянно перемещать точки в параметрической области поверхности подделения. В этом в этом случае удобно использовать локальные графики, т. е. карты частей параметрической области (управляющей сетки) плоскости. Авторы используют один из простейших типов диаграмм - кусочно-линейные диаграммы. Кусочно-линейная диаграмма отображает одно кольцо треугольников вокруг вершины  $v$  валентностью  $k$  управляющей сетки.

**Кривая пересечения**

Предположим, что объекты пересекаются вдоль одной кривой; в случае нескольких кривых пересечения все соображения применимы к каждой кривой в отдельности.

Цель первого шага алгоритма - найти кусочно-линейное приближение кривой пересечения  $c: I \rightarrow R^3$ , где  $I$  - интервал, с его изображениями в областях  $M_1$  и  $M_2$ ,  $c_i: I \rightarrow M_i, i = 1, 2$ .

Задача пересечения двух поверхностей описана в [15]. Основная сложность заключается в том, что топология пересечения вообще неизвестна и может быть неустойчивой по отношению к малым возмущениям поверхности. Авторы заменили задачу пересечения гладких поверхностей задачей о пересечении аппроксимирующих сеток. При этом важной становится задача определения пересечения многогранников.

Следует отметить, что теоретически можно получить истинное пересечение топологии во всех случаях, исключая вырожденный случай, например, контакт, используя адаптивное уточнение. Однако, топология кривой пересечения может иметь высокую сложность даже для простых поверхностей. Может потребоваться уточнение в определенных областях, что противоречит целям

эффективности и надежности.

Простой алгоритм пересечения сеток (пересечение каждой пары треугольников из двух сеток; построение кривых пересечения как связной последовательности пересечений пар треугольников) неэффективен и не надежен. В работе эти проблемы решаются с помощью иерархий ограничивающих прямоугольников и возмущения контрольной точки.

### Иерархии граничных блоков

Для ускорения алгоритма авторы используют выровненные по оси иерархии граничных блоков для каждой сетки, что наиболее эффективно для данного случая. Объемы более высокого порядка полезны для обнаружения коллизий [16]. Однако эти способы не обязательно приведут к значительному повышению производительности вычислений пересечения.

Большинство алгоритмов пересечения оптимизированы для быстрого тестирования исключения, но в данном случае пересечение ожидаемо. Использование граничных прямоугольников, выровненных по оси, позволяет определять пересечение быстро и локализовать его.

### Метод возмущений для вычисления пересечений

Алгоритм поиска пересечения основывается на тесте пересечения ребра с треугольником. Обычно в этом тесте определяется, находится ли точка  $P_0$  выше или ниже плоскости треугольника. Рассмотрим треугольник с точками  $p_1, p_2, p_3 \in R^3$ . Точка находится над треугольником, если определитель  $\det[p_0, p_2, p_2, p_3]$  является положительным, где точки  $p_i$  представлены в однородной форме. Вычисление определителя происходит с ошибкой из-за ошибок округления в арифметике с плавающей запятой.

Можно найти жесткую границу для ошибки [17], и, если она приводит к неопределенному результату, прибегнуть к точной арифметике [17].

В работе используется более простой подход, основанный на схеме возмущения [8]. В случае неопределенности знака определителя вычисление пересечения прерывается. Во входные точки вносятся небольшое количество возмущений (в зависимости от размера треугольника), и выполняется тест снова для всех треугольников, затронутых возмущением. Это соответствует цели надежного и эффективного вычисления согласованного приближенного пересечения.

Тем не менее, существуют такие проблемы, как параллельные ребра и другие вырожденные случаи [18]. В частности, каждая точка  $p_i$  заменяется линейной функцией  $p_i(\varepsilon) = p_i + \varepsilon r_i$ , где  $r_i$  - случайное направление. Для определения знака исходных данных используется

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s \operatorname{ign} \det[p_i(\varepsilon), p_j(\varepsilon), p_k(\varepsilon), p_l(\varepsilon)].$$

Знак выражения легко определить: определитель является кубическим многочленом в  $\varepsilon$ ,

и знак определяется коэффициентом линейного члена, если этот знак можно надежно вычислить. Если это не так, следует выбрать другое возмущение и пересчитать затронутые точки. Более удовлетворительный способ решения проблемы - использовать точные вычисления определителя.

### Резка и объединение параметрических доменов

Как только топология пересечения определена, выполняется вырезание параметрических областей исходных твердых тел и объединение их в один параметрический домен для результирующего объекта. На данном этапе не определяется положение опорных точек для нового объекта, не устанавливается окончательное соответствие между точками нового параметрического домена и исходного домена. Начальные значения для этих параметров для инициализации и для оптимизации назначаются позже. При выборе алгоритма вырезания доменов используются три основных соображения:

- топология разреза должна совпадать с топологией кривой пересечения;
- число вершин, добавляемых к сетке, представляющей домен, должно быть минимальным;
- валентность вставленных вершин должна быть небольшой.

Последние два требования часто противоречат друг другу. Например, может потребоваться разделение одного края оригинала домена на много частей, чтобы захватить топологию пересечения кривой. Если не вставляются никакие дополнительные вершины и просто соединяются все точки на ребре с противоположной вершиной, это значительно увеличивает ее валентность. Такие ситуации предотвращаются вставкой вершин, используя только квадсекцию треугольника. Эта операция должна сопровождаться бисекцией смежных треугольников сетки соответствующей области. В результате валентность вершин может еще увеличиваться, но гораздо медленнее. Следует отметить, что алгоритм намеренно игнорирует геометрию кривой пересечения и исходных поверхностей настолько это возможно без нарушения первого требования.

При построении области для результата булевой операции выполняются

два шага: вырезание каждого из исходных доменов  $M_1$  и  $M_2$  с использованием кривой пересечения и слияние соответствующих частей в один домен. На первом этапе несколько частей перемножаются в каждой из начальных сеток; одна или другая часть должна быть отброшена. Предполагается, что нормали к поверхностям, ограничивающим твердые тела, ориентированы наружу, что позволяет определить часть сетки, которая будет отброшена локально. Результат выполнения этого алгоритма является новым параметрическим доменом  $M$ , разделенным на две части  $M_1$  и  $M_2$ .

Булевы операции над сетками со значительно различной сложностью могут привести к вершинам высокой валентности на результирующей сетке (рис. 2, 3).

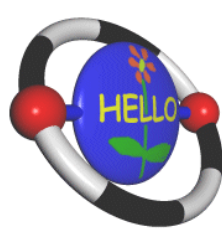


Рисунок 2 - Объединения кусочно-гладких поверхностей.

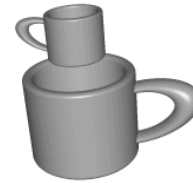


Рисунок 3 - Примеры объединения (ручки кружек) и разности (внутренние части кружек).

### Заключение

Работа посвящена решению классической проблемы геометрического моделирования. Алгоритмы разработаны в первую очередь для решения проблемы построения допустимой и полезной модели результата булевой операции.

Важным является также точное вычисление геометрических объектов, характеризующих результат пересечений - пересечение кривых и параметрические изображения кривой пересечения в доменах объектов. С помощью предложенных алгоритмов эффективно вычисляются пересечения поверхностей с поверхностями. Любой точный алгоритм может быть использован для вычисления кривой пересечения вместо предложенного приближенного алгоритма. Алгоритмы, описанные в работе, улучшают параметризацию.

### Список литературы

1. C. M. Hoffmann. Geometric and solid modeling: an introduction. San Mateo, California: Morgan Kaufmann, 1989.
2. N. Litke, A. Levin, P. Schroder. Trimming for subdivision surfaces. Technical report, Caltech, 2000.
3. Levin A. Combined subdivision schemes for the design of surfaces satisfying boundary conditions. Computer Aided Geometric Design, 1999. No 16(5), p. 345–354.
4. Vyatkin S. I., Romanyuk A. N., Pavlov S.V., Kotyra A., Mussabekova A. Offsetting and Blending with Perturbation Functions // Proceedings SPIE 10808, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments, 2018. Vol. 10808.
5. Вяткин С.И., Романюк С.А., Павлов С.В. Визуализация свободных форм и воксельных объемов // Дні науки в ДонНТУ: Матеріали VI Міжнародної конференції «Моделювання і комп'ютерна графіка» (Красноармійськ, Україна, 26-29 травня 2015 року). ДонНТУ, 2015. С. 125-139.
6. Вяткин С.И., Романюк С.А., Величко П.А. Метод итерационного приближения полигональных моделей неявными функциями // Вісник Хмельницького національного університету. Серія: Технічні науки, Хмельницький, 2014, № 1(209). С. 109-112.
7. Vyatkin S. I., Romanyuk A.N., Voit B.L. Perturbation functions and operations in geometric modeling. Measuring and Computing Devices in Technological Processes. 2017. № 3 (59). P. 117–120.
8. S.I. Vyatkin, A.N. Romanyuk, L.A. Savytska, T.I. Troianovska, N.V. Dobrovolska. Real-Time Deformations of Function-Based Surfaces using Perturbation Functions. Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing, 2018. Vol. 1015, No 3.
9. D. A. Field. Laplacian smoothing and Delaunay triangulations. Comm. Applications: Numerical Methods,

- (4):709–712, 1988.
10. Вяткин С. И., Величко П., Стрельчук Т.О. Reconstruction of complex 3D models using implicit functions and the multilevel height maps. Збірник матеріалів міжнародної науково-практичної інтернет-конференції «Електронні інформаційні ресурси: створення, використання, доступ». Вінниця, 2016. С. 493-495.
  11. Вяткин С. И., Романюк О.Н., Лисенко Е. К. Design tools functionally defined scenes. Збірник матеріалів міжнародної науково-практичної інтернет-конференції «Електронні інформаційні ресурси: створення, використання, доступ». Вінниця, 2016. С. 500-504.
  12. Вяткин С. И., Романюк А.Н. Интерактивный пользовательский интерфейс для создания функционально заданных объектов. Дні науки в ДонНТУ: Материали VI Международной конференции «Моделирование и компьютерная графика» (г. Красноармейск, Украина, 26–29 мая 2015). ДонНТУ, 2015. С. 169–173.
  13. H. Biermann, A. Levin, D. Zorin. Piecewise smooth subdivision surfaces with normal control. Proceedings of SIGGRAPH 2000, July 2000.
  14. J. Stam. Exact evaluation of Catmull-Clark subdivision surfaces at arbitrary parameter values. Proceedings of SIGGRAPH 98. Orlando, Florida, p. 395–404.
  15. R. E. Barnhill, G. Farin, M. Jordan, B. R. Piper. Surface/surface intersection. Computer Aided Geometric Design, 1987, 4(1-2), p. 3–16.
  16. Vyatkin S. I., Romanyuk O.V. Collision detection of solid objects. Дні науки в ДонНТУ: Материали VI Международной конференции «Моделирование и компьютерная графика» (г. Красноармейск, Украина, 26–29 мая 2015). ДонНТУ, 2015. С. 113–124.
  17. J. R. Shewchuk. Adaptive precision floating-point arithmetic and fast robust geometric predicates. Technical report, Carnegie Mellon University, 1996. <https://people.eecs.berkeley.edu/~jrs/papers/robustr.pdf>
  18. K. Dobrindt, K. Mehlhorn, M. Yvinec. A complete and efficient algorithm for the intersection of a general and a convex polyhedron. In Algorithms and data structures (Montreal, 1993), Springer, Berlin, 1993, pages 314–324.

### References

1. Hoffmann, C. M. (1989). Geometric and solid modeling: an introduction. San Mateo, California: Morgan Kaufmann.
2. Litke, N., Levin, A., Schroder, P. (2000). Trimming for subdivision surfaces. Technical report, Caltech.
3. Levin, A. (1999). Combined subdivision schemes for the design of surfaces satisfying boundary conditions. Computer Aided Geometric Design, No 16(5), p. 345–354.
4. Vyatkin, S. I., Romanyuk, A. N., Pavlov, S.V., Kotyra, A., Mussabekova, A. (2018). Offsetting and Blending with Perturbation Functions. Proceedings SPIE 10808, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments.
5. Vyatkin, S. I., Romanyuk, S. A., Pavlov, S.V. (2015). Visualization of free forms and voxel volumes [Vizualizatsiya svobodnykh form i voksel'nykh ob'yemov]. Science Days in DonNTU. Proceedings of VI International conference «Simulation and Computer Graphics», DonNTU, Krasnoarmiysk, Ukraine. p. 125-139.
6. Vyatkin, S. I., Romanyuk, S. A., Velichko, P.A. (2014). The method of iterative approximation of polygonal models by implicit functions [Metod iteratsionnogo priblizheniya poligonal'nykh modeley neyavnyimi funktsiyami]. Bulletin of Khmel'nitsky National University. Series: Technical sciences, Khmel'nitsky. № 1(209). p. 109-112.
7. Vyatkin, S. I., Romanyuk, A.N., Voit, B.L. (2017). Perturbation functions and operations in geometric modeling. Measuring and Computing Devices in Technological Processes. № 3 (59). P. 117–120.
8. Vyatkin, S.I., Romanyuk, A.N., Savytska, L.A., Troianovska, T.I., Dobrovolska, N.V.(2018). Real-Time Deformations of Function-Based Surfaces using Perturbation Functions. Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing, Vol. 1015, No 3.
9. Field, D. A.(1988). Laplacian smoothing and Delaunay triangulations. Comm. Applications: Numerical Methods, (4):709–712.
10. Vyatkin, S.I., Velichko, P.A., and Strelchuk T. (2016). Reconstruction of complex 3D models using implicit functions and multilevel height maps. Proceedings of the international scientific and practical Internet-conference "Electronic information resources: creation, use, access". Vinnitsa. p. 493-495.
11. Vyatkin, S.I., Romanyuk, A.N., Lysenko, E.K. Design tools functionally defined scenes. Proceedings of the

- international scientific and practical Internet-conference "Electronic information resources: creation, use, access". Vinnitsa. С. 500-504.
12. Vyatkin, S.I., Romanyuk, A.N. (2015). Interactive user interface for creating functionally defined objects [*Interaktivnyy pol'zovatel'skiy interfeys dlya sozdaniya funktsional'no zadannykh ob'yektov*]. Science Days in DonNTU. Proceedings of VI International conference «Simulation and Computer Graphics», DonNTU, Krasnoarmiysk, Ukraine. p. 169–173.
  13. Biermann, H., Levin, A., Zorin, D. (2000). Piecewise smooth subdivision surfaces with normal control. Proceedings of SIGGRAPH 2000.
  14. Stam, J. (1998). Exact evaluation of Catmull-Clark subdivision surfaces at arbitrary parameter values. Proceedings of SIGGRAPH 98, Orlando, Florida, p. 395–404.
  15. Barnhill, R. E., Farin, G., Jordan, M., Piper, B. R. (1987). Surface/surface intersection. Computer Aided Geometric Design, 4(1-2), p.3–16.
  16. Vyatkin, S. I., Romanyuk, O.V. (2015). Collision detection of solid objects. Science Days in DonNTU. Proceedings of VI International conference «Simulation and Computer Graphics», DonNTU, Krasnoarmiysk, Ukraine. p. 113–124.
  17. Shewchuk, J. R. (1996). Adaptive precision floating-point arithmetic and fast robust geometric predicates. Technical report, Carnegie Mellon University, <https://people.eecs.berkeley.edu/~jrs/papers/robustr.pdf>
  18. Dobrindt, J. R., Mehlhorn, J. R., Yvinec, M. (1993). A complete and efficient algorithm for the intersection of a general and a convex polyhedron. In Algorithms and data structures, Springer, Berlin, p. 314–324.

Надійшла до редакції 10.06.2019

**С. І. ВЯТКІН, О.Н. РОМАНЮК, А.В. СНИГУР, Н.С. КОСТЮКОВА**

Інститут автоматичної і електрометрії СО РАН, Вінницький національний технічний університет, Донецький національний технічний університет

**ТЕОРЕТИКО-МНОЖИННІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВІЛЬНИМИ ФОРМАМИ НА ОСНОВІ КЕРУЮЧИХ СІТОК**

У роботі описується метод обчислення наближених теоретико-множинних операцій (об'єднання, перетин, різниця) вільних форм, обмежених мультироздільними поверхнями. Представлені алгоритми генерації управляючої сітки для апроксимації поверхні, оптимізації та параметризації нових поверхонь по відношенню до вихідних, описана підгонка нових поверхонь до геометрії вихідних поверхонь. Алгоритми спрямовані на мінімізацію розміру та оптимізацію керуючої сітки. Вихідні керуючі сітки модифікуються і змінюються тільки в районі перетину.

**Ключові слова:** підділення поверхонь, мультироздільні поверхні, геометричне моделювання.

**S. I. VYATKIN, O.N. ROMANYUK, A.V. SNIGUR, N.S. KOSTYUKOVA**

Institute of automation and electrometry SB RAS, Vinnitsia national technical university, Donetsk national technical university

**SET-THEORETIC OPERATIONS ON FREE FORMS BASED ON CONTROL GRIDS**

This paper describes a method for calculating approximate set-theoretic operations (union, intersection, difference) of free forms bounded by multiresolution surfaces. Algorithms for generating a control grid for approximating a surface, optimizing and parameterizing new surfaces are presented. It also describes the fitting of new surfaces to the geometry of the original surfaces. Algorithms are aimed at minimizing the size and optimizing the control grid. The original control grids are modified and changed only in the intersection area.

**Key words:** surfaces subdivision, multiresolution surfaces, geometric modeling.