

УДК 681.5: 637.133.3

*Н.М. Луцька, канд. техн. наук  
Національний університет  
харчових технологій*

## ДОСЛІДЖЕННЯ РОБАСТНОЇ СТІЙКОСТІ ОПТИМАЛЬНОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМ ОБ'ЄКТОМ ХАРЧОВОЇ ПРОМИСЛОВОСТІ

*В роботі досліджується оптимальна система керування технологічним об'єктом молочної промисловості, що працює в умовах невизначеності. Наведено математичну модель об'єкта управління у вигляді диференціальних рівнянь та у просторі змінних стану, визначено характеристичні поліноми систем для неперервного та дискретного варіанту. На основі характеристичних поліномів неперервної та дискретної системи проводяться аналітичні та графічні дослідження робастної стійкості системи в межах заданої невизначеності.*

*Ключові слова: робастна стійкість, характеристичний поліном, область поліноміального сімейства, інтервальна невизначеність, власні значення.*

Практика використання теорії оптимальних систем при вирішенні конкретних технічних задач стосовно технологічних об'єктів показала, що оптимальні системи, особливо ті, що синтезовані за квадратичним критерієм якості, чутливі до параметрів моделі реального об'єкта та іноді втрачають не тільки оптимальність, а й стійкість в тих випадках, коли апріорна інформація про об'єкт та зовнішнє середовище відома не повністю, а лише з деякою ймовірністю, що задається інтервалами належності. Тому виникає необхідність після синтезу оптимальної системи керування з квадратичним критерієм якості, перевірити систему на робастну стійкість.

Один з перших та досі популярний підхід, що використовується для перевірки робастної стійкості системи є використання теореми В.Л. Харитонова [1]. Тут розглядається клас неперервних динамічних систем, що описується рівнянням

$$\dot{x} = Fx \quad (1)$$

де  $F$  — матриця Фробеніуса з інтервальними коефіцієнтами  $\underline{a}_i \leq a_i \leq \overline{a}_i$ ,  $i = 0 \dots n$ . Робастна стійкість системи перевіряється за критерієм Гурвиця відповідним чином складених чотирьох поліномів. Також були отримані загальні результати теореми В.Л. Харитонова, коли інтервальні коефіцієнти комплексні [2].

Однак аналогів теореми В.Л. Харитонова для дискретних систем не існує, так як і загальних ефективних методів аналізу робастної стійкості дискретних систем. Це обумовлено суттєво різними вимогами до коренів характеристичного поліному неперервних та дискретних систем. Висновки щодо робастної стійкості системи проводяться з урахуванням виду матриці  $F$  та не узагальнюються на відповідний клас [2].

В роботі досліджується робастна стійкість технологічного об'єкта управління як в неперервному так і в дискретному варіанті. Для порівняння двох підходів обрано математичну модель трьохсекційної пластинчатої пастеризаційно-охолоджувальної установки ОПУ-10 молочного виробництва, що описується системою з чотирьох лінійних диференціальних рівнянь.

Математична модель об'єкта дослідження у відхиленнях має вигляд ( $\tau = 1000t$ , де  $t$  — час, с;  $t$  — час моделювання, знак  $D$  — не прописано):

$$\begin{cases} \frac{dt_{z\theta}}{d\tau} = -13.6t_{z\theta} + 676G_n + 13.6t_{x\theta}; \\ \frac{dt_{mn}}{d\tau} = -12.3t_{mn} + 6.6t_{mp} - 41.4G_m + 5.6t_{z\theta}; \\ \frac{dt_{x\theta}}{d\tau} = -5.5t_{x\theta} - 9.2t_{z\theta} + 2.7t_{mp} - 3.6G_m; \\ \frac{dt_{mp}}{d\tau} = -6.8t_{z\theta} + 5.4t_{mn} - 16.9G_m; \end{cases} \quad (2)$$

де  $t_{z\theta}$  — температура гарячої води,  $t_{mn}$  — температура пастеризації,  $t_{x\theta}$  — температура холодної води,  $t_{mp}$  — температура молока рекуперації,  $G_n$  — витрата пари,  $G_m$  — витрата молока.

Перетворимо об'єкт у простір змінних стану та врахуємо інтервальну невизначеність

$$\dot{x} = (A + \Delta_A)x + Bu. \quad (3)$$

Тут вектор координат стану та вектор управління визначають

$$x = \begin{bmatrix} t_{z\theta} \\ t_{mn} \\ t_{x\theta} \\ t_{mp} \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} G_n \\ G_m \end{bmatrix}, \quad (4)$$

Матриця стану системи та матриця управління відповідно становлять

$$A = \begin{bmatrix} -13.6 & 0 & 13.6 & 0 \\ 5.6 & -12.3 & 0 & 6.6 \\ -9.2 & 0 & -5.5 & 2.7 \\ -6.8 & 5.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 676 & 0 \\ 0 & -41.4 \\ 0 & -3.6 \\ 0 & -16.9 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Знайдемо власні значення матриці стану системи

$$\lambda = \begin{bmatrix} -15.5 \\ -8.9 + 10.3j \\ -8.9 - 10.3j \\ 1.8 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

тобто останнє власне значення додатне, а система — нестійка.

Враховуючи, що числові параметри матриці  $A$  отримані з рівнянь теплових балансів та визначаються за співвідношенням  $\frac{C_i G_{i0}}{T_j}$ , де  $C_i$ ,  $G_{i0}$  — теплоємність та номінальна витрата відповідного теплового потоку,  $T_j$  — постійна часу відповідної ємності, тоді матриця інтервальної невизначеності має вигляд:

$$\Delta_A = \begin{bmatrix} \pm 3\% & 0 & \pm 3\% & 0 \\ \pm 0.5\% & \pm 0.5\% & \pm 0.5\% & 0 \\ \pm 2\% & 0 & \pm 2\% & \pm 2\% \\ \pm 1\% & \pm 1\% & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Оптимальний матричний регулятор зі зворотнім зв'язком [3], що синтезований за квадратичним критерієм якості запишеться:

$$u = -Kx \quad (8)$$

де

$$K = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.1 & -0.5 & -0.4 \\ 0 & -0.7 & 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

а власні значення замкненої системи прийняли такі числові величини:

$$\lambda = \begin{bmatrix} -675.8 \\ -46.3 \\ -14.7 \\ -8.0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Враховуючи (3) та (8) маємо

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= (A + \Delta_A)x + Bu = (A + \Delta_A)x + B(-Kx) = \\ &= (A - BK + \Delta_A)x = (A_3 + \Delta_A)x, \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$A_3 = \begin{bmatrix} -684.1 & -93.7 & 356.0 & 251.7 \\ 5.7 & -40.7 & -1.6 & -29.0 \\ -9.2 & -2.4 & -5.6 & -0.4 \\ -6.7 & -6.2 & -0.7 & -14.5 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Знайдемо матрицю Фробеніуса (1) за алгоритмом, що використовує матрицю керованості [4]. Перетворення подібності має вигляд

$$\dot{z} = P^{-1}APz, \quad (13)$$

де  $z = Tx$ , а  $T$  — це обернена матриця від  $P$ .

Отже, матриця Фробеніуса та матриця перетворення координатного базису становлять

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3.7 \cdot 10^6 \\ 1 & 0 & 0 & -7.9 \cdot 10^5 \\ 0 & 1 & 0 & -4.8 \cdot 10^4 \\ 0 & 0 & 1 & -744.8 \end{bmatrix};$$

$$T = \begin{bmatrix} 1.48 \cdot 10^{-3} & -0.14 & -0.44 & 0.33 \\ 0 & -22.7 \cdot 10^{-3} & -34.4 \cdot 10^{-3} & 27.3 \cdot 10^{-3} \\ 0 & -0.86 \cdot 10^{-3} & -0.6 \cdot 10^{-3} & 88.2 \cdot 10^{-6} \\ 0 & -1.22 \cdot 10^{-6} & -0.82 \cdot 10^{-6} & 0.07 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Розрахувавши власні значення матриці  $F$ , що співпадають з власними значеннями матриці  $A_3$ , зроблено висновок, що матриця Фробеніуса розрахована правильно.

Побудуємо інтервальний характеристичний поліном матриці  $F$ . Для цього розраховуються характеристичні поліноми кутових реалізацій матриці  $F$  в просторі

параметрів  $D_A$ . В результаті отримуємо наступний інтервальний характеристичний поліном:

$$[D(\lambda)]=[1;1]\lambda^4+[3.9\cdot 10^6;3.4\cdot 10^6]\lambda^3+[8.2\cdot 10^5;7.7\cdot 10^5]\lambda^2+[4.9\cdot 10^4;4.7\cdot 10^4]\lambda+[746;743]. \quad (15)$$

У відповідності до процедури В.Л. Харитонова будуюмо чотири поліноми

$$D_1(\lambda)=\lambda^4+3.9\cdot 10^6\lambda^3+8.2\cdot 10^5\lambda^2+4.7\cdot 10^4\lambda+743;$$

$$D_2(\lambda)=\lambda^4+3.9\cdot 10^6\lambda^3+7.7\cdot 10^5\lambda^2+4.7\cdot 10^4\lambda+746; \quad (16)$$

$$D_3(\lambda)=\lambda^4+3.4\cdot 10^6\lambda^3+8.2\cdot 10^5\lambda^2+4.9\cdot 10^4\lambda+743;$$

$$D_4(\lambda)=\lambda^4+3.4\cdot 10^6\lambda^3+7.7\cdot 10^5\lambda^2+4.9\cdot 10^4\lambda+746.$$

Перевіряючи поліноми В.Л. Харитонова за критерієм Гурвиця робимо висновок, що система робастно стійка, тобто система (2), що замкнена від'ємним зворотнім зв'язком (8), (9) зберігає стійкість в заданій області невизначеності (7).

Також це можна побачити побудувавши область значень  $S(\omega)$  (рис.1). Згідно з принципом виключення нуля [2], необхідною та достатньою умовою стійкості поліноміального сімейства (15) є вираз:

$$0 \notin S(\omega)=\{D(j\omega, q): q \in Q\}, \text{ для всіх } 0 \leq \omega < \infty, \quad (17)$$

де  $q$  — змінні параметри коефіцієнтів характеристичного поліному.

При  $\omega = 0$  маємо  $D(0) = a_0 > 0$ , тобто  $0 \notin S(0)$ . Як видно з рис.1,  $S(\omega)$  не дорівнює пустій множині для всіх  $0 \leq \omega < \infty$  так як рух кожної точки  $D_i(j\omega)$  паралельний (на рисунку рух показаний стрілками).

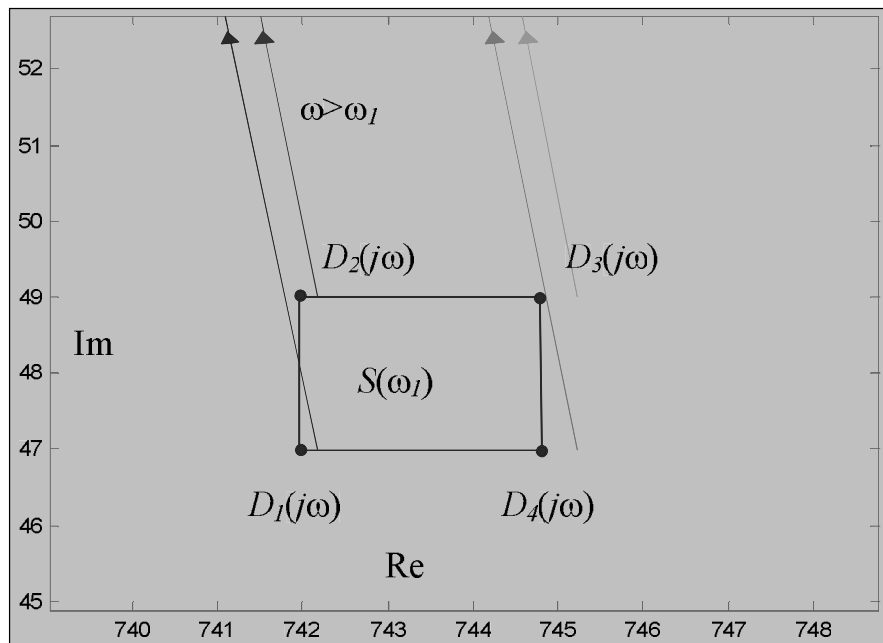


Рис. 1. Область поліноміального сімейства  $S(\omega_I)$  для неперервної системи,  $\omega_I=0.01$  рад/с.

Після перетворення об'єкта до дискретного виду, зведення до канонічного виду та замиканням оптимальним дискретним регулятором, оптимальна система має вигляд (час моделювання, що складає  $0.025c$  співпадає з реальним часом):

$$x(k+1) = (A_0 + \Delta_A)x(k), \quad (18)$$

де

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.91 \\ 1 & 0 & 0 & -3.62 \\ 0 & 1 & 0 & -5.52 \\ 0 & 0 & 1 & -3.8 \end{bmatrix} - \quad (19)$$

номінальна матриця, а власні значення оптимальної системи керування складають:

$$\lambda = \begin{bmatrix} -0.9510 + 0.2157j \\ -0.9510 - 0.2157j \\ -0.9516 + 0.2116j \\ -0.9516 - 0.2116j \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Як видно з (20) запас стійкості синтезованої дискретної системи досить малий. Характеристичний поліном для матриці  $A_0$  мають вигляд:

$$P_0(z) = z^4 + 0.91z^3 + 3.62z^2 + 5.52z + 3.8. \quad (21)$$

Система буде стійкою тоді, коли на всій області «збурених» об'єктів  $|z_j| < 1$ ;  $j = \overline{1; m}$ , де  $z_j$  — корені характеристичного рівняння. Згідно з [2] необхідною та достатньою умовою робастної стійкості сімейства поліномів є

$$0 \notin S(\omega) = \{P(e^{j\omega}, q) : q \in Q\}, \text{ для всіх } 0 \leq \omega \leq 2\pi, \quad (22)$$

де  $S(\omega)$  — багатокутник з центром в точці  $P_0(e^{j\omega})$  та сторонами, що паралельні  $m_k g a_k e^{j\omega k}$ ,  $k = 0 \dots n$ , а  $m_k$  — будь-які числа в діапазоні  $[-1; 1]$ .

Перетворимо задану невизначеність до наступної форми

$$|a_i - a_{i0}| \leq \gamma \alpha_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 0 \dots n. \quad (23)$$

Нехай  $\gamma = 0.1$ , тоді  $\alpha_4 = 0$ ;  $\alpha_3 = 28.7$ ;  $\alpha_2 = 58.0$ ;  $\alpha_1 = 29.3$ ;  $\alpha_0 = 1.2$ .

Аналітично умова (22) згідно [2] формується так:

$$\gamma < \gamma(\omega) = \frac{\max_{k=0 \dots 4} \left| \left( a_0^0 \cos(0-k)\omega + a_1^0 \cos(1-k)\omega + a_2^0 \cos(2-k)\omega + a_3^0 \cos(3-k)\omega + a_4^0 \cos(4-k)\omega \right) \right|}{\alpha_0 |\cos(0-k)\omega| + \alpha_1 |\cos(1-k)\omega| + \alpha_2 |\cos(2-k)\omega| + \alpha_3 |\cos(3-k)\omega| + \alpha_4 |\cos(4-k)\omega|} \quad (24)$$

$$\gamma < \gamma(0) = \frac{|a_0^0 + a_1^0 + a_2^0 + a_3^0 + a_4^0|}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}; \quad (25)$$

$$\gamma < \gamma(\pi) = \frac{|a_0^0 - a_1^0 + a_2^0 - a_3^0 + a_4^0|}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}. \quad (26)$$

Після розрахунків отримуємо:

$$\gamma(\omega) = [1.21; 3.22] \text{ при } \omega \neq 0, \pi;$$

$$\gamma(0) = 0.13;$$

$$\gamma(\pi) = 0.02.$$

Умова (26) не виконується, тобто дискретна система нестійка на даному інтервалі невизначеності.

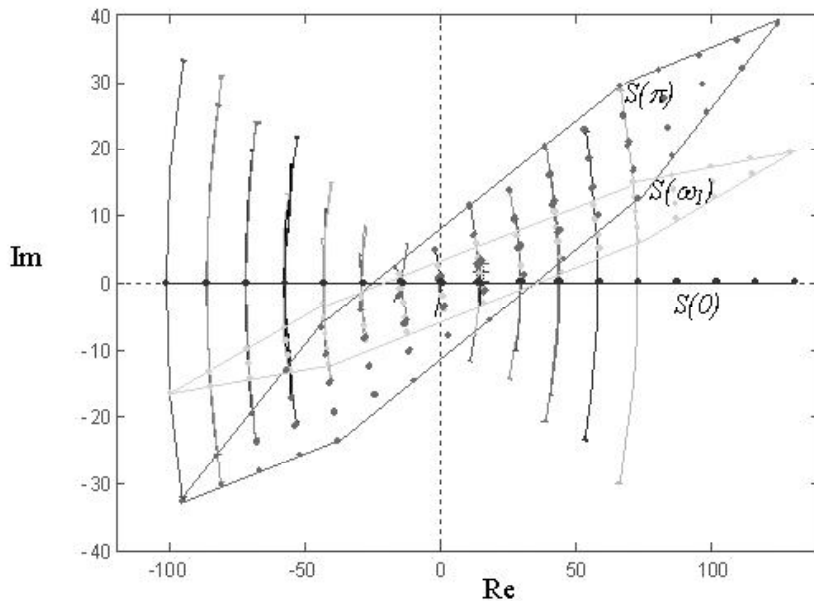
Побудуємо область значень поліноміального сімейства  $S(\omega)$ . Згідно з [2]:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \left\{ P_0(e^{j\omega}) + \gamma \sum_{k=0}^n \alpha_k \mu_k e^{j\omega k} \right\} = \left\{ P_0(z) + \gamma \sum_{k=0}^n \alpha_k \mu_k z^k \right\} = \\ &= \left\{ P_0(z) + \gamma (\alpha_0 \mu_0 + \alpha_1 \mu_1 z + \alpha_2 \mu_2 z^2 + \alpha_3 \mu_3 z^3 + \alpha_4 \mu_4 z^4) \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

де  $z = e^{j\omega}$ .

Як видно з рис.2, при  $\omega > 0$  область  $S(\omega)$  — багатокутник (показаний лініями та крапками одного кольору), а при  $\omega = 0$  — відрізок. Область поліноміального сімейства зі збільшенням частоти збільшується та повертається відносно  $P_0$  (рух точок області показаний стрілками). При  $\omega = \pi$  область  $S(\omega)$  не є відрізком, тобто дискретна система на даній області невизначеності нестійка.

**Висновки.** Дослідження показали, що перевірка оптимальної системи керуван-



**Рис. 2.** Область поліноміального сімейства для дискретної системи,  $\omega_j = 0.01$  рад/с.

ня, що синтезована за квадратичним критерієм якості, в неперервному та дискретному варіанті проводиться суттєво по-різному. Робастна стійкість неперервної системи не гарантує робастної стійкості дискретної системи на тому ж інтервалі невизначеності.

Власні значення синтезованої оптимальної дискретної системи досить близько наближаються до границі стійкості (запас стійкості дискретної системи малий), що і пояснює відсутність робастної стійкості останньої. Тому, на практиці, де використовуються дискретні системи, недоцільно використовувати синтезований оптимальний регулятор для обраної математичної моделі об'єкта.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Харитонов В.Л. Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2002. — Т. 1, вып. 11. — С. 2086–2088.
2. Поляк Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
3. Луцька Н.М., Керованість та спостережність технологічних об'єктів управління / Луцька Н.М., Савченко Т.В. // Восточно-европейский журнал передовых технологий. — 2010. — № 1/5 (43). — С. 4–7.
4. Kailath, T. Linear Systems, Prentice-Hall, 1980.

*Н.Н. Луцкая*

### Исследование робастной устойчивости оптимальной системы управления технологическим объектом пищевой промышленности

*В работе исследуется робастная устойчивость оптимальной системы управления, синтезируемая по квадратичному критерию качества, в непрерывном и дискретном варианте. Объектом управления выбран технологический объект пищевой промышленности — пастеризационно-охладительная установка молочного завода, математическая модель которой имеет четыре линейных дифференциальных уравнения и матрицу неопределенностей.*

*Приведены матричный коэффициент усиления оптимального регулятора, матрицы и собственные значения замкнутой системы, а также интервальные характеристические полиномы в непрерывном и дискретном случаях. Для непрерывной оптимальной системы исследование робастной устойчивости проводится по теореме Харитонова и принципа исключения нуля. Также по принципу исключения нуля и аналитическим формулам делается проверка робастной устойчивости дискретной оптимальной системы. Приведены графики полиномиального семейства непрерывной и дискретной систем.*

*Исследования показали, что непрерывная оптимальная система является устойчивой, а дискретная — неустойчивой в заданной интервальной неопределенности.*

**Ключевые слова:** робастная устойчивость, характеристический полином, область полиномиального семейства, интервальная неопределенность, собственные значения.

*N.N. Lutskaya*

### Investigation robust stability of optimal control system for technological object of food industry

*In the work study robust stability of optimal control system of synthesis to square criteria quality in continuously and discretely varyante. Object management selected technological object of food industry — pasteurization-cooling plant. Mathematical model this plant described four by linear differential equations.*

*Given matrix gain coefficients of optimal regulator, matrices and eigenvalues of closed system and interval characteristic polynomials in continuously and discrete case. For continuous optimal system robust stability study is on Kharitonov's theorem and the principle exclusive of zero. Also on the principle of exclusion of zero and analytical formulas concludes that robust stability of discrete optimal system. Given the graphs of polynomial families of continuous and discrete systems.*

**Keywords:** robust stability, the characteristic polynomial, the area of the family of polynomial, interval vagueness, eigenvalues.

e-mail: jimp@ukr.net

Надійшла до редколегії 01.02.2012 р.