

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ МНОГОПРОЛЕТНЫХ БАЛОК С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССОЙ

Сухарев В.А., д.т.н., профессор

ЮФ НУБиП Украины «Крымский агротехнологический университет»

В статье представлен новый подход к решению проблемы численного расчета спектра собственных частот колебаний многопролетных балок с распределенной массой. Решение задачи сведено к компьютерному отысканию корней сложного трансцендентного уравнения.

Ключевые слова: частоты колебания, многопролетные балки, численный метод.

Разыскиваются собственные частоты изгибных колебаний многопролетных балок постоянного сечения (рис.1). Пролеты пронумерованы слева направо от 1 до n , длины пролетов обозначены l_i ($i = 1, 2, 3 \dots n$). Кроме шарнирного закрепления краев балки возможно также жесткое закрепление левого края или обоих краев одновременно.

Обозначим через M_i ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) изгибающие моменты, возникающие в местах постановки промежуточных опор при свободных колебаниях балки. Моменты M_0, M_n , изображенные на крайних опорах, разрешают обеспечить возможность равенства нулю углового перемещения в случае жесткого закрепления края. При шарнирном закреплении краев $M_0 = M_n = 0$. В системе координатных осей w, z в качестве положительных принимаются моменты, вращающие по стрелке часов.

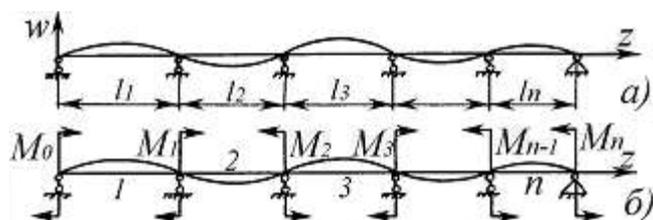


Рис. 1 Собственные частоты изгибных колебаний многопролетных балок постоянного сечения

Суть предлагаемого метода решения задачи заключается в следующем. Предварительно рассматриваются свободные колебания однопролетной шарнирно закрепленной балки при наличии моментов на ее краях. Полученное при этом решение используется для удовлетворения условий равенства угловых перемещений в точках стыка соседних пролетов балки, в результате чего образуется система $(n - 1)$ линейных однородных уравнений относительно неизвестных моментов M_i . Далее решают задачу о собственных значениях этой

системы уравнений, приравнявая нулю определитель, составленный из ее коэффициентов. Раскрывая последний, приходят к разрешающему трансцендентному уравнению, содержащему в качестве неизвестных собственные частоты колебаний системы.

На рис. 2 изображена схема однопролетной балки с приложенными на краях положительными моментами M_n, M_n . Функции прогиба балки w и угла поворота ее сечений v связаны соотношением $v(z) = \frac{dw(z)}{dz}$

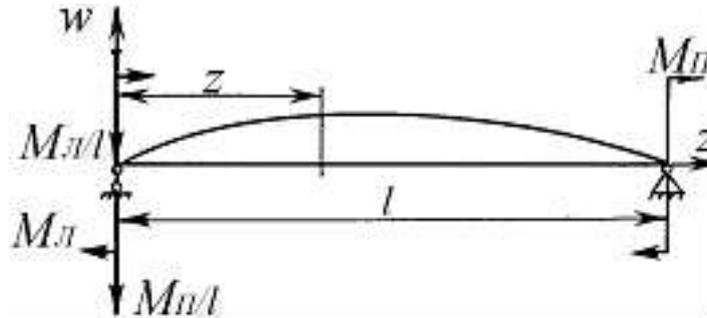


Рис.2. Схема однопролетной балки

Диф. уравнение свободных колебаний балки с распределенной массой

$$\frac{d^4 W}{dz^4} - \alpha^4 W = 0 \quad (1)$$

имеет решение [1]

$$W(z) = AS(\alpha z) + BT(\alpha z) + CU(\alpha z) + DV(\alpha z);$$

$$W'(z) = V = A\alpha V(\alpha z) + B\alpha S(\alpha z) + C\alpha T(\alpha z) + D\alpha U(\alpha z); \quad (2)$$

$$W''(z) = V' = A\alpha^2 U(\alpha z) + B\alpha^2 V(\alpha z) + C\alpha^2 S(\alpha z) + D\alpha^2 T(\alpha z);$$

Здесь обозначено:

$$\alpha = \sqrt{\omega \sqrt{\frac{\rho F}{EI}}}, \quad (3)$$

где ω - собственная частота колебаний; F - площадь сечения балки; EI - жесткость балки; ρ - плотность материала; $S(\alpha z), T(\alpha z), U(\alpha z), V(\alpha z)$ - функции Крылова, причем

$$S(\alpha z) = \frac{1}{2}[ch(\alpha z) + \cos(\alpha z)]; T(\alpha z) = \frac{1}{2}[sh(\alpha z) + \sin(\alpha z)]; \quad (4)$$

$$U(\alpha z) = \frac{1}{2}[ch(\alpha z) - \cos(\alpha z)]; V(\alpha z) = \frac{1}{2}[sh(\alpha z) - \sin(\alpha z)].$$

Константы интегрирования A, B, C, D , найденные из граничных условий:

$$1. z = 0 \quad W = 0; \quad 2. z = 0 \quad W'' = \frac{M_n}{EI}; \quad \text{ИМЕЮТ ВИД}$$

$$3. z = l \quad W = 0; \quad 4. z = l \quad W'' = \frac{M_n}{EI}.$$

$$A = 0; B = -\frac{M_n}{\alpha^2 EI} \cdot \frac{V(al)}{V^2(al) - T^2(al)} - \frac{M_n}{\alpha^2 EI} \cdot \frac{S(al)V(al) - U(al)T(al)}{V^2(al) - T^2(al)}; \quad (5)$$

$$C = \frac{M_n}{\alpha^2 EI}; D = \frac{M_n}{\alpha^2 EI} \cdot \frac{T(al)}{V^2(al) - T^2(al)} + \frac{M_n}{\alpha^2 EI} \cdot \frac{S(al)V(al) - U(al)T(al)}{V^2(al) - T^2(al)}.$$

Принимая во внимание, что

$$S(\alpha l)V(\alpha l) - U(\alpha l)T(\alpha l) = \frac{1}{2}[sh(\alpha l)\cos(\alpha l) - ch(\alpha l)\sin(\alpha l)]; \quad (6)$$

$$V^2(\alpha l) - T^2(\alpha l) = -sh(\alpha l)\sin(\alpha l),$$

получим, после несложных преобразований, следующие выражения для углов поворота левого и правого сечений балки:

$$V_{\varepsilon} = -\frac{M_{\varepsilon}}{\alpha EI}\chi(\alpha l) + \frac{M_n}{\alpha EI}\omega(\alpha l); \quad V_n = -\frac{M_{\varepsilon}}{\alpha EI}\omega(\alpha l) - \frac{M_n}{\alpha EI}\chi(\alpha l), \quad (7)$$

где

$$\chi(\alpha l) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{th(\alpha l)} - \frac{1}{tg(\alpha l)}\right]; \quad \omega(\alpha l) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sin(\alpha l)} - \frac{1}{sh(\alpha l)}\right] \quad (8)$$

Функции $\chi(\alpha l), \omega(\alpha l)$ играют фундаментальную роль при анализе собственных колебаний многопролетных балок.

Сравнивая функции (8) с аналогичными функциями (7), полученными при исследовании устойчивости многопролетных сжатых стержней [2], можно сделать вывод об идентичности с математической точки зрения задач, которые решаются. Такой вывод позволяет, в частности, осуществлять формальную запись решающего трансцендентного уравнения для разных частных случаев балок, руководствуясь соответствующими сведениями работы [2].

I. Однопролетная балка

а) Шарнирное закрепление обоих краев (рис. 3, а).

Из решения (7) и граничных условий (5) при $M_{\varepsilon} = 0, M_n = 0$ получим:

$$T^2(\alpha l) - V^2(\alpha l) = 0, \quad (9)$$

или согласно (6) $sh(\alpha l)\sin(\alpha l) = 0$

Поскольку $sh(\alpha l) \neq 0$ при всех αl , то $\sin(\alpha l) = 0$. Отсюда $\alpha l = \pi n$ ($n = 1, 2, 3 \dots$). На основе зависимости (3) собственные частоты

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} \quad (n = 1, 2, 3 \dots). \quad (10)$$

в) Жесткое закрепление левого края и шарнирное закрепление правого края (рис. 3, б). В этом случае $M_{\varepsilon} = 0; M_n < 0; V_n = 0$.

Трансцендентное решающее уравнение имеет вид:

$$\chi(\alpha l) = 0 \quad \text{или} \quad tg(\alpha l) - th(\alpha l) = 0. \quad (11)$$

Корни этого уравнения и соответствующие им собственные частоты

$$(\alpha l)_1 = 3,9269907; \quad \omega_1 = \frac{15,421256}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}};$$

$$(\alpha l)_2 = 7,0685833; \quad \omega_2 = \frac{49,96487}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}};$$

.....

$$(\alpha l)_n = \frac{4n+1}{4}\pi; \quad \omega_n = \left(\frac{4n+1}{4l}\right)^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}.$$

с) Жесткое закрепление обоих краев (рис. 3, в). В этом случае $M_x > 0; M_n < 0; V_x = 0; V_n = 0$. Разрешающее уравнение имеет вид:

$$\chi^2(\alpha l) - \omega^2(\alpha l) = 0 \quad (12)$$

Корни этого уравнения и соответствующие им собственные частоты колебаний:

$$(\alpha l)_1 = 4,7123889 \quad ; \quad \omega_1 = \frac{22,206609}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}};$$

$$(\alpha l)_2 = 7,8539815 \quad ; \quad \omega_2 = \frac{61,685025}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}};$$

.....

$$(\alpha l)_n = \frac{2n+1}{2} \pi; \quad \omega_n = \left(\frac{2n+1}{2l} \right)^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}.$$

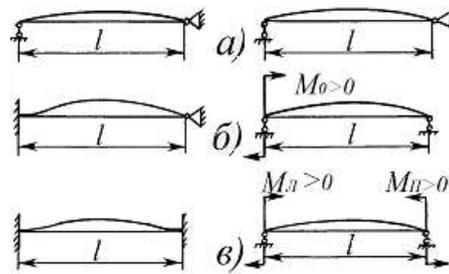


Рис. 3

2. Двухпролетная балка

На рис. 4, а изображена балка с жестко закрепленными краями, а на рис. 4, б - эквивалентная ей балка с шарнирно закрепленными краями. В рассматриваемом случае $M_0 > 0; M_1 > 0; M_2 > 0$. Разрешающее трансцендентное уравнение

$$-v_0 \frac{\omega^2(\alpha l_1)}{\chi(\alpha l_1)} + \chi(\alpha l_1) - v_2 \frac{\omega^2(\alpha l_2)}{\chi(\alpha l_2)} + \chi(\alpha l_2) = 0, \quad (13)$$

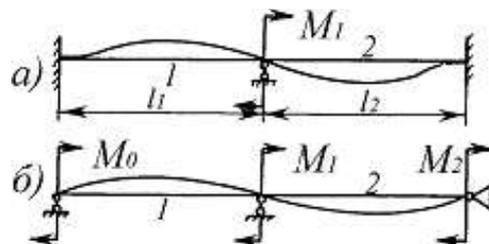


Рис. 4

3. Трехпролетная балка

На рис. 5, а изображена балка с жестко закрепленными краями, а на рис. 5, в - эквивалентная ей балка с шарнирно закрепленными краями. В

рассматриваемом случае $M_0 > 0; M_1 > 0; M_2 < 0; M_3 < 0$.

Разрешающее

транscendentное уравнение записывается в виде:

$$\omega^2(\alpha l_2) - \left\{ -v_0 \frac{\omega^2(\alpha l_1)}{\chi(\alpha l_1)} + \chi(\alpha l_1) + \chi(\alpha l_2) \right\} \times \left\{ -v_0 \frac{\omega^2(\alpha l_3)}{\chi(\alpha l_3)} + \chi(\alpha l_3) + \chi(\alpha l_2) \right\} = 0. \quad (14)$$

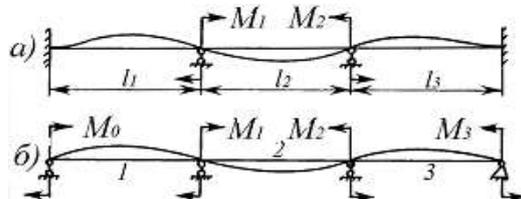


Рис. 5

4. Четырехпролетная балка

На рис.6, а показана балка с жестко закрепленными краями, а на рис. б, б - эквивалентная ей балка с шарнирно закрепленными краями. В данном случае $M_0 > 0; M_1 > 0; M_2 < 0; M_3 > 0; M_4 > 0$. Разрешающее транscendentное уравнение имеет вид:

$$\omega^2(\alpha l_2) - \left\{ -v_0 \frac{\omega^2(\alpha l_1)}{\chi(\alpha l_1)} + \chi(\alpha l_1) + \chi(\alpha l_2) \right\} \times \left\{ - \frac{\omega^2(\alpha l_3)}{-v_0 \frac{\omega^2(\alpha l_4)}{\chi(\alpha l_4)} + \chi(\alpha l_4) + \chi(\alpha l_3)} + \chi(\alpha l_3) + \chi(\alpha l_2) \right\} = 0 \quad (15)$$

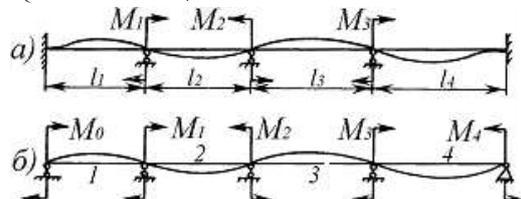


Рис. 6

Каждое из уравнений (13), (14), (15) имеет много действительных положительных корней. Ниже рассматривается последовательность поиска корней α_i и соответствующих им собственных круговых частот колебаний системы с распределенной массой ω_i . Предварительно необходимо установить интервал $[\alpha_{n-1} ; \alpha_n]$ изменения параметра $\alpha = \sqrt{\omega \sqrt{\frac{\rho F}{EI}}}$, внутри которого лежит (и причем единственный) искомый корень. Поскольку функции $\chi(\alpha l_i)$, $\omega(\alpha l_i)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), входящие в уравнения (13), (14), (15), испытают в точках $\alpha l_i = \pi n$ разрывы второго рода, следует придерживаться следующих правил при выявлении интервала $[\alpha_{n-1} ; \alpha_n]$. Сначала находят последовательность точек α_i разрыва функций

$\chi(\alpha l), \omega(\alpha l): 0; \frac{\pi}{l_1}; \dots; \frac{\pi}{l_4}; \frac{2\pi}{l_1}; \dots; \frac{2\pi}{l_4} \dots$ и располагают их в порядке возрастания:

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$.

На втором этапе осуществляют расчет левой части f соответствующего уравнения (13), (14), (15) с заданным шагом Δ в промежутке от $\alpha_0 + \varepsilon$ до $\alpha_1 - \varepsilon$ (ε - малое число) с целью выявления изменения знака f . Если на n -м шаге знак f изменяется, то фиксируют значения аргумента α_{n-1}, α_n и функций f_{n-1}, f_n . После этого применяют метод половинного деления для уточнения значений корня. Если на интервале $[\alpha_0; \alpha_1]$ знак f не изменяется, то переходят к рассмотрению следующего интервала $[\alpha_1 + \varepsilon; \alpha_2 - \varepsilon]$, повторив для него вышеописанную процедуру.

ПРИМЕР РАСЧЕТА

Латунная трубка с наружным диаметром $D = 0,019$ м и внутренним диаметром $d = 0,017$ м жестко закреплена на левом и правом краях и имеет две промежуточные шарнирные опоры. Параметры трубки $E = 1,05 \cdot 10^8$ кН / м²; $\rho = 8500$ кг / м³ $l_1 = l_3 = 1,275$ м; $l_2 = 2,490$ м. Нужно найти три собственные частоты колебаний системы.

Площадь сечения трубки и изгибная жесткость

$$F = \frac{\pi D^2}{4} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] = 5,6548668 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2.$$

$$EI = E \frac{\pi D^4}{64} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = 0,2412154 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Ниже приводятся результаты расчета, полученные при численном решении по специальной компьютерной программе трансцендентного уравнения (14).

Точки разрыва функций $X(\alpha l), W(\alpha l)$ следующие:

k(1)	0
k(2)	1,261684
k(3)	2,463994
k(4)	2,463994
k(5)	2,523368
k(6)	3,785051
k(7)	4,927989
k(8)	4,927989
k(9)	7,391983
k(10)	7,391983

Интервал, содержащий первый корень, найден

A=	1,592146
B=	1,682377
F(a)=	0,17106
F(b)=	-0,25377
искомый корень k[1/M]=	1,62563

Интервал, содержащий второй корень,
найден

A= 2,673368

B= 2,769536

F(a)= 1,385184

F(b)= -1,80034

искомый корень $k[1/M]=$ 2,71206

Интервал, содержащий третий корень,
найден

A= 4,103639

B= 4,187932

F(a)= 0,359821

F(b)= -0,00184

искомый корень $k[1/M]=$ 4,187603

КОНЕЧНЫЕ

РЕЗУЛЬТАТЫ

Собственная частота $\text{OMEGA}[1/c]=$ 59,20044

Собственная частота $\text{OMEGA}[1/c]=$ 164,7708

Собственная частота $\text{OMEGA}[1/c]=$ 392,8371

Список использованных источников

1. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник // под редакцией И.А.Биргера, Я.Г. Пановко, т.1. –М.: «Машиностроение», 1968.

2. Сухарев В.А. Численный метод расчета многопролетных стержней на устойчивость. Наукові праці ЮФ НУБіПУ України «КАТУ». Вып.150, 2012, с. 152.

Сухарев В.О. Визначення спектру власних частот коливань багатопрогонних стержнів з розподіленою масою

У статті запропонований новий підхід до вирішення проблеми чисельного розрахунку спектру власних частот коливань багатопрогонних стержнів з розподіленою масою. Рішення задачі зведено до комп'ютерного розшуку коренів складного трансцендентного рівняння.

Ключові слова: частоти коливання, багатопролітні балки, чисельний метод.

Sukharev V.A. Definition of the range of own frequencies of kolebaniy of multiflying beams with a distributed weight

New approach is presented in article to a solution of the problem of numerical calculation of a range of own frequencies of fluctuations of multiflying beams with a distributed weight. The solution of a task is consolidated to computer search of roots of the difficult transcendental equation.

Keywords: vibration frequency, multi-span beams, a numerical method.