УДК 681.513.5

IMPULSE MINIMAX CONTROL USED IN SYSTEMS DESCRIBED BY EQUATIONS IN HYPERBOLIC TYPE PARTIAL DERIVATIVES

A. Lobok, N. Savitska
National University of Food Technologies

Key words:
Optimal minimaximal control
Impulse control
Systems with distributed parameters
Hyperbolic equation
Ellipsoid allowable perturbbation
Differential equation of riccati type
Method of projection gradient

Article history:
Received 25.05.2013
Received in revised form 18.06.2013
Accepted 23.06.2013

Corresponding author:

E-mail:
apl_apl@mail.ru

ABSTRACT

In this paper we consider the problem of synthesis of minimax control for objects described by the equations in partial derivatives of the hyperbolic type. It is assumed that the object control is influenced by additive external disturbances pertaining to a given ellipsoid. For facilities operating under such uncertainty, we construct optimal switching regulator from the facility, and also provide an algorithm for solving the problem of finding an optimal location for centralized control and determine the optimal time points of the pulse regulator.

ІМПУЛЬСНЕ МІНІМАКСНЕ УПРАВЛІННЯ В СИСТЕМАХ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ РІВНЯННЯМИ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

О.П. Лобок, Н.М. Савіцька
Національний університет харчових технологій

В даній роботі розглядається задача синтезу мінімаксного управління для об'єктів, які описуються рівняннями в частинних похідних гіперболічного типу. Передбачається, що на об'єкт управління діють адитивні зовнішні збурення, які належать деякому заданому еліпсоїду. Для об'єктів, що функціонують в умовах подібної невизначеності, будується оптимальний імпульсний регулятор від стану об'єкта, а також наводиться алгоритм розв'язання задачі оптимального розташування зосереджених управлінь і визначення оптимальних моментів часу дії імпульсного регулятора.

Ключові слова: *оптимальне мінімаксне управління, імпульсний регулятор, системи з розподіленими параметрами, рівняння гіперболічного типу, еліпсоїд допустимих збурень, диференціальне рівняння типу Ріккаті, метод проекції градієнта.*

Задачі управління системами з розподіленими параметрами (СРП) становлять одну з актуальних проблем сучасної теорії автоматичного керування. В наш час важко вказати якунебуть природньо — наукову, технічну або промислову область, де б не виникали задачі, пов'язані з використанням СРП. В даній статті дається подальший розвиток теорії мінімаксного управління, початок якої покладено в роботах [1,2,3], стосовно систем з розподіленими параметрами гіперболічного типу, що функціонують в умовах деякої невизначеності.

Для точного формулювання постановки задачі, яка буде розглядатись в даній роботі, введемо спочатку наступні позначення: Ω — обмежена відкрита область в n — вимірному евклідовому просторі R^n з кусково-гладкою границею Γ; $Q_T = \{(x,t):\ x \in \Omega,\ 0 < t < T\}$, $S_T = \{(x,t):\ x \in \Gamma,\ 0 < t < T\}$, де $T < \infty$; $<\cdot,\cdot>$ — скалярний добуток в гільбертовому просторі функцій $L_2(\Omega)$ інтегрованих з квадратом в сенсі Лебега; $H^k(\Omega)$ — соболєвські простори [4]; $C([0,T];H)$ — простір функцій, що приймають значення в гільбертовому просторі H і таких, що $\max\limits_{t\in[0,T]} \|\varphi(t)\|_H < \infty$ [5]; $L(V,H)$ — простір лінійних непервних операторів, що діють з гільбертового простору V в гільбертів простір H; «T», «$*$» — операції транспонування і спряження.

Розглянемо об'єкт управління, стан якого описується диференціальним рівнянням в частинних похідних гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2} = A(t)\varphi(t) + K(t)f(t) \text{ в } \Omega \times (t_k, t_{k+1}],\ k = 1,2,\ldots,N \tag{1}$$

з початковими та граничними умовами

$$\varphi(0) = Lf_0,\ \frac{\partial \varphi(0)}{\partial t} = Mf_1 \text{ в } \Omega;\ \frac{\partial \varphi(t)}{\partial \nu_A} = 0 \text{ в } S_T, \tag{2}$$

причому управління системою (1), (2) здійснюється в імпульсному режимі наступним чином

$$\begin{cases} \varphi(t_k^+) = \varphi(t_k^-) + b_{1k}u_{1k}, \\ \dfrac{\partial \varphi(t_k^+)}{\partial t} = \dfrac{\partial \varphi(t_k^-)}{\partial t} + b_{2k}u_{2k}, \qquad k = 1,2,\ldots,N. \end{cases} \tag{3}$$

Тут $\varphi(t)$ — функція стану, $A(t)$ — еліптичний оператор другого порядку виду

$$A(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - a_0(x,t), \tag{4}$$

коефіцієнти якого $a_0(x,t) \in C(Q_T)$, $a_{ij}(x,t) \in C^1(Q_T)$ задовольняють наступним умовам: $a_0(x,t) \ge \alpha$, $\alpha = const > 0$ майже всюди в Q_T,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \gamma \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,\ \gamma > 0,\ \forall \xi_i \in R^1 \text{ майже всюди в } Q_T;$$

$\dfrac{\partial}{\partial \nu_A}$ — оператор конормальної похідної виду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\cos(\vec{n}, x_i) \text{ в } S_T,$$

де $(\vec{n}, x_i)$ — кут між зовнішньою нормаллю $\vec{n}$ до границі Γ області Ω і додатнім напрямом осі OX_i; $K(t) \in L(L_2(Q_T), L_2(Q_T))$, $L \in L\left(L_2(\Omega), H^1(\Omega)\right)$, $M \in L(L_2(\Omega), L_2(\Omega))$ — інтегральні оператори; $u_{ik} \in R^1$, $i = 1,2$ — імпульсні управління; $b_{1k} \in H^1(\Omega)$, $b_{2k} \in L_2(\Omega)$, $k = 1,2,\ldots,N$ — задані функції; $t_k^{\pm} = t_k \pm 0$, $k = 1,2,\ldots,N+1$, $t_0 = 0$, $t_{N+1} = T$, $f_0, f_1 \in L_2(\Omega)$, $f(t) \in L_2(Q_T)$ — невідомі функції, що належать області $S_{\mu(t)}$ виду

$$S_{\mu(t)}=\left\{(f_0,f_1,f):\langle F_0f_0,f_0\rangle+\langle F_1f_1,f_1\rangle+\int_0^t\langle F(\tau)f(\tau),f(\tau)\rangle d\tau\le\mu^2(t)\right\},$$

де $F_0,F_1\in L(L_2(\Omega),L_2(\Omega))$, $F(t)\in L(L_2(Q_T),L_2(Q_T))$ — самоспряжені додатно визначені інтегральні оператори, $\mu(t)\in C(0,T)$, $\mu(t)\ne 0$, $t\in(0,T]$.

Під розв'язком крайової задачі (1), (2) будемо розуміти таку функцію $\varphi(x,t)$, яка задовольняє рівнянню

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle\varphi(t),\nu\rangle+a(t;\varphi,\nu)=\langle K(t)f(t),\nu\rangle\quad\forall\nu\in H^1(\Omega),\ t\in(t_k,t_{k+1}],\tag{5}$$

$$\varphi(0)=Lf_0,\ \frac{\partial\varphi(0)}{\partial t}=Mf_1\ \text{в}\ \Omega,\ k=1,2,...,N,$$

де $a(t;\varphi,v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+\int_\Omega a_0(x,t)\varphi v dx$, а другу похідну по часовій координаті t в лівій частині рівняння (5) слід розуміти в сенсі теорії узагальнених функцій [4].

Припустимо, що в моменти часу $t_k\in(0,T)$ ми можемо точно виміряти величини $\varphi(t_k)$ і $\partial\varphi(t_k)/\partial t$. Тоді наша задача полягатиме у знаходженні оптимального управління $u^0=\left[u_{11}^0,u_{12}^0,...,u_{1N}^0,u_{21}^0,u_{22}^0,...,u_{2N}^0\right]^T$ у вигляді лінійного зворотного зв'язку

$$u_{ik}^0=\left\langle R_{1i}^k,\varphi(t_k)\right\rangle+\left\langle R_{2i}^k,\frac{\partial\varphi(t_k)}{\partial t}\right\rangle,\ i=1,2,\ k=1,2,...,N\tag{6}$$

і оптимальні моменти часу $\tau^0=\left[t_1^0,t_2^0,...,t_N^0\right]^T$ з умови

$$I(u^0,\tau^0)=\inf_\tau\inf_u I(u,\tau),\tag{7}$$

де

$$I(u,\tau)=\sup_{S_{\mu(T)}}\left[\langle l_1,\varphi(T)\rangle+\left\langle l_2,\frac{\partial\varphi(T)}{\partial t}\right\rangle\right]^2+\int_0^T\sup_{S_{\mu(t)}}\left[\langle m_1(t),\varphi(t)\rangle+\left\langle m_2(t),\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}\right\rangle\right]^2dt+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\left(\alpha_{1k}\sup_{S_{\mu(t_k)}}u_{1k}^2+\alpha_{2k}\sup_{S_{\mu(t_k)}}u_{2k}^2\right).\tag{8}$$

Тут $l_i\in L_2(\Omega)$, $m_i(t)\in L_2(Q_T)$, $i=1,2$; $\alpha_{ik}>0$ — задані вагові константи.

Зауважимо, що оскільки розв'язок задачі (5) при фіксованих $\varphi(t_k^+)\in H^1(\Omega)$, $\partial\varphi(t_k^+)/\partial t\in L_2(\Omega)$ існує і є єдиним, до того ж $\varphi(t)\in C\big((t_k,t_{k+1}];H^1(\Omega)\big)$, $\partial\varphi(t)/\partial t\in$ $\in C\big((t_k,t_{k+1}];L_2(\Omega)\big)$ [6], то $\varphi(t)$ і $\partial\varphi(t)/\partial t$ є неперервними функціями по t в часових проміжках (t_k,t_{k+1}), а в точках t_k є неперервними зліва, тобто $\varphi(t_k^-)=\varphi(t_k)$, $\partial\varphi(t_k^-)/\partial t=$. $=\partial\varphi(t_k)/\partial t$ Тому спостереження за $\varphi(t)$ і $\partial\varphi(t)/\partial t$ в дискретні моменти часу мають сенс.

Сформульовану задачу будемо розв'язувати в два етапи: спочатку знайдемо u^0 із умови

$$I(u^0,\tau)=\inf_u I(u,\tau)\tag{9}$$

при фіксованому τ, а потім визначимо τ^0, при якому

$$J(\tau^0)=\inf_\tau J(\tau),\tag{10}$$

де позначено $J(\tau)=I(u^0,\tau)$.

Розв'язок оптимізаційної задачі (9) визначається наступною теоремою.

Теорема. Для того, щоб управління (6) було оптимальним розв'язком задачі мінімаксного управління (1), (2), (3), (8) необхідно і достатньо щоб зворотний зв'язок визначався співвідношеннями

$$\begin{bmatrix} R_{11}^k \\ R_{21}^k \end{bmatrix} = \gamma_k^{-1}\Psi(t_k^+)B_k \begin{bmatrix} -\beta_2(t_k) \\ d_k \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} R_{12}^k \\ R_{22}^k \end{bmatrix} = \gamma_k^{-1}\Psi(t_k^+)B_k \begin{bmatrix} d_k \\ -\beta_1(t_k) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

де

$$\gamma_k = \beta_1(t_k)\beta_2(t_k) - d_k^2, \; d_k = \langle b_{1k}, \psi_{12}(t_k^+)b_{2k} \rangle,$$

$$\beta_i(t_k) = \mu^2(t_k)\alpha_{ik} + \langle b_{ik}, \psi_{ii}(t_k^+)b_{ik} \rangle, \; B_k = diag[b_{1k}, b_{2k}], \tag{12}$$

$\Psi(t) = \{\psi_{ij}(t)\}_{i,j=1}^2$ — самоспряжений додатно визначений матричний інтегральний оператор, ядро якого $\Psi(x,y,t)$ задовольняє наступному інтегро-диференціальному рівнянню типу Ріккаті

$$-\frac{\partial\Psi(x,y,t)}{\partial t} = W^*(x,t)\Psi(x,y,t) + \left[W^*(y,t)\Psi(y,x,t)\right]^T +$$

$$+\mu^2(t)M_m(x,y,t), \quad (x,y,t) \in \Omega_x \times \Omega_y \times [t_k, t_{k+1}), \tag{13}$$

з початковою умовою

$$\Psi(x,y,T) = \mu^2(T)L_l(x,y), \; (x,y) \in \Omega_x \times \Omega_y,$$

та граничними умовами виду

$$S^*(x,t)\Psi(x,y,t) = 0, \; (x,y,t) \in \Gamma_x \times \Omega_y \times (0,T),$$

$$S^*(y,t)\Psi(y,x,t) = 0, \; (x,y,t) \in \Omega_x \times \Gamma_y \times (0,T).$$

В точках t_k матрична функція $\Psi(x,y,t)$ неперервна справа, тобто $\Psi(x,y,t_k) = \Psi(x,y,t_k^+)$ і стрибкоподібно змінює своє значення за формулою

$$\Psi(x,y,t_k^-) = \Psi(x,y,t_k^+) + \int_\Omega\int_\Omega \Psi(x,\xi,t_k^+)H_k(\xi,\eta)\Psi(\eta,y,t_k^+)d\xi d\eta, \; k = N, N-1, ..., 1.$$

Тут $\Psi(x,y,t) = \{\psi_{ij}(x,y,t)\}_{i,j=1}^2$ — додатно визначене симетричне ядро, тобто $\Psi_{ij}(x,y,t) = \Psi_{ji}(y,x,t)$, $i,j = 1,2$,

$$W(x,t) = \begin{bmatrix} 0 & | & E \\ --- & + & --- \\ A_x(t) & | & 0 \end{bmatrix}, \; S(x,t) = \begin{bmatrix} 0 & | & 0 \\ --- & + & --- \\ \partial/\partial v_{A_x} & | & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_m(x,y,t) = \{M_{ij}(x,y,t)\}_{i,j=1}^2, \; M_{ij}(x,y,t) = m_i(x,t)m_j(y,t),$$

$$L_l(x,y) = \{L_{ij}(x,y)\}_{i,j=1}^2, \; L_{ij}(x,y) = l_i(x)l_j(y),$$

$$H_k(x,y) = B_k(x)D_kB_k(y), \; B_k(x) = diag[b_{1k}(x), b_{2k}(x)],$$

$$D_k = \gamma_k^{-1} \begin{bmatrix} -\beta_2(t_k) & | & d_k \\ --- & + & --- \\ d_k & | & -\beta_1(t_k) \end{bmatrix},$$

E — одиничний оператор, а індекси у операторів $A(t)$, $\partial/\partial v_A$, вказують по якій змінній вони діють.

Мінімальне значення функціоналу (8) при оптимальному управлінні (6), (11) при цьому дорівнює

$$J(\tau)=I(u^0,\tau)=tr\left[LF_0^{-1}L^*\psi_{11}(0)+MF_1^{-1}M^*\psi_{22}(0)\right]+$$

$$+\int_0^T tr\left[K(t)F^{-1}(t)K^*(t)\psi_{22}(t)\right]dt\,, \tag{14}$$

де $tr[L]=\int_\Omega L(x,x)dx$, $L(x,y)$ — ядро оператора L .

Доведення теореми тут не наводиться. Відмітимо лише, що воно аналогічне доведенню відповідних теорем, одержаних у роботі [7].

Перейдемо тепер до розв'язання оптимізаційної задачі (10). Очевидно, що в загальному випадку розв'язати цю задачу дуже важко, оскільки для обчислення градієнта функціонала (14), що мінімізується необхідно розв'язати інтегро-диференціальне рівняння типу Ріккаті (13) і відповідне йому рівняння чутливості. Тому розглянемо частинний випадок, коли розв'язок рівняння (13) вдається представити в аналітичному вигляді. Нехай $m_1(x,t)=m_2(x,t)=0$. Тоді розв'язок рівняння (13), в якому $M_m(x,y,t)=0$, будемо шукати у вигляді

$$\Psi(x,y,t)=\lambda(x,t)\lambda^T(y,t)\,,\ \lambda(x,t)=[\lambda_1(x,t),\lambda_2(x,t)]^T\,. \tag{15}$$

Підставивши (15) в рівняння (13) і враховуючи додатну визначеність ядра $\Psi(x,y,t)$, отримуємо рівняння відносно $\lambda(x,t)$

$$\frac{\partial\lambda(x,t)}{\partial t}=-W^*(x,t)\lambda(x,t)\,,\ (x,t)\in\Omega\times[t_k,t_{k+1})\,,$$

$$\lambda(x,T)=\mu(T)l(x)\,,\ x\in\Omega\,;\ S^*(x,t)\lambda(x,t)=0\,,\ (x,t)\in\Gamma\times(0,T)\,,$$

$$\lambda(x,t_k^-)=g_k\lambda(x,t_k^+)\,,\ k=N,N-1,...,1\,,$$

де $l(x)=[l_1(x),l_2(x)]^T$, $g_k=(1+a(t_k^+))^{1/2}$, $a(t_k^+)=r_k^TD_kr_k$, $r_k=\left[\langle\lambda_1(t_k^+),b_{1k}\rangle,\langle\lambda_2(t_k^+),b_{2k}\rangle\right]^T$.

Припустимо, що оператор $A(t)$ системи (1), який визначається співвідношенням (4), самоспряжений і не залежить від часу t , тобто $A(t)=A=A^*$. Тоді розв'язок останнього рівняння можна однозначно представити у вигляді нескінченого ряду

$$\lambda(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\rho_i(t)\omega_i(x)\,, \tag{16}$$

де

$$\rho_i(t)=C_{k+1}^{1/2}H_i(t-T)l_i\,,\ t\in[t_k,t_{k+1})\,,\ k=N,N-1,...,0\,, \tag{17}$$

$$H_i(t-T)=\left[\begin{array}{c|c}\cos(v_i(t-T)) & v_i\sin(v_i(t-T))\\ \hline -v_i^{-1}\sin(v_i(t-T)) & \cos(v_i(t-T))\end{array}\right],\ v_i=\sqrt{-\mu_i}\,,$$

$l_i=[l_{1i},l_{2i}]^T$, $l_{ji}=\langle l_j,\omega_i\rangle$, $j=1,2$; μ_i $(\mu_i<0)$, $\omega_i(x)\in H^1(\Omega)$ — власні значення і відповідні ортонормовані в просторі $L_2(\Omega)$ узагальнені власні функції оператора A крайової задачі (1), (2). Величини C_{k+1} знаходяться за наступною рекурентною процедурою

$$\begin{cases}C_k=\zeta_k^{-1}\mu^2(t_k)\alpha_{1k}\alpha_{2K}C_{k+1}, & k=N,N-1,...,1,\\ C_{N+1}=\mu^2(T),\end{cases} \tag{18}$$

в якій

$$\zeta_k = \mu^2(t_k)\alpha_{1k}\alpha_{2k} + C_{k+1}(\alpha_{1k}\xi_{2k}^2 + \alpha_{2k}\xi_{1k}^2)\,, \tag{19}$$

$$\xi_{ik} = \langle b_{ik}, \eta_i(t_k)\rangle\,,\; i = 1,2\,, \tag{20}$$

$$\begin{cases} \eta_1(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{\infty}\left[l_{1j}\cos(v_j(t-T)) + l_{2j}v_j\sin(v_j(t-T))\right]\omega_j(x), \\ \eta_2(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{\infty}\left[-l_{1j}v_j^{-1}\sin(v_j(t-T)) + l_{2j}\cos(v_j(t-T))\right]\omega_j(x). \end{cases} \tag{21}$$

Таким чином, розв’язок диференціального рівняння типу Ріккаті (13), в якому $M_m(x,y,t) = 0$, визначається в явному вигляді за формулами (15) — (18). Враховуючи аналітичний вираз для ядра $\Psi(x,y,t)$, функціонал (14) і співвідношення (11), що визначають оптимальне мінімаксне управління (6), можна перетворити до виду

$$J(\tau) = I(u^0,\tau) = C_1 V + \sum_{k=0}^{N} C_{k+1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} U(t)dt\,, \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} R_{1i}^k \\ R_{2i}^k \end{bmatrix} = -\zeta_k^{-1}\alpha_{3-i,k}\xi_{ik}C_{k+1}\begin{bmatrix} \eta_1(t_k) \\ \eta_2(t_k) \end{bmatrix},\; i = 1,2\,, \tag{23}$$

де

$$V = \left\langle LF_0^{-1}L^*\eta_1(0), \eta_1(0)\right\rangle + \left\langle MF_1^{-1}M^*\eta_2(0), \eta_2(0)\right\rangle,$$

$$U(t) = \left\langle K(t)F^{-1}(t)K^*(t)\eta_2(t), \eta_2(t)\right\rangle,$$

величини C_k визначаються за рекурентною процедурою (18), а ζ_k, ξ_{ik}, $\eta_i(t_k)$ — за формулами (19), (20), (21).

Неважко показати, що функціонал (22) є неперервно диференційованим по t_k, тому для знаходження оптимальних моментів часу t_k^0, $k = 1,2,...,N$ можна застосувати градієнтні методи, зокрема, метод проекції градієнта [8]

$$\tau^{s+1} = \Pr_{\Omega_\tau}\left[\tau^s - \rho_s\nabla_\tau J(\tau^s)\right],\; s = 0,1,2,..., \tag{24}$$

де $\tau^s = \left[t_1^s, t_2^s, ..., t_N^s\right]^T$ — наближений розв’язок, отриманий на S -му кроці; ρ_s — крок спуску; $\Pr_{\Omega_\tau}\left[\tau^s\right]$ — операція проектування τ^s на область $\Omega_\tau = \Big\{\tau:\ \tau = [t_1, t_2, ..., t_N]^T,$, $t_i < t_{i+1},\ i = 0,1,...,N \Big\}$ а градієнт $\nabla_\tau J(\tau)$ визначається за формулами

$$\nabla_\tau J(\tau) = \left[\frac{\partial J(\tau)}{\partial t_1}, \frac{\partial J(\tau)}{\partial t_2}, ..., \frac{\partial J(\tau)}{\partial t_N}\right]^T, \tag{25}$$

$$\frac{\partial J(\tau)}{\partial t_i} = V\frac{\partial C_1}{\partial t_i} + \sum_{k=1}^{N-1}\frac{\partial C_{k+1}}{\partial t_i}\int_{t_k}^{t_{k+1}} U(t)dt + U(t_i)(C_i - C_{i+1})\,,\; i = 1,2,...,N\,, \tag{26}$$

$$\frac{\partial C_k}{\partial t_i} = \begin{cases} 0, & i < k, \\ 2\zeta_k^{-2}C_{k+1}^2\alpha_{1k}\alpha_{2k}\mu(t_k)\left[\dfrac{d\mu(t_k)}{dt_k}\left(\alpha_{1k}\xi_{2k}^2 + \alpha_{2k}\xi_{1k}^2\right) + \right. & \\ \left. +\mu(t_k)\left(\alpha_{1k}\xi_{2k}\Delta_{2k} + \alpha_{2k}\xi_{1k}\Delta_{1k}\right)\right], & i = k, \\ \zeta_k^{-2}\mu^4(t_k)(\alpha_{1k}\alpha_{2k})^2\dfrac{\partial C_{k+1}}{\partial t_i}, & i > k, \end{cases} \tag{27}$$

$$\Delta_{ik} = \langle b_{ik}, q_i(t_k) \rangle, \; i = 1,2,$$

$$q_1(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[l_{1j} v_j \sin(v_j(t-T)) - l_{2j} v_j^2 \cos(v_j(t-T)) \right] \omega_j(x),$$

$$q_2(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[l_{1j} \cos(v_j(t-T)) + l_{2j} v_j \sin(v_j(t-T)) \right] \omega_j(x).$$

Алгоритм (24) зупиняється при виконанні умови $\left\| \tau^{s+1} - \tau^s \right\| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ — задана точність розв'язку.

Примітка 1. Можна довести, що величини C_k утворюють монотонно зростаючу послідовність, тобто $0 < C_1 < C_2 < ... < C_N < C_{N+1} = \mu^2(T)$.

Примітка 2. З попереднього результату безпосередньо випливає наступна оцінка функціоналу (22): $J(\tau) < \mu^2(T)\left(V + \int_0^T U(t)dt \right)$.

Примітка 3. Якщо в (3) $u_{ik} \neq 0$, $u_{3-i,k} = 0$, $i = 1,2$, то оптимальне мінімаксне управління початкової оптимізаційної задачі визначається співвідношенням (6), в якому

$$\begin{bmatrix} R_{1i}^k \\ R_{2i}^k \end{bmatrix} = -\Theta_{ik}^{-1} \xi_{ik} C_{k+1} \begin{bmatrix} \eta_1(t_k) \\ \eta_2(t_k) \end{bmatrix}, \; \Theta_{ik} = \mu^2(t_k)\alpha_{ik} + C_{k+1}\xi_{ik}^2,$$

де величини C_k знаходяться за наступною рекурентною процедурою

$$\begin{cases} C_k = \Theta_{ik}^{-1} \mu^2(t_k) \alpha_{ik} C_{k+1}, & k = N, N-1, ..., 1, \\ C_{N+1} = \mu^2(T), \end{cases}$$

а ξ_{ik} та $\eta_i(t_k)$ визначаються за формулами (20), (21).

Примітка 4. Нехай $b_{1k}(x) = \delta(x - x_k)$, $b_{2k}(x) = \delta(x - y_k)$, $x_k, y_k \in \Omega$, де $\delta(x-y)$ — дельта-функція Дірака, тобто розглянемо точкові імпульсні управління. Відмітимо, що такий вибір функцій $b_{ik}(x)$, $i = 1,2$ допустимий при певному узгодженні розмірності простору Ω і гладкості початкових даних [4,5]. Позначимо $X = (x_1, x_2, ..., x_N)^T$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_N)^T$, а через $I(u, X, Y, \tau)$ — початковий функціонал (8), в якому покладемо $m_1(t) = m_2(t) = 0$. Нехай моменти часу t_k, $k = 1,2,...,N$ задані. Тоді розв'язок задачі визначення оптимального за зворотним зв'язком управління u^0 і оптимального розташування точок докладання імпульсних управлінь X^0, Y^0 з умови

$$I(u^0, X^0, Y^0, \tau) = \inf_{X,Y} \inf_u I(u, X, Y, \tau) \tag{28}$$

знаходиться за формулами (6), (23), в яких в цьому випадку необхідно покласти $\xi_{1k} = \eta_1(x_k^0, t_k)$, $\xi_{2k} = \eta_2(y_k^0, t_k)$,

$$x_k^0 = \arg\sup_{x \in \Omega} \eta_1^2(x, t_k), \; y_k^0 = \arg\sup_{y \in \Omega} \eta_2^2(y, t_k), \; k = 1,2,...,N,$$

а функції $\eta_i(x,t)$, $i = 1,2$ визначаються із співвідношень (21).

Відмітимо, що якщо в правій частині виразу (28) замість $\inf\limits_{X,Y}$ записати $\inf\limits_{\tau,X,Y}$ (спільне знаходження τ^0, X^0, Y^0), то визначення оптимальних моментів часу t_k^0 і точок докладання управлінь x_k^0, y_k^0 теж можна здійснити шляхом використання градієнтних методів. При цьому похідні

$\partial C_k / \partial x_i$ і $\partial C_k / \partial y_i$, які необхідні для визначення градієнта функціонала, що мінімізується, обчислюються аналогічно як і похідні $\partial C_k / \partial t_i$, використовуючи співвідношення (18).

Висновки

В роботі дається розв'язок задачі оптимального імпульсного мінімаксного управління системами з розподіленими параметрами гіперболічного типу, що функціонують в умовах невизначеності. Крім того запропоновано алгоритм розв'язання задачі оптимального розташування точок докладання імпульсних управлінь та визначення оптимальних моментів часу подання імпульсних керуючих сигналів.

Література

1. *Кириченко, Н.Ф.* Аналитическое конструирование минимаксных регуляторов в линейных системах [Текст] / Н.Ф. Кириченко // Докл. АН УССР. — 1977. — №7. — С. 591 – 594. (Сер.: А).
2. *Кириченко, Н.Ф.* Минимаксное управление и оценивание в динамических системах [Текст] / Н.Ф. Кириченко // Автоматика. — 1982. — №1. — С. 32 – 39.
3. *Наконечный, А.Г.* О построении минимаксных регуляторов для линейных стохастических систем [Текст] / А.Г. Наконечный // Кибернетика. — 1979. — №5. — С. 143 – 145.
4. *Лионс, Ж.Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными [Текст] / Ж.Л. Лионс; — М.: Мир, 1972. — 414 с.
5. *Гончаренко, В.М.* Основы теории уравнений с частными производными [Текст] / В.М. Гончаренко; — К.: Выща шк., 1985. — 311 с.
6. *Лионс, Ж.Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения [Текст] / Ж.Л. Лионс, Э. Мадженес; — М.: Мир, 1979. — 371 с.
7. *Лобок, А.П.* Минимаксные регуляторы в системах с распределенными параметрами [Текст] / А.П. Лобок // Вестн. Киев. ун-та. Моделирование и оптимизация сложных систем. — К.: КГУ, 1983. — Вып. 2. — С. 62 – 67.
8. *Васильев, Ф.П.* Лекции по методам решения экстремальных задач [Текст] / Ф.П. Васильев; — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 374 с.

ИМПУЛЬСНОЕ МИНИМАКСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В СИСТЕМАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

А.П. Лобок, Н.М. Савицкая
Национальный университет пищевых технологий

В данной работе рассматривается задача синтеза минимаксного управления для объектов, которые описываются уравнениями в частных производных гиперболического типа. Предполагается, что на объект управления действуют аддитивные внешние возмущения, принадлежащие некоторому заданному эллипсоиду. Для объектов, функционирующих в условиях подобной неопределенности, строится оптимальный импульсный регулятор от состояния объекта, а также приводится алгоритм решения задачи оптимального расположения сосредоточенных управлений и определения оптимальных моментов времени действия импульсного регулятора.

Ключевые слова: *оптимальное минимаксное управление, импульсный регулятор, системы с распределенными параметрами, уравнение гиперболического типа, эллипсоид допустимых возмущений, дифференциальное уравнение типа Риккати, метод проекции градиента.*