УДК 531.38

Н.Ф. Гоголева (канд. физ.-мат. наук, доц.)[1], М.Е. Лесина (д-р физ.-мат. наук, проф.)[2]
[1]ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет» г. Красноармейск
кафедра высшей математики
[2]Институт прикладной математики и механики НАН Украины
отдел технической механики
E-mail: gonata@i.ua; mtt@iamm.ac.donetsk.ua

НОВЫЙ СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА, СОЕДИНЕННЫХ НЕГОЛОНОМНЫМ ШАРНИРОМ

В работе [1] получено решение для задачи о движении двух сферически симметричных тел, соединенных неголономным шарниром. Уравнения подвижных и неподвижных аксоидов тел записаны для случая, когда точка O совпадает с центром масс тела S_0. Оказалось, что в этом случае траектория точки O представляет собой окружность радиуса α с центром в центре масс системы. В предлагаемой работе рассмотрен второй вариант, когда точка O совпадает с центром масс тела S. Для него получены уравнения подвижного и неподвижного аксоидов для каждого из тел системы, найдена траектория точки O (точки пересечения осей собственных вращений тел).
Ключевые слова: *система гироскопов Лагранжа, неголономный шарнир, аксоид, базис.*

Общая постановка проблемы. П.В. Харламов предложил естественный способ задания движения тела в пространстве, основанный на использовании определяемых в двух системах координат годографов угловой скорости тела [2]. Одна система координат неизменно связана с телом, а другая выбрана в неподвижном пространстве, причем изучалось движение тела, имеющего неподвижную точку. Кроме того, во всех случаях фигурировал неподвижный в пространстве вектор, компоненты которого по отношению к подвижным осям определялись в зависимости от времени вместе с компонентами угловой скорости тела в тех же осях.

М.П. Харламов [3] распространил метод годографов на более общие задачи, указал уравнения аксоидов, фиксированных в теле и в пространстве, посредством которых и представлено движение тела в общем случае. В качестве направляющей выбрана горловая линия поверхности.

В задаче о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных сферическим или неголономным шарниром, определен вектор, указывающий точку пересечения осей динамической симметрии тел, и абсолютная скорость этой точки. Это позволило упростить уравнения аксоидов, заменив горловую линию траекторией этой точки. Качение аксоидов в общем случае сопровождается скольжением вдоль общей образующей.

В работе [4] указан алгоритм построения подвижных и неподвижных аксоидов для каждого из тел системы для задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром.

Исходные соотношения. Приведем решение, найденное в работе [1]. Угловая скорость $\mathbf{w}_* = w_1\boldsymbol{e_1} + w_2\boldsymbol{e_2} + \frac{n}{J}\boldsymbol{e_3}$ тела S в полуподвижном базисе имеет компоненты:

$$w_1 = \frac{g\lambda}{J(1+\lambda)}\left[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda\right]\cos\alpha; \qquad (1)$$

$$w_2 = \frac{g\lambda}{J(1+\lambda)}\left[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda\right]\sin\alpha; \tag{2}$$

$$\frac{n}{J} = \frac{g\lambda}{J(1+\lambda)}(1-\lambda)C_* u^{\lambda}, \tag{3}$$

где

$$u = \cos\theta; \tag{4}$$

$$\sin\alpha = \frac{C_* u^{\lambda}}{\sqrt{1-u^2}}. \tag{5}$$

Угловая скорость $\mathbf{\Omega}_* = \Omega_1 \boldsymbol{e_1} + \Omega_2 \boldsymbol{e_2^0} + \frac{n_0}{J_0}\boldsymbol{e_3^0}$ тела S_0 имеет компоненты

$$\Omega_1 = \frac{g\lambda}{J(1+\lambda)}(-\lambda u^2 + 1 + \lambda)\cos\alpha; \tag{6}$$

$$\Omega_2 = \frac{g\lambda}{J(1+\lambda)}\frac{C_* u^{1+\lambda}}{\sqrt{1-u^2}}; \tag{7}$$

$$\frac{n_0}{J_0} = -\frac{g\lambda}{J}C_* u^{\lambda}. \tag{8}$$

Указанное решение получено на инвариантном соотношении

$$\mathbf{g} = g\left(\boldsymbol{e_1}\cos\alpha + \boldsymbol{e_2}\sin\alpha\right), \tag{9}$$

($\mathbf{g}$ – момент количества движения системы тел), при условиях $A_0 = J_0$, $A = J$, $J_0 = \frac{1-\lambda}{\lambda}J$,

$$N = \left(m + m_0\right)aa_0 = 0. \tag{10}$$

Отметим, что полуподвижный базис $O\boldsymbol{e_1 e_2 e_3}$ повернут по отношению к неизменно связанному с телом S базисом $O\boldsymbol{e_1^* e_2^* e_3^*}$ на угол φ:

$$\boldsymbol{e_1^*} = \boldsymbol{e_1}\cos\varphi + \boldsymbol{e_2}\sin\varphi; \;\; \boldsymbol{e_2^*} = -\boldsymbol{e_1}\sin\varphi + \boldsymbol{e_2}\cos\varphi; \tag{11}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{g\lambda}{J(1+\lambda)}\frac{C_* u^{1+\lambda}}{1-u^2}, \tag{12}$$

полуподвижный базис $O\boldsymbol{e_1 e_2^0 e_3^0}$ повернут на угол φ по отношению к неизменно связанному с телом S_0 базису $O\boldsymbol{e_1^{0*} e_2^{0*} e_3^0}$:

$$\boldsymbol{e_1^{0*}} = \boldsymbol{e_1}\cos\Phi + \boldsymbol{e_2^0}\sin\Phi; \qquad \boldsymbol{e_2^{0*}} = -\boldsymbol{e_1}\sin\Phi + \boldsymbol{e_2^0}\cos\Phi. \tag{13}$$

Вследствие неголономного шарнира углы Φ и φ связаны соотношением [5]

$$\dot{\Phi} = \dot{\varphi}u. \tag{14}$$

В работе [1] найдены уравнения подвижных и неподвижных аксоидов тел для варианта

$a_0 = 0$. Получим уравнения аксоидов тел для второго варианта из (10)

$$a = 0\,. \tag{15}$$

(точка O совпадает с центром масс тела S).

Подвижный аксоид тела S имеет вид $[4]$:

$$\boldsymbol{\xi} = \mu\frac{\boldsymbol{\omega}_*}{\omega_*} + \frac{\boldsymbol{\omega}_* \times \mathbf{V}}{\omega_*^2} = \xi_1\boldsymbol{e}_1 + \xi_2\boldsymbol{e}_2 + \xi_3\boldsymbol{e}_3\,, \tag{16}$$

где $\mathbf{V}$ это скорость точки O, которую указывает вектор $\mathbf{r}_* = \boldsymbol{C_*O}$. При условии (15)

$$\mathbf{r}_* = -a_0\boldsymbol{e}_3^0; \tag{17}$$

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}}_* = a_0\left(-\Omega_2\boldsymbol{e}_1 + \Omega_1\boldsymbol{e}_2^0\right), \tag{18}$$

где

$$\boldsymbol{e}_2^0 = \boldsymbol{e}_2\cos\theta + \boldsymbol{e}_3\sin\theta;\;\; \boldsymbol{e}_3^0 = -\boldsymbol{e}_2\sin\theta + \boldsymbol{e}_3\cos\theta\,. \tag{19}$$

Внесем соотношения (19) в (17), (18)

$$\mathbf{r}_* = a_o\left(\boldsymbol{e}_2\sin\theta - \boldsymbol{e}_3\cos\theta\right); \tag{20}$$

$$\mathbf{V} = a_0\left(-\boldsymbol{e}_1\Omega_2 + \boldsymbol{e}_2\Omega_1\cos\theta + \boldsymbol{e}_3\Omega_1\sin\theta\right). \tag{21}$$

Подставив (1)-(7), (21) в (16) находим компоненты подвижного аксоида в полуподвижном базисе

$$\xi_1(\mu,u) = \left\{\mu\frac{\left[(1-\lambda)u^2+1+\lambda\right]}{\widetilde{\omega}_*} + \frac{a_0\left(-\lambda u^2+1+\lambda\right)(1+\lambda)C_*u^\lambda}{\widetilde{\omega}_*^2(u)}\right\}\sqrt{1-\frac{C_*u^{2\lambda}}{1-u^2}}; \tag{22}$$

$$\xi_2(\mu,u) = \mu\frac{\left[(1-\lambda)u^2+1+\lambda\right]C_*u^\lambda}{\widetilde{\omega}_*(u)\sqrt{1-u^2}} - \frac{a_0\sqrt{1-u^2}}{\widetilde{\omega}_*^2(u)}\left\{\left[(1-\lambda)u^2+1+\lambda\right]\left(-\lambda u^2+1+\lambda-\lambda C_*u^{2\lambda}\right)- -\frac{1+\lambda}{1-u^2}C_*u^{2\lambda}\right\};$$

$$\xi_3(\mu,u) = \mu\frac{(1-\lambda)C_*u^{1+\lambda}}{\widetilde{\omega}_*(u)} + \frac{a_0}{\widetilde{\omega}_*^2(u)}u\left[(1-\lambda)u^2+1+\lambda\right]\left(-\lambda u^2+1+\lambda-\lambda C_*^2u^{2\lambda}\right), \tag{23}$$

где

$$\widetilde{\omega}_*^2(u) = \frac{\omega_*^2J^2(1+\lambda)^2}{g^2\lambda^2} = \left[(1-\lambda)u^2+1+\lambda\right]^2 + (1-\lambda)^2C_*^2u^{2+2\lambda}. \tag{24}$$

Вектор $\boldsymbol{\xi}$ необходимо записать в базисе $O\boldsymbol{e}_1^*\boldsymbol{e}_2^*\boldsymbol{e}_3$: $\boldsymbol{\xi} = \xi_1^*\boldsymbol{e}_1^* + \xi_2^*\boldsymbol{e}_2^* + \xi_3\boldsymbol{e}_3$, вследствие (11) имеем:

$$\xi_1^*(\mu,u) = \xi_1(\mu,u)\cos\varphi(u) + \xi_2(\mu,u)\sin\varphi(u);\;\; \xi_2^*(\mu,u) = -\xi_1(\mu,u)\sin\varphi(u) + \xi_2(\mu,u)\cos\varphi(u). \tag{25}$$

Угол $\varphi(u)$ найден в $[1]$ квадратурой

$$\varphi - \varphi_0 = C_*\int_{u_0}^{u}\frac{u^{\lambda-1}du}{\left(1-u^2\right)\sqrt{1-u^2-C_*^2u^{2\lambda}}}\,. \tag{26}$$

Таким образом, подвижный аксоид тела S определен соотношениями (23), (25), в которые необходимо внести (22), (24), (26).

Неподвижный аксоид тела S. Сначала необходимо ввести неподвижный базис [6, 9, 10], его начало выберем в точке C_* – центре масс системы тел.

Введем цилиндрическую систему координат с базисом $\boldsymbol{e_\nu e_\rho e_\gamma}$:

$$\boldsymbol{e_\nu} = \frac{\mathbf{g}}{g}; \qquad \boldsymbol{e_\rho} = \frac{\mathbf{g}\times(\mathbf{g}\times\boldsymbol{\omega}_*)}{g^2\omega_\rho}; \qquad \boldsymbol{e_\gamma} = \frac{\mathbf{g}\times\boldsymbol{\omega}_*}{g\omega_\rho}, \tag{27}$$

где

$$\omega_\rho^2 = \omega_*^2 - (\boldsymbol{\omega}_* \cdot \boldsymbol{e_\gamma})^2. \tag{28}$$

Внесем (1)-(3), (9), (24) в (27), (28) получим

$$\omega_\nu = \frac{g\lambda}{J(1+\lambda)}\left[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda\right]; \tag{29}$$

$$\omega_\rho = \frac{n}{J} = \frac{g\lambda}{J(1+\lambda)}(1-\lambda)C_* u^{1+\lambda}. \tag{30}$$

Соотношения (27) устанавливают связь между базисами:

$$\boldsymbol{e_\nu} = \boldsymbol{e_1}\cos\alpha + \boldsymbol{e_2}\sin\alpha;\ \boldsymbol{e_\rho} = \boldsymbol{e_3};\ \boldsymbol{e_\gamma} = \boldsymbol{e_1}\sin\alpha - \boldsymbol{e_2}\cos\alpha;$$

$$\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{e_\nu}\cos\alpha + \boldsymbol{e_\gamma}\sin\alpha;\ \boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{e_\nu}\sin\alpha + \boldsymbol{e_\gamma}\cos\alpha. \tag{31}$$

По отношению к неподвижному базису $C_*\boldsymbol{E_1E_2E_3}$ базис $C_*\boldsymbol{e_\nu e_\rho e_\gamma}$ повернут на угол γ:

$$\boldsymbol{E_1} = \boldsymbol{e_\nu};\ \boldsymbol{E_2} = \boldsymbol{e_\rho}\cos\gamma - \boldsymbol{e_\gamma}\sin\gamma;\ \boldsymbol{E_3} = \boldsymbol{e_\rho}\sin\gamma + \boldsymbol{e_\gamma}\cos\gamma. \tag{32}$$

Полуподвижный и неподвижный базисы связаны так:

$$\boldsymbol{E_1} = \boldsymbol{e_1}\cos\alpha + \boldsymbol{e_2}\sin\alpha;\ \boldsymbol{E_2} = -\boldsymbol{e_1}\sin\alpha\sin\gamma + \boldsymbol{e_2}\cos\alpha\sin\gamma + \boldsymbol{e_3}\cos\gamma;$$

$$\boldsymbol{E_3} = \boldsymbol{e_1}\sin\alpha\cos\gamma - \boldsymbol{e_2}\cos\alpha\cos\gamma + \boldsymbol{e_3}\sin\gamma;$$

$$\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{E_1}\cos\alpha - \boldsymbol{E_2}\sin\alpha\sin\gamma + \boldsymbol{E_3}\sin\alpha\cos\gamma;$$

$$\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{E_1}\sin\alpha + \boldsymbol{E_2}\cos\alpha\sin\gamma - \boldsymbol{E_3}\cos\alpha\cos\gamma;\ \boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{E_2}\cos\gamma + \boldsymbol{E_3}\sin\gamma; \tag{33}$$

$$\omega_\rho^2\dot{\gamma} = \boldsymbol{e_\nu}\cdot(\boldsymbol{\omega}_*\times\dot{\boldsymbol{\omega}}_*). \tag{34}$$

В работе [4] для (34) получено соотношение:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{g\omega_\rho^2}\left\{G_3(\omega_1\cdot\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_1\omega_2) - \frac{n}{J}(G_1\dot{\omega}_2 - G_2\dot{\omega}_1) + \frac{\dot{n}}{J}(G_1\omega_2 - G_2\omega_1) + \dot{\varphi}\left(g\frac{n}{J}\omega_\nu - G_3\omega_*^2\right)\right\}. \tag{35}$$

Подставив в него (1) – (3), (9), (12), (24), (29), (30) определим $\dot{\gamma} = \frac{g\lambda}{J(1+\lambda)}\left[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda\right]$, учтем найденное в [1] соотношение:

$$\dot{u} = \frac{g\lambda}{J(1+\lambda)}u^2\sqrt{1 - u^2 - C_*^2u^{2\lambda}}, \tag{36}$$

получим

$$\gamma(u) = \int\frac{(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda}{u^2\sqrt{1 - u^2 - C_*^2u^{2\lambda}}}du. \tag{37}$$

Неподвижный аксоид тела S [4] $\zeta = \mathbf{r}_* + \mu\frac{\boldsymbol{\omega}_*}{\omega_*} + \frac{\boldsymbol{\omega}_*\times\mathbf{V}}{\omega_*^2} = \mathbf{r}_* + \boldsymbol{\xi}$ вначале представим в базисе $C_*\boldsymbol{e_\nu e_\rho e_\gamma}$ [7], для этого в (16), (20) подставим (31)

$$\boldsymbol{\zeta} = \zeta_\nu\boldsymbol{e_\nu} + \zeta_\rho\boldsymbol{e_\rho} + \zeta_\gamma\boldsymbol{e_\gamma}, \tag{38}$$

где

$$\zeta_\nu = \frac{\mu}{\omega_*}\left[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda\right] + \frac{a_0C_*u^\lambda}{\tilde{\omega}_*^2}\left[(1-\lambda)u^4 + (1-\lambda^2)u^2 + (1+\lambda)^2 + (1-\lambda)C_*^2u^{2+2\lambda}\right];$$

$$\zeta_\rho = \frac{\mu}{\omega_*}(1-\lambda)C_* u^{1+\lambda} + \frac{a_0}{\widetilde{\omega}_*^2} u\left\{-\left[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda\right]u^2 - C_*^2 u^{2\lambda}\left[(1-\lambda)u^2 + (1+\lambda)\lambda\right]\right\}; \quad (39)$$

$$\zeta_\gamma = -\frac{a_0 u^2}{\widetilde{\omega}_*^2}\left[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda + (1-\lambda)C_*^2 u^{2\lambda}\right]. \quad (40)$$

Внесем $\boldsymbol{e_\nu}, \boldsymbol{e_\rho}, \boldsymbol{e_\gamma}$ из (32) в (38) и получим компоненты ζ_i в неподвижном базисе

$$\zeta_1 = \zeta_\nu; \qquad \zeta_2 = \zeta_\rho \cos\gamma + \zeta_\gamma \sin\gamma; \qquad \zeta_3 = -\zeta_\rho \sin\gamma + \zeta_\gamma \cos\gamma. \quad (41)$$

Таким образом, соотношения (41) вместе с (39), (40), (37) определяют неподвижный аксойд тела S.

При движении тела S его подвижный аксоид (22) – (26) катится по неподвижному. Скорость скольжения подвижного аксоида по неподвижному $v_c = (\boldsymbol{\omega_*} \cdot \boldsymbol{V})/\omega_*$ с учетом (21), (1)–(3) равна: $\dfrac{(\boldsymbol{\omega_*} \cdot \boldsymbol{V})}{\omega_*} = a_0 \dfrac{g\lambda}{J\varpi(u)} C_* u^{1+\lambda}\sqrt{1-u^2-C_*^2 u^{2\lambda}}$. Это означает, что движение подвижного аксоида (22)-(26) по неподвижному сопровождается скольжением вдоль общей образующей линейчатых поверхностей.

Параметрические уравнения траектории точки O в неподвижном пространстве [8] получим подставив (33) в (20)

$$\boldsymbol{r_*} = X(u)\boldsymbol{E_1} + Y(u)\boldsymbol{E_2} + Z(u)\boldsymbol{E_3};$$

где

$$X(u) = a_0 C_* u^\lambda;$$

$$Y(u) = a_0\left[\sin\gamma(u)\sqrt{1-u^2-C_*^2 u^{2\lambda}} - u\cos\gamma(u)\right]; \quad (42)$$

$$Z(u) = -a_0\left[\cos\gamma(u)\sqrt{1-u^2-C_*^2 u^{2\lambda}} + u\sin\gamma(u)\right].$$

Очевидно, что это пространственная сферическая кривая ($\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 = \mathrm{a}_0^2$). Отметим, что при $a = 0$ траектория точки O представляла окружность радиуса a с центром в точке C_*, а при $a_0 = 0$ имеем пространственную кривую (42).

Подвижный аксоид тела S_0 [4] $\boldsymbol{\xi^0} = \mu\dfrac{\boldsymbol{\Omega_*}}{\Omega_*} + \dfrac{\boldsymbol{\Omega_*} \times \mathbf{V}}{\Omega_*^2}$ представим сначала разложением в полуподвижном базисе $O\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2^0}\boldsymbol{e_3^0}$: $\boldsymbol{\xi^0} = \xi_1^0 \boldsymbol{e}_1 + \xi_2 \boldsymbol{e_2^0} + \xi_3 \boldsymbol{e_3^0}$, который вследствие (18) можно записать так:

$$\boldsymbol{\xi^0}(\mu,u) = F(\mu,u)\boldsymbol{\Omega}_*(u) + a_0 \boldsymbol{e_3^0}, \quad (43)$$

где

$$F(\mu,u) = \frac{\mu}{\Omega_*(u)} - \frac{a_0 n_0(u)}{J_0 \Omega_*^2(u)}, \quad (44)$$

$$\Omega_*^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \frac{n_0^2}{J_0^2}. \quad (45)$$

Подставив в (43)-(45) значения (6)-(8) получим компоненты $\xi_i^0(\mu,u)$:

$$\xi_1^0(\mu,u) = \widetilde{F}(\mu,u)(-\lambda u^2 + 1 + \lambda)\sqrt{1 - \frac{C_*^2 u^{2\lambda}}{1-u^2}}; \quad \xi_2^0(\mu,u) = \widetilde{F}(\mu,u)\frac{C_* u^\lambda}{\sqrt{1-u^2}}; \quad (46)$$

$$\xi_3^0(\mu,u) = a_0 - \widetilde{F}(\mu,u)(1+\lambda)C_* u^\lambda , \tag{47}$$

где

$$\widetilde{F}(\mu,u) = \frac{\mu}{\widetilde{\Omega}_*} + \frac{a_0(1+\lambda)C_* u^\lambda}{\widetilde{\Omega}_*^2(u)}; \tag{48}$$

$$\widetilde{\Omega}_*^2(u) = (-\lambda u^2 + 1 + \lambda)^2 + (1+\lambda)^2 C_*^2 u^{2+2\lambda} . \tag{49}$$

В неизменно связанном с телом S_0 базисе $O\boldsymbol{e_1^{0*}}\boldsymbol{e_2^{0*}}\boldsymbol{e_3^{0}}$ вектор $\boldsymbol{\xi^0}$ представим в виде: $\boldsymbol{\xi^0} = \xi_1^{0*}\mathbf{e_1^{0*}} + \xi_2^{0*}\boldsymbol{e_2^{0*}} + \xi_3\boldsymbol{e_3^0}$, вследствие (13) имеем:

$$\xi_1^{0*} = \xi_1^0 \cos\Phi + \xi_2^0 \sin\Phi; \;\; \xi_2^{0*} = -\xi_1^0 \sin\Phi + \xi_2^0 \cos\Phi, \tag{50}$$

где угол Φ находим из (14), (26)

$$\Phi - \Phi_0 = C_* \int_{u_0}^{u} \frac{u^\lambda du}{(1-u^2)\sqrt{1-u^2-C_*^2 u^{2\lambda}}}. \tag{51}$$

Таким образом, соотношениями (46) – (51) определен подвижный аксоид тела S_0.

Неподвижный аксоид тела S_0 $\boldsymbol{\zeta^0} = \mu\dfrac{\mathbf{\Omega}_*}{\Omega_*} + \dfrac{\mathbf{\Omega}_* \times \mathbf{V}}{\Omega_*^2} + \boldsymbol{r}_*$ вследствие (43), (17) имеет вид:

$$\boldsymbol{\zeta^0} = F(\mu,u)\mathbf{\Omega}_* . \tag{52}$$

В цилиндрической системе координат $C_*\boldsymbol{e_\nu}\boldsymbol{e_\rho^0}\boldsymbol{e_\beta^0}$: $\mathbf{\Omega}_* = \Omega_\nu \boldsymbol{e_\nu} + \Omega_\rho \boldsymbol{e_\rho^0}$, где

$$\Omega_\nu = \mathbf{\Omega}_* \cdot \boldsymbol{e_\nu}; \;\; \Omega_\rho^2 = \Omega_*^2 - \Omega_\nu^2. \tag{53}$$

Представим (19) в базисе $O\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2^0}\boldsymbol{e_3^0}$

$$\frac{\mathbf{g}}{g} = \boldsymbol{e}_{\mathbf{v}} = \boldsymbol{e_1}\cos\alpha + \boldsymbol{e_2^0}\cos\theta\sin\alpha - \boldsymbol{e_3^0}\sin\theta\sin\alpha , \tag{54}$$

учтем это разложение, соотношения (6)-(8) и получим из (53), (54)

$$\Omega_\nu = \frac{g\lambda}{J(1+\lambda)}\left(-\lambda u^2 + 1 + \lambda\right); \;\; \Omega_\rho = \frac{g\lambda}{J(1+\lambda)}\lambda C_* u^{1+\lambda}. \tag{55}$$

Для компонент $\mathbf{\Omega}_*$ в неподвижном базисе $C_*\boldsymbol{E_1 E_2 E_3}$ необходимо вычислить угол β, для которого в $[4]$ получено уравнение аналогичное (35)

$$\dot\beta = \frac{1}{g\Omega_\rho^2}\Bigg[G_3^0\left(\Omega_1\dot\Omega_2 - \dot\Omega_1\Omega_2\right) - \frac{n_0}{J_0}\left(G_1\dot\Omega_2 - G_2^0\dot\Omega_1\right) + \frac{\dot n_0}{J_0}\left(G_1\Omega_2 - G_2^0\Omega_1\right) + $$

$$+ \dot\Phi\left(g\frac{n_0}{J_0}\Omega_\nu - G_3^0\Omega_*^2\right)\Bigg].$$

Внесем сюда (55), (6) – (8), (14), (36) и получим

$$\dot\beta = \dot\gamma . \tag{56}$$

В работе $[4]$ получена формула $\boldsymbol{e_\rho} \cdot \boldsymbol{e_\rho^0} = \boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{\Omega}_* - \dfrac{\omega_\nu \Omega\nu}{\Omega_\rho\omega_\rho}$, в результате подстановки (19), (29), (30), (6) – (8), (1) – (3), (56), (51) в нее, находим $\boldsymbol{e_\rho} \cdot \boldsymbol{e_\rho^0} = -1$, т.е. с учетом (56):

$$\beta = \gamma + \pi. \tag{57}$$

Угловая скорость тела S_0 в неподвижном базисе $\mathbf{\Omega}_* = \Omega_\nu \boldsymbol{E_1} + \Omega_\rho\left(\boldsymbol{E_2}\cos\beta + \boldsymbol{E_3}\sin\beta\right)$

вследствие (57) такова: $\mathbf{\Omega_*} = \Omega_\nu \boldsymbol{E_1} - \Omega_\rho \left(\boldsymbol{E_2}\cos\gamma + \boldsymbol{E_3}\sin\gamma\right)$.

Неподвижный аксоид тела S_0 (52) при этом теперь запишем в виде $\boldsymbol{\zeta^0} = \boldsymbol{\zeta_1^0 E_1} + \boldsymbol{\zeta_2^0 E_2} + \boldsymbol{\zeta_3 E_3}$, где

$$\zeta_1^0 = F(\mu,u)\Omega_\nu; \qquad \zeta_2^0 = -F(\mu,u)\Omega_\rho \cos\gamma; \qquad \zeta_3^0 = -F(\mu,u)\Omega_\rho \sin\gamma.$$

Подставив сюда значения (55) находим компоненты $\zeta_i^0(\mu,u)$:

$$\begin{aligned} \zeta_1^0(\mu,u) &= \widetilde{F}(\mu,u)(-\lambda u^2 + 1 + \lambda); \\ \zeta_2^0(\mu,u) &= -\widetilde{F}(\mu,u)\lambda C_* u^{1+\lambda}\cos\gamma(u); \\ \zeta_3^0(\mu,u) &= -\widetilde{F}(\mu,u)\lambda C_* u^{1+\lambda}\sin\gamma(u). \end{aligned} \tag{58}$$

В которых $\widetilde{F}(\mu,u)$, $\gamma(u)$ определены в (48), (37).

Таким образом, соотношениями (58), (48), (37) определен неподвижный аксоид тела S_0. При движении этого тела подвижный аксоид (46)-(51) катится без скольжения по неподвижному (скорость скольжения $v_c^0 = (\mathbf{\Omega_*} \cdot \mathbf{V}) / \Omega_*$ с учетом (6), (7), (18) равна нулю).

Для найденного в работе [1] решения уравнения аксоидов записаны для варианта $a_0 = 0$. Так как траектория точки O оказалось при этом окружностью радиуса a с центром в точке C_*, неподвижный базис $C_* \boldsymbol{E_1 E_2 E_3}$ введен на траектории точки O

$$\boldsymbol{r_*} = a\left(\boldsymbol{E_1}\cos\psi + \boldsymbol{E_2}\sin\psi\right); \qquad \boldsymbol{E_3} = \boldsymbol{g}/g; \qquad \dot\psi(u) = \frac{g\lambda}{J(1+\lambda)}[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda].$$

Как уже отмечалось, для варианта $a = 0$ траектория (42) точки O – пространственная сферическая кривая. Для введения неподвижного базиса использован предложенный П.В. Харламовым метод. Для системы тел необходимо найти два угла γ и β для каждого из них. Оказалось, что $\beta = \gamma + \pi$. При вычислении углов γ и β параметры a или a_0 не участвуют, поэтому γ и β должны совпадать в обоих вариантах. Действительно, $\dot\gamma = \dot\beta = \dot\psi$. Это не случайно, так как при $a_0 = 0$ векторы $\boldsymbol{r_*} = -a\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{e_\rho} = -\boldsymbol{e_\rho^0} = \boldsymbol{e_3}$ коллинеарны.

Выводы.

В данной работе рассмотрен случай, когда точка пересечения осей собственных вращений тел совпадает с центром масс тела S. Для решения задачи о движении двух сферически симметричных тел, соединенных неголономным шарниром, полученного в работе [1], найдены уравнения подвижных и неподвижных аксоидов. Найдена траектория точки пересечения осей собственных вращений тел. Указаны скорости скольжения подвижных аксоидов по неподвижным для каждого из тел системы.

Список использованной литературы

1. Лесина М.Е. Движение двух сферически симметричных тел соединенных неголономным шарниром/ М.Е. Лесина, Н.Ф. Гоголева // Механика твердого тела. – 2014. – № 44. – С. 56–68.
2. Харламов П.В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку/ Михаил Павлович Харламов// Прикл. математика и механика. – 1964. – 28. – №3. – С. 502 – 507.
3. Харламов М.П. О построении аксоидов пространственного движения твердого тела/ Михаил Павлович Харламов // Механика твердого тела. – 1980. – № 12. – С. 3–8.
4. Гоголева Н.Ф. Уравнения аксоидов задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром/ Н.Ф. Гоголева, Я.В. Зиновьева // Механика твердого тела. – 2012. – № 42. – С. 202-212.

5. Харламов А.П. Неголономный шарнир / А.П. Харламов, М.П. Харламов // Механика твердого тела. – 1995. – № 27. – С. 1–7.
6. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии / Петр Константинович Рашевский. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 428 с.
7. Лесина М.Е. Новый подход к построению аксоидов в задаче о движении системы двух связанных тел / М.Е. Лесина, А.П. Харламов // Механика твердого тела. – 1993. – №. 25. – С. 30–42.
8. Лесина М.Е. К построению полного решения задачи об относительном движении двух связанных твердых тел / Мария Ефимовна Лесина // Механика твердого тела. – 1987. – № 19. – С.58–68.
9. Лурье А.И. Аналитическая механика / Анатолий Исакович Лурье – М: Физматиз. 1961. – 824 с.
10. Лесина М.Е. Уравнения подвижных и неподвижных аксоидов для класса движений по инерции системы двух гироскопов Лагранжа / М.Е. Лесина, Н.Ф. Гоголева // Механика твердого тела. – 2009. – № 39. – С. 83–93.

References

1. Lesina M.E. and Gogoleva N.F. (2014), "The motion of two spherically symmetric bodies connected by the nongolonomic hinge", *Mekhanika tverdogo tela*, vol. 44, pp. 56–68.
2. Kharlamov P.V. (1964), "Kinematics interpretation of body motion, having a fixed point", Applied mathematics and mechanics. vol. 28, no. 3, pp. 502 – 507.
3. Kharlamov M.P. (1980), "About the construction of axoids of spontaneous body motion", *Mekhanika tverdogo tela*, vol. 12, pp. 3 – 8.
4. Gogoleva N.F. and Zynovjeva J.V. (2012), "Equations of axoids of the motion problem of two Lagrange gyroscopes connected by the nonholonomic hinge", *Mekhanika tverdogo tela*, – vol. 42, pp. 202 – 212.
5. Kharlamov A.P. and Kharlamov M.P. (1995), "The nonholonomic hinge", *Mekhanika tverdogo tela*., vol. 27, pp. 1 – 7.
6. Rashevski P.K. (1950), *Kurs differencial'noj geometrii*, [Course of differential geometry], Gostekhteorizdat, Moscow, St. Petersburg, Russia.
7. Lesina M.E. and Harlamov A.P. (1993), "The new approach to plotting of axoids in the problem of two connected bodies motion", *Mekhanika tverdogo tela*, vol.25, pp. 30 – 42.
8. Lesina M.E. (1987), "To the construction of the general problem solution of relative motion of two connected solid bodies", *Mekhanika tverdogo tela*., vol. 19, pp. 58 – 68.
9. Lur'e A.I. (1961), *Analiticheskaja mehanika,* [Analytic mechanics], Fizmatiz, Moscow, Russia.
10. Lesina M.E. and Gogoleva N.F. (2009), "The equations of moving and fixed axoids for category of internal motion of two Lagrange gyroscopes", *Mekhanika tverdogo tela*., vol. 39, pp. 83–93.

Поступила в редакцию: 30.03.2015

Рецензент: д-р.техн. наук, проф. Зори А.А.

Н.Ф. Гоголєва
ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»
М.Ю. Лесіна
Інститут прикладної математики і механіки НАН України

Новий випадок інтегрованості задачі про рух двох гіроскопів Лагранжа, з'єднаних неголономним шарніром. *У роботі [1] отримано рішення для задачі про рух двох сферично симетричних тіл, з'єднаних неголономним шарніром. Рівняння рухомих і нерухомих аксоїдів*

для кожного з тіл системи двох гіроскопів Лагранжа знайдено для випадку, коли точка O співпадає з центром мас тіла. Виявилось, що в цьому випадку траєкторія точки O є колом радіусу a з центром в центрі мас системи. У роботі розглянуто випадок, коли точка O співпадає з центром мас тіла. Для нього отримано рівняння рухомого і нерухомого аксоїдів для кожного з тіл системи, знайдено траєкторія точки O (точки перетину осей динамічної симетрії). Розглянуто клас рухів, для яких траєкторія точки перетину осей динамічної симетрії є просторова сферична крива.
Ключові слова: *система гіроскопів Лагранжа, неголономний шарнір, аксоїд, базис.*

N.F. Gogoleva
Donetsk National Technical University
M.E. Lesina
Institute of Applied Mathematics and Mechanics NASU
New case of integration of the problem of the motion of two Lagrange gyroscopes connected by the nonholonomic hinge
M.P. Harlamov has proposed intrinsic representation of body motion in space, based on usage of angular body velocity hodographs, determined in two coordination systems. The one system has been connected permanently with the body, and another one has been chosen in fixed space while motion of body, having fixed point, has been researched. Moreover, in all cases fixed in space vector has appeared, components of which relative to moving axes have been determined depending on the time, coupled with angular velocity components according to identical axes.
M.P. Harlamov has spread the hodograph method on more general problems and pointed equations of fixed in the body and space axoids, whereby body motion has been represented in general case. A striction line of surface has been chosen as directive one.
In the problem of inertial motion of two Lagrange gyroscopes, connected by a spherical and nonholonomic hinge, the vector, pointing out an intersection point of dynamic symmetry axes, and absolute velocity of this point has been determined. This fact has made it possible to simplify the equations of axoids, having replaced the striction line by trajectory of the intersection point. The rolling motion of axoids is attended with sliding in the line of the generator.
The situation, when the intersection point of self-rotation axes of bodies follows the center of body mass “S”, has been considered here. The algorithm for plotting moving and fixed axoids according to each body in the system for the problem of internal motion of two Lagrange gyroscopes, connected by the nonholonomic hinge, has been mentioned in this scientific work. The equations of axoids have been found by using previously mentioned algorithm. The proposed by P.V. Harlamov method has been used to introduce the fixed basis. That provides possibility of body motion visualization.
Keywords: *system of Lagrange gyroscopes, nonholonomic hinge, axoid, basis.*

Гоголева Наталия Федоровна, Украина, окончила Донецкий национальный университет, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики. ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет» (пл. Шибанкова, 2, г. Красноармейск, 85300, Украина). Основное направление научной деятельности – динамика твердого тела и систем связанных тел, аналитическая механика, механика неголономных систем.