УДК 378.147:51

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ И ЭКОНОМИКИ

Зубко И.П., ассистент
ЮФ НУБиП Украины «Кримский агротехнологический университет»

В статье рассмотрены некоторые задачи прикладной механики и экономики, которые решаются методами дифференциального и интегрального исчислений. Приведены примеры, которые целесообразно рассмотреть на практических занятиях по дисциплине «Высшая математика» со студентами инженерных и экономических специальностей.

Ключевые слова: *профессиональное образование, дифференциальное исчисление, геометрический смысл, определённый интеграл, междисциплинарная связь.*

Актуальность. Стремление Украины сегодня стать в один ряд с развитыми европейскими государствами, влечет за собой ряд дополнительных требований к высшей школе, направленных на повышение качества образования, в том числе математического.

Математика служит фундаментальной базой для инженерного и экономического образования. Перед студентами открываются хорошие научные перспективы и профессиональные возможности, если они хорошо освоят теорию дифференциального и интегрального исчисления и научатся решать задачи прикладного характера, зная определения и используя понятия дифференциала и определённого интеграла. Решение задач прикладной механики и экономики на практических занятиях по высшей математике позволяет преподавателю наглядно продемонстрировать междисциплинарную связь, а также показать актуальность данной темы будущим специалистам агропромышленного комплекса.

Постановка проблемы. На производстве инженеру часто приходится решать прикладные задачи, что невозможно без знания теоретических основ и практического инструментария высшей математики. Многие преподаватели сталкиваются с проблемой – как повысить мотивацию студентов при изучении математических дисциплин на практических занятиях. Мотивация напрямую связана с активностью студентов, повысить которую можно, например, посредством рассмотрения ряда задач профессиональной направленности.

Цель исследования. Рассмотреть примеры и задачи, актуальные для студентов экономических и инженерных специальностей, при решении которых используются основы дифференциального и интегрального исчислений.

Результаты исследования. Для достижения поставленной цели целесообразно рассмотреть следующие задачи прикладного характера:

- вычисление объёма производимой продукции;
- определение площади поверхности детали;
- нахождение работы;
- вычисление объёма детали;
- нахождение пути материальной точки.

Рассмотрим одну из задач экономики, решаемую с помощью определённого интегрирования: задача о вычислении объёма производства определённого вида продукции, за конкретный период времени.

Задача 1. Вычислить объём выпускаемой предприятием продукции за определённый период времени, если известна производственная функция. Пусть нам известна функция (1), которая выражает изменение производительности труда некоторого производства с течением времени:

$$z = f(t), \tag{1}$$

Тогда, объём выпускаемой продукции за период времени от t_1 до t_2, это тоже функция, которая может быть представлена в виде:

$$y = Q(t_1; t_2), \tag{2}$$

Объём выпускаемой продукции, который производит предприятие за определённый период времени, может быть вычислен по формуле, в которой подынтегральная функция имеет вид (1):

$$Q(t_1; t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \ . \tag{3}$$

Пример 1. Вычислить, какой объём сливочного масла (кг) будет изготовлено молочным цехом за год (306 семи часовых рабочих дней), если известна функция (4) - ежедневной производительности этого цеха:

$$f(x) = -0{,}0033\ t^2 - 0{,}089\ t + 20{,}96\ . \tag{4}$$

Решение. По формуле (3), используя формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определённого интеграла, вычисляем объём сливочного масла, который производит цех за один семичасовой рабочий день, пределы интегрирования при этом $0 \le t \le 7$:

$$V = \int_0^7 \left(-0{,}0033\ t^2 - 0{,}089\ t + 20{,}96\right)dt = \left(0{,}0033\ \frac{t^3}{3} - 0{,}089\ t^2 + 20{,}96\right)\Bigg|_0^7 =$$

= - 0,3773 - 2,1805 + 146, 72 = 144, 1622 (кг),

полученное значение умножаем на 306 рабочих дней в году и получаем: 44064 (кг) = 44,064 (тонн) в год.

Геометрический смысл определённого интеграла заключается в том, что число, которое находят в результате интегрирования на отрезке $[a; b]$ равно площади криволинейной трапеции, образованной графиком подынтегральной функции, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью абсцисс.

Задача 2. Вычислить площадь криволинейной трапеции, образованной графиком некоторой функции, осью абсцисс и прямыми $x = a$, $x = b$, параллельными оси *Oy*. В механике, задача о нахождении площади криволинейной трапеции эквивалентна определению площади некоторой плоской детали (пластины). Рассмотрим общий случай, к которому можно свести остальные частные случаи. Пусть обе функции, которые образуют криволинейную трапецию, положительны:

$$y = f_1(x) > 0 \text{ и } y = f_2(x) > 0\ , \tag{5}$$

при этом график функции $y = f_2(x)$ расположен выше графика функции $y = f_1(x)$, то есть для каждого $x \in [a; b]$ выполняется неравенство: $f_2(x) > f_1(x)$. Такую фигуру называют правильной относительно оси *0x* (рис. 1).

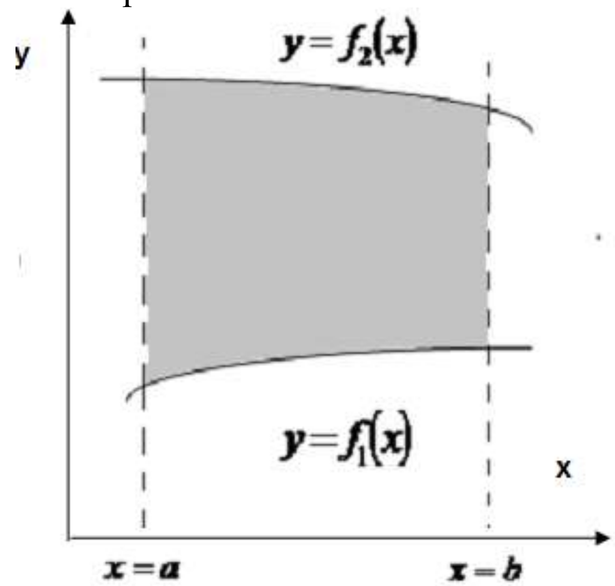

Рис. 1. Криволинейная трапеция

Тогда для вычисления площади данной фигуры применяют формулу (6):

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx\ , \tag{6}$$

справедливость которой следует из геометрического смысла определённого интеграла. Очевидно, что искомая площадь равна разности двух площадей криволинейных трапеций, образованных графиками функций $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$.

Пример 2. Вычислить площадь фигуры (плоской детали) которая ограничена линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.

Решение. Составим систему (7) уравнений заданных по условию линий. Её решением будут координаты двух точек (0;0) и (1;1), абсциссы которых являются пределами интегрирования:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases}. \tag{7}$$

На рис. 2 видно, что график функции $y = \sqrt{x}$ расположен выше графика функции $y = x^2$, поэтому подынтегральная функция (8) имеет вид $(\sqrt{x} - x^2)$. По формуле (6) вычисляем площадь искомой детали:

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\ \text{(кв.ед).} \qquad (8)$$

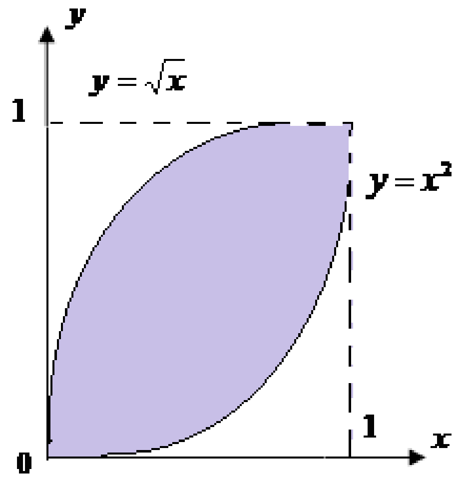

Рис. 2. Фигура, ограниченная линиями $y=\sqrt{x}$ **и** $y=x^2$

Если геометрическая фигура (деталь) имеет «сложную» форму, то ее разделяют горизонтальными линиями так, чтобы для каждой полученной части можно было применить формулу (6).

В том случае, когда криволинейная трапеция ограничена прямыми $y=c$ и $y=d$, графиком функции $x=\varphi(y)$ и осью *Oy*, её называют правильной относительно оси *0y* (рис. 3), площадь вычисляют по формуле:

$$S=\int_c^d\varphi(y)\,dy\ . \qquad (9)$$

Ряд физических задач, в том числе вычисление работы переменной силы по перемещению материальной точки, приводит нас также к интегральному исчислению.

Задача 3. Вычислить работу, которую совершает переменная сила *F(x)* по перемещению материальной точки *M* из положения A в положение B вдоль оси *Ox* (действие силы направлено параллельно оси). Работа, произведённая силой *F(x),* вычисляется по формуле (10):

$$A=\int_a^b F(x)dx\ . \qquad (10)$$

Пример 3. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 12 см (0,12 м) если сила N=100 растягивает её на 1 см (0,01м).

Решение. По закону Гука (11), сила упругости, возникающая в теле при его деформации, прямо пропорциональна величине этой деформации:

$$\mathrm{F}=\mathrm{kx}\ . \qquad (11)$$

Вычислим этот коэффициент: $k=\frac{F}{x}=\frac{100}{0,01}=10^4$. Следовательно, сила равна $F(x)=10000\cdot x$, а искомая работа по формуле (10):

$$A=\int_{0}^{0,12}10^{4}xdx=10^{4}\cdot\frac{x^{2}}{2}\Big|_{0}^{0,12}=72\ (дж).$$

Задача 4. Вычисление объёма тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* кривой $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$, производится по формуле:

$$V=\pi\int_{a}^{b}f^{2}(x)dx\ . \qquad (12)$$

Пример 4. Найти объём тела (детали), которое образовано вращением вокруг оси *Ox* плоской фигуры, ограниченной линиями: $y^2=9x$ и $y=3x$.

Решение. Для вычисления объёма составим систему уравнений, из которой найдём координаты точек пересечения (0;0) и (1;3) заданных линий:

$$\begin{cases} y^2=9x \\ y=3x \end{cases}, \qquad (13)$$

абсциссы которых являются пределами интегрирования в (12).

График прямой $y=3x$ расположен ниже графика функции $y^2=9x$ (рис. 4). Тогда по формуле (12) под интегралом получаем разность двух функций, находим искомый объём детали:

$$V=\pi\int_{0}^{1}\left(9x-9x^2\right)dx=\pi\frac{9x^2}{2}-\pi\frac{9x^3}{3}\Bigg|_{0}^{1}=\frac{3\pi}{2}\ \text{(куб.ед.)}. \qquad (14)$$

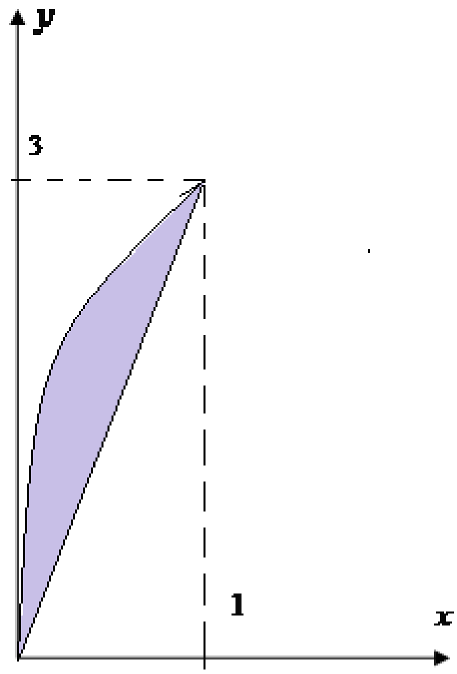

Рис. 4. Фигура, ограниченная линиями $y^2=9x$ **и** $y=3x$

Заметим, что возможен другой случай: криволинейная трапеция вращается не вокруг оси *Ox*, а вокруг координатной оси *Oy*. В этой ситуации подынтегральная функция имеет вид $x=g(y)$, а формула для вычисления объёма:

$$V = \pi \int_{c}^{d} g^{2}(y)dy \ . \qquad (15)$$

Задача 5. Пусть материальная точка М перемещается вдоль прямой с переменной скоростью:

$$V = V(t). \qquad (16)$$

Тогда путь, пройденный этой точкой за определённый промежуток времени от t_1 до t_2 равен:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt \ . \qquad (17)$$

Пример 5. Скорость движения точки $v = 0{,}7t^2$ (*м/сек*). Найти путь S, пройденный точкой за время $t = 10$ *сек.*, после начала движения. Чему равна средняя скорость движения на этом участке пути?

Решение. Из дифференциального исчисления известно, что $v = \frac{ds}{dt}$, следовательно, по условию задачи $\frac{ds}{dt} = 0{,}7t^2$, отсюда $ds = 0{,}7t^2dt$.

Учитывая, что $0 \le t \le 10$, по формуле (17) имеем:

$$s = \int_{0}^{10} 0{,}7t^2 dt = 0{,}7 \frac{t^3}{3}\bigg|_{0}^{10} = \frac{700}{3} \text{ м};$$

$$v_{ср.} = \frac{s}{t} = \frac{70}{3} \text{ м/сек.}$$

Задача 6. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать жидкость из котла, который имеет формулу параболоида (рис. 5). Радиус его основания R , глубина H . Котёл наполнен жидкостью, удельный вес которой γ .

Решение. Котел представляет собой параболоид вращения радиуса R и высоты H в трехмерной системе координат (рис. 5). Сечение любой плоскостью, проходящей через ось *0z*, – парабола *AOB* вида:

$$y = ax^2 . \qquad (18)$$

Найдём параметр a. Координаты точки *B* должны удовлетворять уравнению (18), значит: $H = aR^2$, отсюда:

$$a = \frac{H}{R^2}, \qquad (19)$$

следовательно:

$$y = \frac{H}{R^2}x^2 . \qquad (20)$$

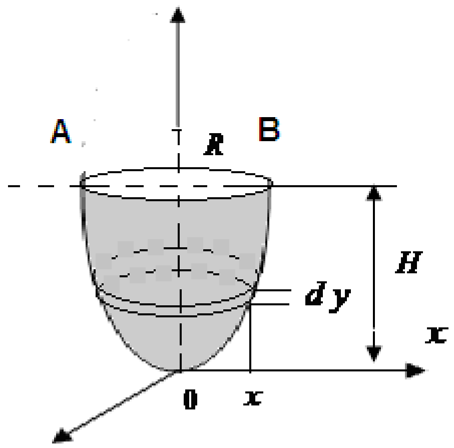

Рис. 5. Параболоид вращения

Разделим параболоид на слои плоскостями, параллельными поверхности жидкости. Пусть толщина слоя на глубине $H-y$ равна dy. Тогда, принимая приближённо слой за цилиндр, получим его объём:

$$dV=\pi x^2 dy\ , \qquad (21)$$

Из уравнения параболы найдём:

$$x^2=\frac{yR^2}{H}. \qquad (22)$$

Подставив равенство (22) в формулу (21), мы получим:

$$dV=\frac{\pi yR^2}{H}dy\ , \qquad (23)$$

т. е. вес слоя жидкости равен:

$$\gamma dV=\frac{\pi yR^2\gamma}{H}dy\ . \qquad (24)$$

Следовательно, чтобы выкачать жидкость с глубины $H-y$, потребуется затратить работу:

$$dA=\frac{\pi yR^2\gamma(H-y)}{H}dy\ . \qquad (25)$$

Учитывая: $0\le y\le H$ получаем, что искомая работа равна:

$$A=\int_0^H\frac{\pi yR^2\gamma(H-y)}{H}dy=\frac{\pi R^2\gamma}{H}\int_0^H y(H-y)dy=\frac{\pi R^2\gamma}{H}\left(\frac{Hy^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^H=\frac{\pi R^2\gamma}{H}\left(\frac{H^3}{2}-\frac{H^3}{3}\right),$$

окончательно:

$$A=\frac{1}{6}\pi R^2\gamma H^2. \qquad (26)$$

Пример 6. Решить задачу о вычислении работы, которую необходимо произвести при выкачивании жидкости из котла, если известны числовые характеристики: радиус основания R =3 м, глубина H =5 м. Котёл наполнен жидкостью, удельный вес которой γ.

Подставим заданные значения параметров в формулу (26) и найдём искомую работу:

$$A=\frac{1}{6}\pi 3^2 800\cdot 5^2=30000\ \pi\,(кГм)\approx 30000\cdot 9{,}81\,\pi\,(дж)=294300\ \pi\,(дж).$$

Выводы. Решение рассмотренных задач способствует не только повышению активности студентов на практических занятиях, но и помогает преподавателю ярко продемонстрировать связь высшей математики со специальными дисциплинами, а также усилить мотивацию изучения основ дифференциального и интегрального исчислений. Знания по основным разделам учебного курса «Высшая математика» позволит студентам экономических и инженерных специальностей решать задачи профессиональной направленности. Свободное владение теоретическими положениями дисциплины, а также математическим инструментарием, не только расширит профессиональный кругозор студента, но и поможет будущим инженерам и экономистам в проведении научных исследований, а также при написании магистерских работ, курсовых и дипломных проектов.

Список использованных источников

1. Подольский В.А., Суходский А.М. Сборник задач по математике для техников-программистов. М., Высшая школа, 1999.
2. Высшая математика для экономистов: Практикум для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / под ред. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., переработанное и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007.-479 с.
3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Том 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1996.
4. Сидоренко-Ніколашина О.Л. Вища математика: Навчальний посібник для студентів інженерно-технологічних спеціальностей вищих навчальних закладів / Е.Л.Сидоренко-Николашина. – Сімферополь: Сонат, 2009. – 252 с.
5. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2003. – 288с.

Зубко І.П. Застосування методів диференціального й інтегрального числень при вирішенні деяких завдань прикладної механіки та економіки

У статті розглянуті деякі завдання прикладної механіки і економіки, які вирішуються методами диференціального та інтегрального числення. Наведені приклади, які доцільно розглянути на практичних заняттях з дисципліни «Вища математика» зі студентами інженерних і економічних спеціальностей.

Ключові слова: професійна освіта, диференціальне числення, геометричний сенс, визначений

Zubco I.P. Application of differential and integral calculus in solving some problems of applied mechanics and economics

In article some problems of applied mechanics and economy which are solved by means of methods of differential and integrated calculations are considered. Examples which can be considered on a practical training on discipline the higher mathematics with students of engineering and economic specialties are given.

Keywords: professional education, differential calculus, geometrical sense, certain integral, interdisciplinary communication.

інтеграл, міждисциплінарний зв'язок.