УДК 004.22+621.3

С. В. Иваница (аспирант)
Донецкий национальный технический университет
sergey.ivanitsa@cs.donntu.edu.ua

РЕАЛИЗАЦИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ НАД ТЕТРАКОДАМИ

Определены основные свойства арифметических операций сложения и вычитания над тетракодами, в соответствии с которыми проведена их реализация. Показана связность сложения и вычитания тетракодов с аналогичными операциями для интервалов. Представлены результаты рассматриваемых операций в табличном виде, продемонстрированы соответствующие примеры.

Ключевые слова: Тетракод, тетрит, тетралогика, тетравычисления, сложение, вычитание, интервал.

Введение

В работах [1–3] выделены и обоснованы основные тенденции перехода к расширенному кодо-логическому базису, и, в частности, к представлению числовых данных средствами постбинарного кодирования. Под последним понимается возможность представления десятичных чисел с помощью тетракодов C_4 (tetracode), являющихся способом представления данных в одном разряде в виде комбинации четырех знаков, обозначаемых цифрами 0, 1 и буквами ‘A’ и ‘M’. При этом разряд тетракода называется тетритом (tetrit) [1, с. 65], а данный вид кодирования — тетракодированием.

В работах [3, 4] определены логические операции над тетракодами, что позволило говорить о формировании тетралогики, как раздела математической логики, в котором рассматриваются данные логические операции. Также в работе [2] затронут вопрос о формировании постбинарных вычислений, а применительно к тетракоду — тетравычислений.

Использование тетракодов при модификации форматов чисел с плавающей запятой [5–7] как никогда делает актуальными исследования и разработки в области тетралогики и тетравычислений для реализации плавающей арифметики чисел и числовых объектов (например, интервалов), представленных в модифицированных форматах чисел с плавающей запятой с использованием тетракодирования.

Целью данной работы является:

1. Определение основных свойств арифметических операций сложения и вычитания над тетракодами.
2. Формирование пошаговых инструкций при реализации сложения и вычитания тетракодов.
3. Адаптация и проверка выполнения основных законов и соответствий для операций сложения и вычитания.

Основные свойства сложения и вычитания тетракодов

Поскольку тетракод $C_4 = \{0, A, M, 1\}$ используется для хранения числовой информации, то над ним могут быть определены базовые арифметические операции.

Пусть множество $\text{o}\rho_1 = \{+, –\}$ является подмножеством множества $\text{OP} = \{+, –, \times, \div\}$ арифметических операций над тетракодами: $\text{o}\rho_1 \subset \text{OP}$. Тогда для тетракодов T_1 и T_2 может быть определена:

- операция сложения, имеющая запись $T_1 + T_2$;
- операция вычитания, записывающаяся как $T_1 – T_2$;

Для операций $\text{o}\rho_1$ важно выполнение свойств арифметических операций сложения и вычитания, определенных над действительными числами. Также ввиду интервальной природы тетракода [8–10], операции множества $\text{o}\rho_1$ также должны соответствовать свойствам определенных над интервалами арифметических операций сложения и вычитания [1, с. 118].

Поэтому справедливость операций из $\text{o}\rho_1$ должна быть основана на базовых соответствиях сложения и вычитания:

1) $T_1 + T_2$ равно T_3 тогда и только тогда, когда $T_3 - T_2 = T_1$ и $T_3 - T_1 = T_2$;
2) $T_1 - T_2$ равно T_3 тогда и только тогда, когда $T_3 + T_2 = T_1$ и $T_1 - T_3 = T_2$;

Также для операции сложения из $\text{o}\rho_1$ обязательно выполнение свойств коммутативности

$$T_1 + T_2 = T_2 + T_1, \tag{1}$$

и ассоциативности

$$\left(T_1 + T_2\right) + T_3 = T_1 + \left(T_2 + T_3\right) = T_1 + T_2 + T_3. \tag{2}$$

Реализация операции сложения тетракодов

Сложение двух тетракодов аналогично сложению результирующих интервалов, декодированных из данных тетракодов-операндов.

На рис. 1 представлены два интервала, полученные при приведении тетракода к двоичному коду [1, с. 159–163], при котором границы каждого из интервалов получены замещением тетритов битами двоичного кода (обозначено знаком «$\rightarrow$»). Это позволяет заменить сложение тетритов двоичным сложением: $0+0=0$, $0+1=1$ и $1+1=10$.

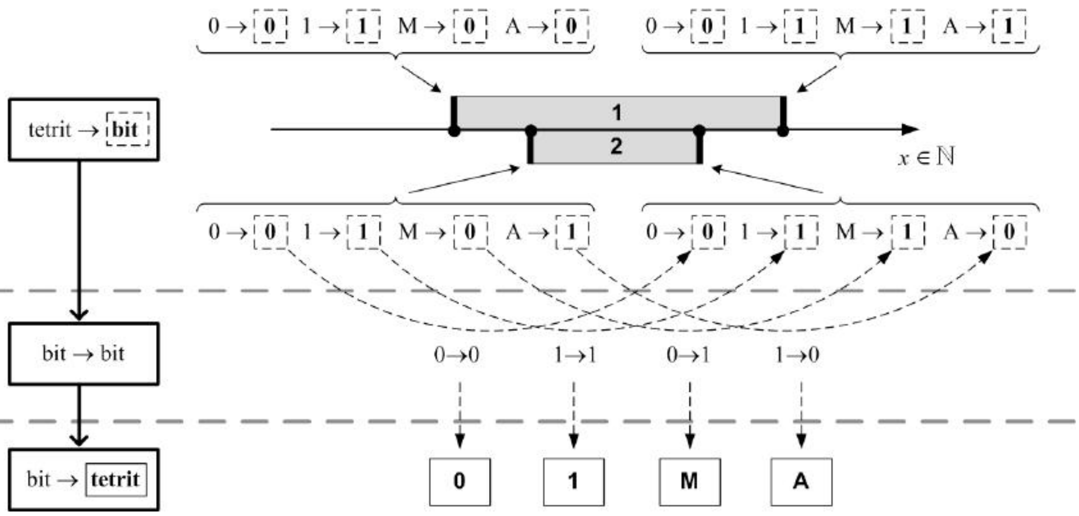

Рисунок 1 — Битовое (bit) представление тетритов (tetrit) в тетракоде по отношению к границам интервалов, имеющим максимальную (интервал 1) и минимальную (интервал 2) ширину

Интервал 1 далее будем называть максимальным, так как он имеет наибольшую ширину, а интервал 2 соответственно — минимальным. Следует уточнить, что все значения минимального интервала будут принадлежать всем возможным интервалам, полученным при декодировании тетракода.

Таким образом, если интервал $\boldsymbol{t}_1^{\min}$ является минимальным интервалом, декодированным из тетракода T_1, а $\boldsymbol{t}_2^{\min}$ — минимальным интервалом из T_2, то результатом сложения T_1+T_2 является такой тетракод T_3, при декодировании которого полученный минимальный интервал $\boldsymbol{t}_3^{\min}$ представляет собой сумму интервалов $\boldsymbol{t}_1^{\min}$ и $\boldsymbol{t}_2^{\min}$. Следует отметить, что **при любых значениях двух тетракодов всегда найдется третий тетракод, являющийся суммой двух предыдущих**:

$$\forall\ T_1 \rightarrow \boldsymbol{t}_1^{\min}, T_2 \rightarrow \boldsymbol{t}_2^{\min}\ \exists\ T_3 \rightarrow \boldsymbol{t}_3^{\min}:\ T_1+T_2=T_3 \wedge \boldsymbol{t}_1^{\min}+\boldsymbol{t}_2^{\min}=\boldsymbol{t}_3^{\min}. \quad (3)$$

Запись (3) также указывает на то, что **сложение тетракодов аналогично сложению интервалов**.

При переходе от меньшей границы этого интервала к большей, наблюдаются переходы двоичных значений от 0 к 1 на месте тетритов М и от 1 к 0 на месте тетритов А (обозначены на рис. 1 изогнутыми пунктирными стрелками).

Данный аспект позволяет произвести обратный переход от двоичного сложения к сложению тетракодов и сформулировать **алгоритм выполнения операции сложения для двух тетритов**:

Шаг 1. Замена тетритов битами в соответствии с рис. 1 для минимального интервала 2 и формирование двоичных значений границ полученных интервалов-операндов.

Шаг 2. Выполнение операции сложения над сформированными интервалами-операндами и получение двоичных значений границ интервала-результата.

Шаг 3. Путем побитового сопоставления левой и правой границ результирующего интервала формируется один или пара тетритов (сумма и перенос в старший разряд) по следующим критериям (следуют из рис. 1):

– если значение сопоставленных битов не изменилось, то результатом является эквивалентный биту тетрит: $(\textit{бит}\ 0 \rightarrow \textit{бит}\ 0) \rightarrow \textit{тетрит}\ 0$, $(\textit{бит}\ 1 \rightarrow \textit{бит}\ 1) \rightarrow \textit{тетрит}\ 1$;
– если значение сопоставленных битов изменилось, то результатом является тетрит М или А: $(\textit{бит}\ 0 \rightarrow \textit{бит}\ 1) \rightarrow \textit{тетрит}\ \mathrm{M}$, $(\textit{бит}\ 1 \rightarrow \textit{бит}\ 0) \rightarrow \textit{тетрит}\ \mathrm{A}$.

В левой части рис. 1 фактически показано пошаговое выполнение приведенного выше алгоритма сложения.

На рис. 2 продемонстрировано получение суммы для некоторых пар тетритов [2, с. 97–104], а в табл. 1 сведены результаты сложений тетритов во всех возможных сочетаниях. Из рис. 2 видно, что **сложение для тетритов коммутативно, поскольку коммутативно двоичное сложение**.

Сложение многоразрядных тетракодов выполняется поразрядно, начиная с младших разрядов, с поразрядным заполнением суммы, используя соответствующие значения из табл. 1. На рис. 3 приведены два примера сложения тетракодов с демонстрацией проверки правильности полученной суммы путем сложения минимальных интервалов и сопоставления полученных результатов.

Поскольку сложение интервальных чисел обладает свойствами ассоциативности, то и сложение тетракодов не противоречит свойству (2), что подтверждается примерами на рис. 4.

Реализация операции вычитания тетракодов

Согласно соответствию сложения и вычитания для тетракодов ($T_1 - T_2 = T_3$ тогда и только тогда, когда $T_3 + T_2 = T_1$ и $T_1 - T_3 = T_2$), арифметическую операцию вычитания, а именно результат вычитания тетритов 0, A, M и 1 во всех сочетаниях, можно получить из таблицы сложения для тетракодов (табл. 1). Результаты операции вычитания приведены в табл. 2, где в скобках указан заем из старшего разряда.

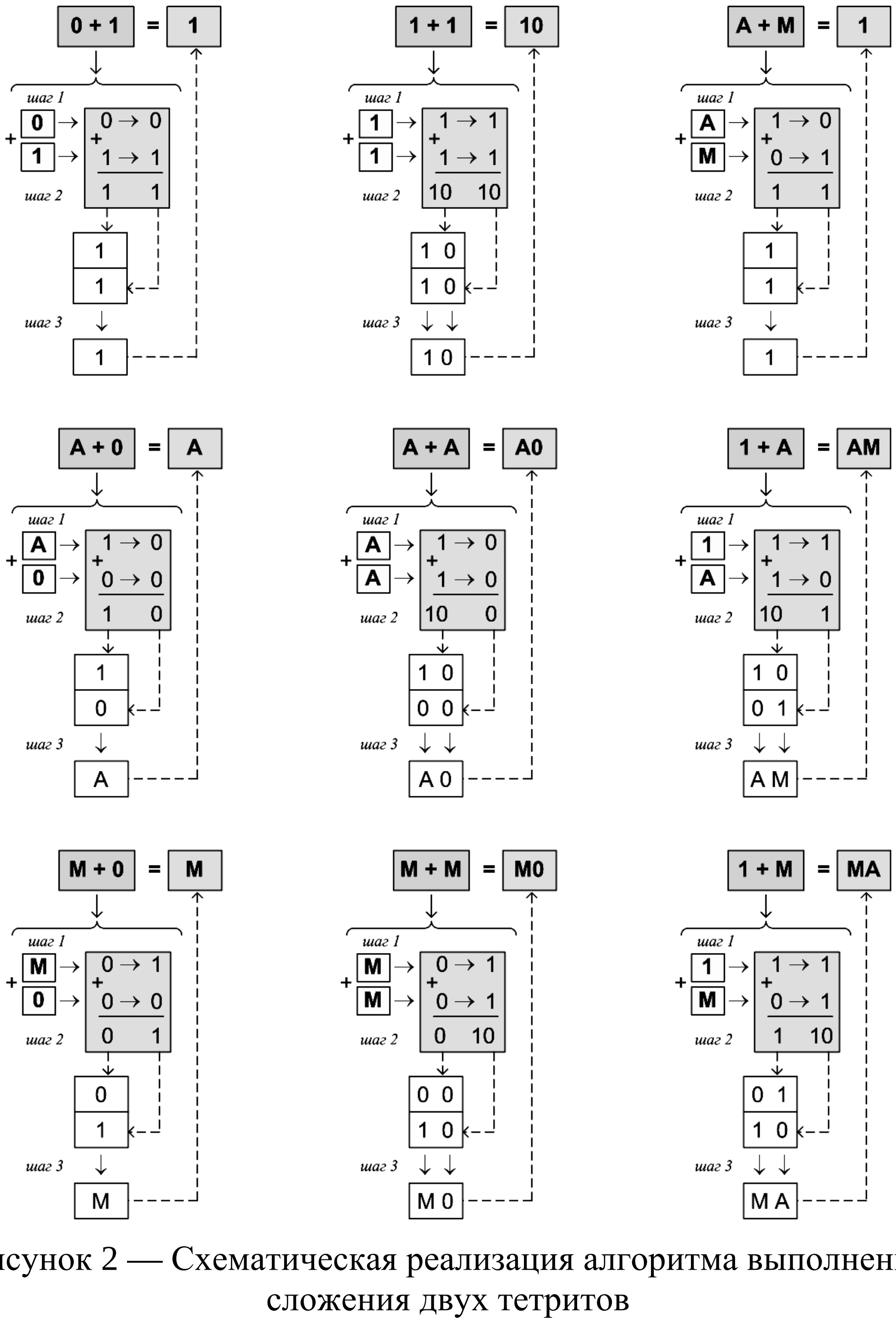

Рисунок 2 — Схематическая реализация алгоритма выполнения сложения двух тетритов

Таблица 1

Таблица сложения тетракодов

+	0	A	M	1
0	0	A	M	1
A	A	A0	1	AM
M	M	1	M0	MA
1	1	AM	MA	10

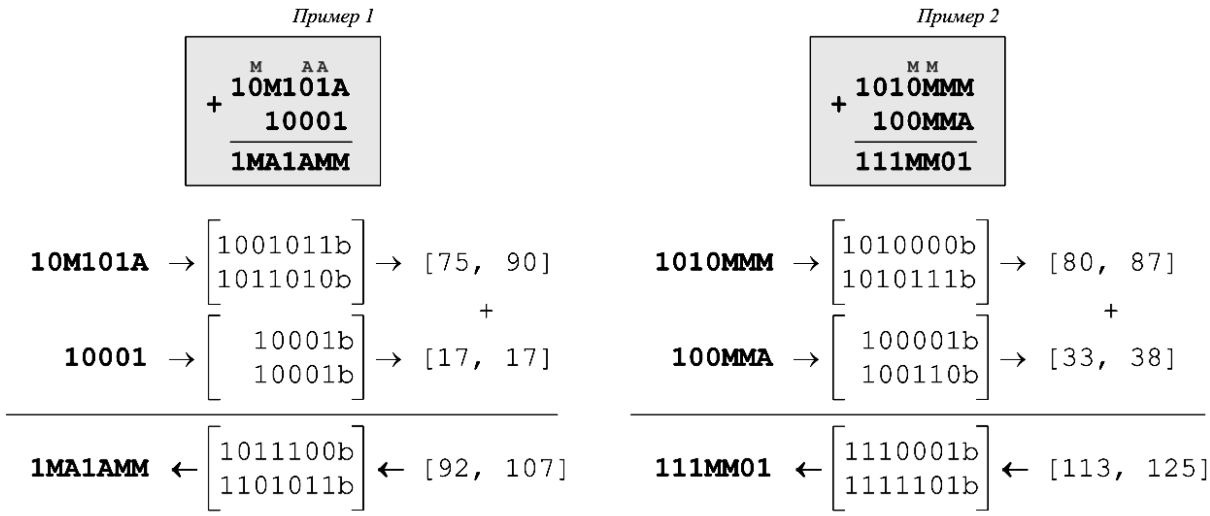

Рисунок 3 — Примеры сложения тетракодов с демонстрацией проверки правильности полученной суммы

$$1+1+A = \left[\begin{array}{l}(1+1)+A = 10+A = \mathbf{1A} \\ 1+(A+1) = 1+AM = \mathbf{1A}\end{array}\right. \qquad A+A+M = \left[\begin{array}{l}(A+A)+M = A0+M = \mathbf{AM} \\ A+(A+M) = A+1 = \mathbf{AM}\end{array}\right.$$

$$1+1+M = \left[\begin{array}{l}(1+1)+M = 10+M = \mathbf{1M} \\ 1+(1+M) = 1+MA = \mathbf{1M}\end{array}\right. \qquad A+A+1 = \left[\begin{array}{l}(A+A)+1 = A0+1 = \mathbf{A1} \\ A+(A+1) = A+AM = \mathbf{A1}\end{array}\right.$$

$$A+M+1 = \left[\begin{array}{l}(A+M)+1 = 1+1 = \mathbf{10} \\ A+(M+1) = A+MA = \mathbf{10}\end{array}\right. \qquad A+M+M = \left[\begin{array}{l}(A+M)+M = 1+M = \mathbf{MA} \\ A+(M+M) = A+M0 = \mathbf{MA}\end{array}\right.$$

Рисунок 4 — Примеры, показывающие выполнение свойства ассоциативности сложения

Поскольку вычитание тетракодов фактически получено из результатов «тетракодового» сложения, то и для вычитания являются справедливыми следующие утверждения:

1) вычитание двух тетритов основывается на вычитании двоичных разрядов;
2) вычитание двух тетракодов аналогично вычитанию результирующих интервалов, декодированных из данных тетракодов-операндов.

Таблица 2

Таблица вычитания тетракодов
(в скобках указан заем из старшего разряда)

t_1	t_2	$t_1 - t_2$	t_1	t_2	$t_1 - t_2$	t_1	t_2	$t_1 - t_2$	t_1	t_2	$t_1 - t_2$
0	0	(0)0	A	0	(0)A	M	0	(0)M	1	0	(0)1
	A	(A)A		A	(0)0		A	(A)1		A	(0)M
	M	(M)M		M	(M)1		M	(0)0		M	(0)A
	1	(1)1		1	(M)M		1	(A)A		1	(0)0

Эти утверждения делают возможной проверку вычитания тетракодов путем интервального вычитания декодированных из тетракодов-операндов минимальных интервалов $\boldsymbol{t}_i^{\min}$. Аналогично записи (3), при вычитании тетракодов справедлива следующая запись:

$$\forall\ T_1 \rightarrow \boldsymbol{t}_1^{\min},\ T_2 \rightarrow \boldsymbol{t}_2^{\min}\colon \boldsymbol{t}_1^{\min} \geq \boldsymbol{t}_2^{\min}\ \exists\ T_3 \rightarrow \boldsymbol{t}_3\colon$$
$$T_1 - T_2 = T_3 \wedge \boldsymbol{t}_1^{\min} - \boldsymbol{t}_2^{\min} \supseteq \boldsymbol{t}_3. \qquad (4)$$

Выражение (4) показывает, что если интервал $\boldsymbol{t}_1^{\min}$ является минимальным интервалом, декодированным из тетракода T_1, а $\boldsymbol{t}_2^{\min}$ — минимальным интервалом из T_2, причем $\boldsymbol{t}_1^{\min} \geq \boldsymbol{t}_2^{\min}$, то разностью $T_1 - T_2$ является такой тетракод T_3, при декодировании которого полученный интервал $\boldsymbol{t}_3$ всегда является подинтервалом интервала разности $\boldsymbol{t}_1^{\min} - \boldsymbol{t}_2^{\min}$, т. е. является минимальным:

$$\boldsymbol{t}_1^{\min} - \boldsymbol{t}_2^{\min} \supseteq \boldsymbol{t}_3^{\min}. \qquad (5)$$

Запись (5) показывает, что **при вычитании тетракодов гарантируется достоверность полученного результата**.

Вычитание тетракодов выполняется поразрядно, начиная с младшего разряда, используя при этом значения табл. 2. На рис. 5 приведены два примера вычитания тетракодов с проверкой правильности полученных результатов.

Пример 1

$$\begin{array}{r} \texttt{10010111} \\ -\ \texttt{10MMAA} \\ \hline \texttt{11AMAMM} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{10010111} \rightarrow \begin{bmatrix}\texttt{10010111b}\\ \texttt{10010111b}\end{bmatrix} & \rightarrow & [151,\ 151] \\ & & - \\ \mathbf{10MMAA} \rightarrow \begin{bmatrix}\texttt{100011b}\\ \texttt{101100b}\end{bmatrix} & \rightarrow & [35,\ 44] \\ \hline \mathbf{11AMAMM} \leftarrow \begin{bmatrix}\texttt{1110100b}\\ \texttt{1101011b}\end{bmatrix} & \leftarrow & [107,\ 116] \end{array}$$

Пример 2

$$\begin{array}{r} \texttt{11MMAAA} \\ -\ \texttt{11111} \\ \hline \texttt{10M100M} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{11MMAAA} \rightarrow \begin{bmatrix}\texttt{1100111b}\\ \texttt{1111000b}\end{bmatrix} & \rightarrow & [103,\ 120] \\ & & - \\ \mathbf{11111} \rightarrow \begin{bmatrix}\texttt{11111b}\\ \texttt{11111b}\end{bmatrix} & \rightarrow & [31,\ 31] \\ \hline \mathbf{10M100M} \leftarrow \begin{bmatrix}\texttt{1001000b}\\ \texttt{1011001b}\end{bmatrix} & \leftarrow & [72,\ 89] \end{array}$$

Рисунок 5 — Примеры вычитания тетракодов с демонстрацией проверки правильности полученной разности

Выводы

Рассмотренные операции сложения и вычитания тетракодов вправе выступать в качестве базовых операций тетраарифметики, а также частью математического аппарата тетралогики. При реализации базовых операций (включая операции умножения и деления), способных осуществлять тетравычисления, становится достижимым обеспечение более реалистичного высокопроизводительного компьютерного моделирования сложных систем.

Внедрение тетраарифметики и тетравычислений в современный бинарный компьютинг также является весомым аргументом в пользу перехода к постбинарному компьютингу [1] и делает возможным создание вычислительных моделей, способных представить в вычисляемом виде большинство противоречий окружающего мира.

Список литературы

1. Аноприенко А. Я. Постбинарный компьютинг и интервальные вычисления в контексте кодо-логической эволюции. / А. Я. Аноприенко, С. В. Иваница — Донецк, ДонНТУ, УНИТЕХ, 2011. — 248 с.

2. Аноприенко А. Я. Тетралогика, тетравычисления и ноокомпьютинг. / А. Я. Аноприенко, С. В. Иваница — Донецк, ДонНТУ, УНИТЕХ, 2012. — 308 с.

3. Аноприенко А. Я. Особенности реализации постбинарных логических операцій / А. Я. Аноприенко, С. В. Иваница // Научно-теоретический журнал «Искусственный интеллект», № 2, 2011. С. 110–121.

4. Иваница С. В. Реализация логических операций над элементами тетракодов / С. В. Иваница, А. Я. Аноприенко / «Інформаційні управляючі системи та комп’ютерний моніторинг» (ІУС КМ – 2011) // Материалы II Всеукраинской научно-технической

конференции студентов, аспирантов и молодых учених — 11–13 апреля 2011 г. Т.2. Донецк, ДонНТУ. — 2011. С. 198–202.

5. Ановриенко А. Я. Особенности представления вещественных чисел в постбинарных форматах / А. Я. Аноприенко, С. В. Иваница // Научно-теоретический журнал «Математичні машини і системи», № 3. — Киев, 2012. — С. 49–60.

6. Аноприенко А. Я. Гибкая разрядность и постбинарные форматы представления вещественных чисел / С. В. Иваница, А. Я. Аноприенко // Вестник Инженерной Академии Украины. Теоретический и научно-практический журнал Инженерной Академии Украины. Выпуск 1. — Киев, 2012. — С. 92–98.

7. Аноприенко А. Я. Представление постбинарных форматов чисел с плавающей запятой в контексте интервальных вычислений / А. Я. Аноприенко, С. В. Иваница, С. В. Кулибаба // Научные труды Донецкого национального технического университета. Серия: «Информатика, кибернетика и вычислительная техника» (ИКВТ-2011). Выпуск 14 (188). — Донецк: ДонНТУ, 2011. С. 44–49.

8. Аноприенко А. Я. Интервальные вычисления и перспективы их развития в контексте кодо-логической эволюции / С. В. Иваница, А. Я. Аноприенко // Научные труды Донецкого национального технического университета. Серия «Проблемы моделирования и автоматизации проектирования динамических систем» (МАП-2010). Выпуск 8 (168): Донецк: ДонНТУ, 2010. С. 150–160.

9. Аноприенко А. Я. Представление интервальных чисел средствами постбинарного кодирования / С. В. Иваница, А. Я. Аноприенко // Научно-теоретический журнал «Искусственный интеллект», № 1, 2012. С. 6–16.

10. Anopriyenko A., Ivanitsa S., Hamzah A. Postbinary calculations as a machine-assisted realization of real interval calculations / International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering (IJATCSE), 2 (4), July–August 2013, P. 91–94.

Надійшла до редколегії 5.11.2013р.

Рецензент: к.т.н., проф. Аноприєнко О. Я.

С. В. Іваниця
Донецький національній технічний університет

Реалізація арифметичних операцій додавання і віднімання над тетракодами. Визначено основні властивості арифметичних операцій додавання і віднімання над тетракодами, відповідно до яких проведена їх реалізація. Показано зв'язність додавання і віднімання тетракодів з аналогічними операціями для інтервалів. Наведені результати розглянутих операцій у табличному вигляді, та продемонстровані відповідні приклади.
Ключові слова: Тетракод, тетріт, тетралогіка, тетраобчислення, додавання, віднімання, інтервал.

S. Ivanitsa
Donetsk National Technical University

Realization of arithmetical operations of tetracodes addition and subtraction. This paper discusses the basic operations of tetracodes addition and subtraction as a transition to advanced code-logical basis and to repose numeric data postbinary encoding resources.
When postbinary encoding decimal numbers are recorded using tetracode. Tetracode have a way of present data in a single discharge. This is combination of four characters: the numbers

0, 1 and the letter 'A' and 'M'. One digit tetracode called the tetrit, and this kind of coding called the tetracoding.
In the early works of the author defined logical operations on tetra codes. This suggests formation tetralogic as branch of mathematical logic. This article discusses postbianry logical operations. Also there is the issue of forming postbinary calculations. To calculate tetracode postbinary is called the tetracalculations.
Using tetracodes when modifying floating point numbers formats makes relevant research in the field and tetralogic calculations. It is possible to implement a floating-point arithmetic of numbers and intervals, which are presented in a modified format of floating point numbers. In these formats used tetracoding.
Addition and subtraction tetracodes can be tetra basic operations of arithmetic, as well as part of the mathematical apparatus tetralogic. When implementing the basic operations (including multiplication and division), capable of performing calculations tetra. This provides realistic high-performance computer simulation of complex systems.
Implementation tetraarithmetic and tetracalculations in modern binary computing is the beginning of the transition to postbinary computing. Becomes possible create computational models capable to calculate most controversy surrounding world.
The article defines the main property of arithmetic operations of tetracodes addition and subtraction, under which carried out their implementation.
Is shown connection of tetracodes addition and subtraction with similar operations for intervals. Presents results the operations in a tabular form, and demonstrated some examples.
Keywords: Tetracode, tetit, tetralogic, tetracalculation, addition, subtraction, interval.