УДК 681.513.5

ANALYTICAL REPRESENTATION OF PERTURBATIONS WHILE SOLVING ISSUE OF OPTIMIZATION FOR MULTIDIMENSIONAL OBJECT MANAGEMENT

B. Goncharenko, A. Polzik
National University of Food Technologies

Key words:
Optimal control
The object of control
Disturbance
Area restrictions
Ellipsoid
The lagrange function
Conditions of uncertainty

Article history:
Received 25.01.2013
Received in revised form 18.02.2013
Accepted 3.03.2013

Corresponding author:

E-mail:
npnuht@ukr.net

ABSTRACT

Perturbations acting on the control item (CI) are analyzed and approximated. Staging and optimizing solutions to the problem of finding the optimal control and the phase trajectory are defined. The types of disturbances of multidimensional CI that make its operation uncertain are analyzed. The problem of constructing a minimum volume ellipsoid, which includes external CI disturbances, is outlined and the conditions, minimizing the volume, are formulated. To solve the optimization problem of finding the minimum volume ellipsoid is used the method of Lagrange multipliers, for which a special function is constructed. The optimal parameters were determined from the perturbations of the ellipsoid by minimizing the Lagrange function. These results facilitate the solution of the optimization issue of analytical design of optimal controller (ADOK), and therefore offer a rational way to account for the effects of disturbances applied to the multidimensional CI, functioning under the conditions of uncertainty.

АНАЛІТИЧНЕ ПОДАННЯ ЗБУРЕНЬ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ КЕРУВАННЯ БАГАТОВИМІРНИМ ОБ'ЄКТОМ

Б.М. Гончаренко, А.М. Ползик
Національний університет харчових технологій

Проаналізовані та апроксимовані збурення, що діють на об'єкт керування (ОК), в тому числі і невідомої природи. Окреслені постановка та шлях розв'язання оптимізаційної задачі пошуку оптимального керування та фазової траєкторії. Проаналізовані різновиди збурень багатовимірного ОК, які роблять його функціонування невизначеним. Розглянута задача побудови еліпсоїда збурень мінімального об'єму, до якого належать зовнішні невідомої природи збурення ОК, сформульовані умови, що мінімізують його об'єм. Для розв'язання оптимізаційної задачі пошуку еліпсоїда мінімального об'єму використано метод множників Лагранжа, для яких побудована спеціальна функція. Оптимальні параметри еліпсоїда збурень визначались з умови мінімізації функції Лагранжа. Отримані результати полегшують розв'язання оптимізаційної задачі аналітичного конструювання оптимального регулятора (АКОР) та пропонують раціональний шлях врахування дії збурень невідомої природи, прикладених до багатовимірного ОК, що функціонує в умовах невизначеності.

Ключові слова: *оптимальне керування, об'єкт керування, збурення, область обмежень, еліпсоїд, функція Лагранжа, умови невизначеності.*

Аналітичне конструювання оптимального регулювання вимагає крім наявності аналітичної моделі об'єкта керування, ще й визначених обмежень на керування і траєкторію стану, крайових умов і обраного критерію оптимальності та і врахування закономірностей змінювання та прикладання до ОК збурень, які наряду з похибками вимірювання стану об'єкта викликають його невизначеність. Отже в оптимізаційних задачах набувають особливого значення аналіз та зручне подання збурень невідомої природи, що діють на об'єкт керування.

Задача синтезу оптимальних систем керування відноситься до класу оптимізаційних задач і формулюється як варіаційна задача. Для її розв'язку крім рівняння об'єкта керування повинні бути задані обмеження на керування і на фазовий вектор (траєкторію стану), крайові умови і обраний критерій оптимальності [1].

Зазвичай рівняння об'єкта задається або в нормальній формі

$$x = f(x,u,t)\ , \tag{1}$$

або в скалярному вигляді

$$x_i = f_i(x,u,t), i = 1,2,...,n, \tag{2}$$

де $x = (x_1,...,x_n)^T$ — фазовий вектор; $u = (u_1,...,u_r)^T$ – керування або вектор керування.

На керування і фазовий вектор можуть бути накладені обмеження у вигляді кінцевих співвідношень — рівностей або нерівностей, які в загальному вигляді можна записати так:

$$u(t) \in U_t, \tag{3}$$

$$x(t) \in X_t, \tag{4}$$

де U_t та X_t — деякі задані множини, які залежать від часу, причому $U_t \subseteq R^r$ і $X_t \subseteq R^n$, тобто, U_t — підмножина r-мірного простору, а X_t — підмножина n-мірного простору. Співвідношення (3) називається обмеженням на керування, а співвідношення (4) — обмеженням на фазовий вектор або фазовим обмеженням.

При цьому обмеження на керування і фазовий вектор можуть не розділятися і записуються в загальному випадку:

$$(u(t), x(t)) \in V_t, V_t \in R^{n+r}\ . \tag{5}$$

Крайові (граничні) умови — обмеження на фазовий вектор в початковий t_0 і кінцевий t_f моменти часу — в загальному вигляді можна записати так:

$$x(t_0) \in X_0,\ x(t_f) \in X_f\ . \tag{6}$$

Вектор $x(t_0)$ називаються лівим, а вектор $x(t_f)$ – правим кінцем траєкторії. Крайові умови мають вигляд (6), якщо обмеження на лівий і правий кінець траєкторії розділені. В протилежному випадку вони записуються у загальному вигляді:

$$(x(t_0), x(t_f)) \in V_0, V_0 \subset R^{2n}\ . \tag{7}$$

Критерій оптимальності, який є числовим показником якості системи, задається у вигляді функціоналу:

$$J = J(u(t), x(t)) \tag{8}$$

Тоді задача оптимального керування формулюється наступним чином: при заданих рівнянні об'єкта керування (1) або (2), обмеженнях (3) і (4) та крайових умовах (6) необхідно знайти такі керування із зворотним зв'язком *u** (*x*(*t*), *t*) і фазову траєкторію *x**(*t*), при яких критерій (8) приймає мінімальне (або максимальне) значення [2].

При постановці задач і синтезі оптимального керування у якості моделі об'єкта керування (ОК) розглядають, як правило, не рівняння (1) або (2), а систему лінійних диференціальних рівнянь, яку з врахуванням початкових умов та дії на ОК збурень f можна представити так:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = x(t) = \phi(x, u, f, t), \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad t_0 < t \leq T \tag{9}$$

або у векторно-матричному вигляді і для нестаціонарного ОК:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \psi(t)f(t), \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad t_0 < t \leq T \tag{10}$$

де $A(t)$, $B(t)$ — матриці розмірністю n×n, n×r, відповідно, коефіцієнтами яких є відомі функції часу; $x(t)$ — вектор стану об'єкта в момент часу t розмірністю n; $u(t)$ — вектор керувальних дій розмірністю r; x^0 — вектор стану об'єкта в початковий момент часу t_0 розмірністю n; $\psi(t)$ — матриця розмірністю n×k, коефіцієнтами якої є відомі функції часу; $f(t)$ — вектор зовнішніх впливів (або збурень) розмірністю k (для стаціонарного об'єкта матриці A,B та ψ — не залежать від часу).

Наявність в правій частині першого рівняння (10) третього складника саме і передбачає врахування дії збурень ОК, а форма його подання впливає на складність розв'язання поставленої задачі.

Метою статті є аналіз можливих збурень об'єктів керування та раціональне представлення цих збурень для застосування в оптимізаційних методах. Шуканий оптимальний регулятор (керування) повинен забезпечувати не лише мінімум витрат на процеси керування, а й мінімум відхилень за найбільш несприятливих умов (дії на ОК збурень невідомої природи і наявності похибок при вимірюваннях його стану) з певними обмеженнями на ці умови (області у вигляді гіпереліпсоїдів у n-вимірному просторі). Саме цей вигляд гарантує найбільш повне врахування збурень при розв'язуванні задач АКОР.

Всі без виключення об'єкти і системи керування функціонують, як вказувалось, в умовах дії на них збурювальних чинників (або збурень). Незалежно від природи, частоти та інтенсивності впливу на ОК збурювальні чинники поділяють на зовнішні, що не залежать від природи об'єкта і його особливостей, і внутрішні, повністю або частково зумовлені самим ОК, його природою і процесами, що протікають в ньому: помилки функціонування в ланках або частинах ОУ, зміна коефіцієнтів і умов перебігу процесів в ньому, зміна властивостей і характеристик матеріалів, з яких він зроблений і т.д. (нестаціонарність).

Зовнішні збурення можуть бути: 1.*стохастичні, або випадкові*, для яких відомі ті чи інші характеристики і властивості: а) *математичне сподівання* m_x, б) *дисперсія* $\mathrm{D_x}$, в) *коваріація* (або коваріаційна функція) $R_x(t,\tau)$, г) *кореляційна функція* (або нормована коваріаційна функція) $R_x(\tau)$ випадкового процесу $\mathrm{X(t)}$, д) *спектральна щільність* $S_x(\omega)$ випадкового сигналу $\mathrm{X(t)}$, е) *стаціонарність* (незмінність з часом) статистичних характеристик; є) *ергодичність* — співпадання довільних реалізацій із статистичними характеристиками однієї реалізації достатньо великої довжини T; та 2. *детерміновані*, для яких вихідні величини однозначно визначаються вхідними, а результат однозначно залежить від початкових умов; а також 3. *змішаного типу (стохастичні і детерміновані одночасно)*; та 4. *збурення невідомої природи* з невідомими характеристиками, властивостями і джерелами або, але відомою множиною (паралелепіпед, еліпсоїд) допустимих значень або обмежень.

Задача побудови еліпсоїда мінімального об'єму, що апроксимує паралелепіпед, який обмежує зовнішні збурення, що діють на ОК, зводиться до наступного. Нехай зовнішні збурення ОК f_i обмежені наступним паралелепіпедом:

$$P = \left\{ f = (f_1, f_2, ..., f_k) : a_i \le f_i \le b_i, i = \overline{1,k} \right\}, \tag{11}$$

де a_i, b_i — задані відповідно нижні та верхні межі збурення f_i.

Відомо, що довільний обмежувальний для зовнішніх збурень k-вимірний еліпсоїд мінімального об'єму описується співвідношенням [3]:

$$(f - f_0)^T T (f - f_0) = 1, \tag{12}$$

де f_0 — центр еліпсоїда, а T — симетрична додатно визначена матриця, яка виявляється діагональною:

$T = diag(t_1, t_2, ..., t_k)$.

Діагональні елементи матриці T визначаються із співвідношення:

$$t_i = \frac{4}{k}(a_i - b_i)^{-2}; \; i = \overline{1,k}, \tag{14}$$

а центр еліпсоїда f_0 в цьому випадку визначається за формулою:

$$f_{0i} = \frac{1}{2}(a_i + b_i) . \tag{15}$$

Задача полягає в тому, щоб визначити матрицю T, при якій об'єм еліпсоїда, що апроксимує паралелепіпед (11), буде мінімальним. Враховуючи, що вершини паралелепіпеда повинні знаходитися на поверхні еліпсоїда, з (11) можна одержати:

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{a_i - b_i}{2} \right)^2 \cdot t_i = 1 . \tag{16}$$

Відомо, що об'єм еліпсоїда (11) визначається за формулою:

$$V_k = C_k \prod_{i=1}^{k} t_i^{-\frac{1}{2}}, \tag{17}$$

де C_k – деяка константа, яка залежить лише від розмірності простору k і не залежить від значень $t_1, t_2, ..., t_k$.

Тоді формалізовано розглядувану задачу можна представити так:

$$C_k^{-2} V_k^{-2} = \prod_{i=1}^{k} t_i^{-1} \to \min_{t_i} . \tag{18}$$

Для розв'язання оптимізаційної задачі (18) при обмеженні (16) використаємо метод множників Лагранжа, для яких будується функція Лагранжа вигляду:

$$L(t_1, t_2, ..., t_k, \lambda) = \prod_{i=1}^{k} t_i^{-1} - \lambda \left[\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{a_i - b_i}{2} \right)^2 \cdot t_i - 1 \right]. \tag{19}$$

Оптимальні параметри $t_1, t_2, ..., t_k$ будуть визначатись з умови мінімізації функції Лагранжа (19):

$$L(t_1, t_2, ..., t_k, \lambda) \to \min_{t_i, \lambda} . \tag{20}$$

Для розв'язання задачі (20) використаємо необхідну умову екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(t_1,t_2,...,t_k,\lambda)}{\partial t_j} = -t_j^{-2}\prod_{i\neq j} t_i^{-1} - \lambda\left(\dfrac{a_j-b_j}{2}\right)^2 = 0, & (21) \\ \dfrac{\partial L(t_1,t_2,...,t_k,\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{k}\left(\dfrac{a_j-b_j}{2}\right)^2 \cdot t_i - 1 = 0. & (22) \end{cases}$$

З рівняння (21) можна одержати:

$$\lambda = -t_j^{-2}\prod_{i\neq j}^{k} t_i^{-1}\left(\frac{2}{a_j-b_j}\right)^2 = -t_j^{-1}\prod_{i=1}^{k} t_i^{-1}\left(\frac{2}{a_j-b_j}\right); \forall j=\overline{1,k}. \quad (23)$$

Крім того, з системи (21) –(22) можна одержати наступне співвідношення:

$$\forall i,j \Rightarrow t_i\left(\frac{a_i-b_i}{2}\right)^2 = t_j\left(\frac{a_j-b_j}{2}\right)^2. \quad (24)$$

Враховуючи (24), з (22) одержимо:

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{a_i-b_i}{2}\right)^2 \cdot t_i = k\cdot t_j\left(\frac{a_j-b_j}{2}\right)^2 = 1, \quad (25)$$

звідки:

$$t_i = \frac{4}{k}(a_i-b_i)^{-2};\ i=\overline{1,k}. \quad (26)$$

Можна довести, що параметри (14) задовольняють також достатні умови мінімізації функції (20), де k — розмірність простору зовнішніх збурень.

Висновки

Проаналізовані та апроксимовані збурення, що діють на ОК. Розглянута задача побудови еліпсоїда мінімального об'єму, до якого належать зовнішні збурення ОК, сформульовані умови, що мінімізують їх об'єм. Отримані результати полегшують розв'язання оптимізаційної задачі аналітичного проектування оптимального регулятора, бо пропонують раціональний шлях врахування дії збурень, прикладених до багатовимірного ОК, що функціонує в умовах невизначеності.

Література

1. *Конструктивные* методы оптимизации. Ч. 4. Выпуклые задачи / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова, В.М. Ракецкий. — Мн.:Изд-во «Университетское», 1987. —223 с.

2. *Заболотнов Ю.М.* Оптимальное управление непрерывными динамическими системами/Ю.М. Заболотнов; Самар. гос. аэрокосм. ун-т. — Самара: СГАКУ, 2005. – 129 с.

3. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов / Ф.Л. Черноусько. — М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1988. — 320 с.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫМ ОБЪЕКТОМ

Б.М. Гончаренко, А.М. Ползик
Национальный университет пищевых технологий

Проанализированы и аппроксимированы возмущения, действующие на объект управления (ОУ). Обозначены постановка и пути решения оптимизационной задачи поиска опти-

мального управления и фазовой траектории. Проанализированы разновидности возмущений многомерного ОУ, делающие его функционирование неопределенным. Рассмотрена задача построения эллипсоида минимального объема, к которому относятся внешние возмущения ОУ, сформулированы условия, минимизирующие его объем. Для решения оптимизационной задачи поиска эллипсоида минимального объема использован метод множителей Лагранжа, для которых построена специальная функция Лагранжа. Оптимальные параметры эллипсоида возмущений определены из условия минимизации функции Лагранжа. Полученные результаты облегчают решение оптимизационной задачи аналитического конструирования оптимального регулятора (АКОР) и предлагают рациональный путь учета воздействия возмущений, приложенных к многомерному ОУ, функционирующему в условиях неопределенности.

Ключевые слова: *оптимальное управление, объект управления, возмущения, область ограничений, эллипсоид, функция Лагранжа, условия неопределенности.*