УДК 517.518.2

INEQUALITY IN THE THIRD MODULUS OF CONTINUITY

O. Nesterenko
Taras Shevchenko National University of Kyiv

Key words:
Inequality
Uniformly Continuous Function
Finite difference
The modulus of continuity of the third order

Article histore:
Received 18.06.2013
Received in revised form 14.08.2013
Accepted 13.09.2013

Corresponding author:
O. Nesterenko
E-mail:
NesterenkoON@ukr.net

ABSTRACT

The work is devoted to the study of the properties of modulus of continuity of higher-order, which are an important characterization of the smoothness of non-differentiable functions. We consider that the uniform modulus of continuity of higher orders for real-valued functions of a real variable is uniformly continuous on the whole real axis. In this paper a new inequality for third uniform modulus of continuity of such functions is obtained: $2\omega_3(f,T)\le\omega_3(f,T+3t)+\omega_3(f,T-t)+$ $+24\left(\left[\frac{T}{t}\right]+1\right)\omega_3(f,t)$, where f is a real-valued uniformly continuous function on the real axis, and the real numbers T and t satisfy the inequality $0<t\le T$. This inequality is a generalization of an inequality of S.V. Konyagin for second modulus of continuity and this inequality for the third modulus of continuity, obtained only when the number T is a multiple of the number t. With the help of these inequalities, a number of hypotheses about the behavior of the modulus of continuity of higher orders have recently been refuted. The proof of inequality, established in the work, required a significant modification of the previously known methods for preparing such inequalities.

ПРО ОДНУ НЕРІВНІСТЬ ДЛЯ ТРЕТЬОГО МОДУЛЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ

О.Н. Нестеренко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

У статті досліджено властивості модулів неперервності старших порядків, які є важливою характеристикою гладкості недиференційовних функцій. Розглянуто рівномірні модулі неперервності старших порядків для дійснозначних функцій дійсної змінної, рівномірно неперервних на всій дійсній осі. Отримано нову нерівність для третіх рівномірних модулів неперервності таких функцій:
$2\omega_3(f,T)\le\omega_3(f,T+3t)+\omega_3(f,T-t)+24\left(\left[\frac{T}{t}\right]+1\right)\omega_3(f,t)$, *де f — дійсно-*

значна рівномірно неперервна на дійсній осі функція, а дійсні числа T і t задовольняють нерівність $0 < t \le T$. *Одержана нерівність є узагальненням відомої нерівності С.В. Конягіна для других модулів неперервності, а також подібної нерівності для третіх модулів неперервності, отриманої раніше лише для випадку, коли число T є кратним числу t. За допомогою цих нерівностей нещодавно було спростовано кілька гіпотез про поведінку модулів неперервності старших порядків. Доведення нової нерівності потребувало істотної модифікації відомого раніше методу отримання таких нерівностей.*

Ключові слова: *нерівність, рівномірно неперервна функція, скінченна різниця, модуль неперервності третього порядку.*

Важливою характеристикою функцій є поняття гладкості: серед диференційовних функцій більш «гладкою» вважається та функція, яка має більше похідних. Виникає питання: як порівнювати «гладкість» недиференційовних функцій, тобто функцій, які не мають похідних? Зважаючи на це, для характеррристики «гладкості» використовуються модулі неперервності першого та старших порядків, які можна означити для довільних функцій, тому вивчення властивостей модулів неперервності функцій є важливим завданням. У цьому напрямку отримано чимало результатів, однак ще залишаються і невирішені проблеми.

Для точної постановки задачі та формулювання отриманого результату введемо такі поняття та позначення: для функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ розглядатимемо першу, другу та третю скінченні різниці в точці $x\in\mathbb{R}$ з кроком $h>0$:

$$\Delta_h^1(f,x)=f(x+h)-f(x),$$

$$\Delta_h^2(f,x)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x),$$

$$\Delta_h^3(f,x)=f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x).$$

Через $UC(\mathbb{R})$ позначимо простір рівномірно неперервних функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Для функції $f\in UC(\mathbb{R})$ розглядатимемо її k-ий модуль неперервності (або модуль неперервності порядку k) при $k=1$, $k=2$ і $k=3$:

$$\omega_k(f,t)=\sup\left\{\left|\Delta_h^k(f,x)\right| \,:\, x\in\mathbb{R},\ 0<h\le t\right\},\ t>0.$$

Властивості модулів неперервності функцій, заданих на $\mathbb{R}$, у цілому аналогічні до властивостей модулів неперервності функцій, заданих на відрізку [1; 2]. Для модулів неперервності першого порядку відомо, що дана функція є модулем неперервності (див. [1] — [3]): функція $\omega:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ є модулем неперервності першого порядку для функції $f\in UC(\mathbb{R})$ тоді і тільки тоді, коли функція ω невід'ємна, неперервна, монотонно неспадна на множині $[0,+\infty)$, $\omega(0)=0$, а також ω є півадитивною на $[0,+\infty)$, тобто для всіх $t_1, t_2\in[0,+\infty)$ виконується нерівність:

$$\omega(t_1+t_2)\le\omega(t_1)+\omega(t_2);\ \text{при цьому}\ \omega(t)=f(|t|),\ t\in\mathbb{R}.$$

Для модулів неперервності старших порядків такий критерій досі не отримано. У зв'язку з цим варто з'ясувати, наскільки необхідні умови того, що дана функція є k-им модулем неперервності, і що необхідні умови є близькими до достатніх умов, точніше, чи не будуть посилення необхідних умов достатніми умовами. Зокрема, відомо (див. [1], [2]), що для функцій з простору $UC(\mathbb{R})$ розглядувані нами модулі неперервності $\omega = \omega_k(f,\cdot)$ при $k = 1, 2, 3$ мають такі властивості:

1) $\omega(0) = 0$;

2) функція ω неперервна на $[0,+\infty)$;

3) функція ω монотонно неспадна на $[0,+\infty)$;

4) для довільних $t \ge 0$ і $n \in \mathbb{N}$ справджується нерівність $\omega(nt) \le n^k \omega(t)$.

Легко показати, що умова 4) для невід'ємних функцій випливає з умови:

5) функція $(0,+\infty) \ni t \mapsto \omega(t)/t^k$ монотонно не зростає на множині $(0,+\infty)$.

Слід зауважити, що в [2, с.24] функції, що задовольняють умови 1)—3) і 5), називаються k*-мажорантами.*

І.О. Шевчук звернув увагу на те, чи правильно, що кожна k-мажоранта є модулем неперервності k-го порядку певної функції з простору $UC(\mathbb{R})$ на певному відрізку $[0,\delta_0]$, $\delta_0 > 0$? При $k = 1$ позитивна відповідь на це питання отримана ще С.М. Нікольським [3]. Для $k = 2$ негативна відповідь на дане питання отримана С.В. Конягіним [4], який встановив, що для кожного числа $\alpha > 1$ існує ненульова функція $\omega : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови $1)-3)$. Отже, функція $(0,+\infty) \ni t \mapsto \omega(t)/t^\alpha$ є монотонно незростаючою на $(0,+\infty)$, при цьому для жодної функції $f \in UC(\mathbb{R})$ не виконується рівність $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega_2(f,\delta)/\omega(\delta) = 1$. Для отримання цього результату С.В. Конягіним була доведена нерівність:

$$2\omega_2(f,T) \le \omega_2(f,T+t) + \omega_2(f,T-t) + 2\omega_2(f,t),\ 0 \le t \le T,\ f \in UC(\mathbb{R}).$$

У [5] дана негативна відповідь на питання І.О. Шевчука для випадку $k = 3$. Також у [5] встановлено, що для кожного числа $\alpha > 2$ існує ненульова функція $\omega : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, що задовольняє умови $1)-3)$. Отже, функція $(0,+\infty) \ni \delta \mapsto \omega(\delta)/\delta^\alpha$ є незростаючою на $(0,+\infty)$, при цьому для жодної функції $f \in UC(\mathbb{R})$ не виконується рівність $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega_3(f,\delta)/\omega(\delta) = 1$. Щоб довести це твердження, у [5] було отримано аналог нерівності С.В. Конягіна для третього модуля неперервності:

$$2\omega_3(f,T) \le \omega_3(f,T+t) + \omega_3(f,T-t) + 6N\omega_3(f,t), \qquad (1)$$

де $t > 0$, $T = Nt$, $N \in \mathbb{N}$, $f \in UC(\mathbb{R})$. Однак нерівність (1) не є цілковитим аналогом нерівності С.В. Конягіна: у ній число T має бути кратним числу t.

У пропонованому дослідженні зроблено спробу визначити аналог нерівності (1) у випадку, коли T може бути некратним t. Через $[a]$ позначаємо цілу частину числа $a \in \mathbb{R}$, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує числа a.

Теорема. *Нехай* $f \in UC(\mathbb{R})$, $0 < t \leq T$. *Тоді*

$$2\omega_3(f, T) \leq \omega_3(f, T+3t) + \omega_3(f, T-t) + 24\left(\left[\frac{T}{t}\right]+1\right)\omega_3(f, t).$$

Доведення. Метод доведення теореми в цілому аналогічний методу доведення нерівності (1), що застосовується у [5]. Однак метод потребував досить істотних модифікацій. Нехай $h \in (0,t]$ — довільне фіксоване число. Розглянемо також довільне натуральне число $N \geq 2$ і зафіксуємо його. Позначимо $H = Nh$. Враховуючи означення третьої скінченної різниці, наведене на початку дослідження, а також вираз для другої скінченної різниці з кроком $F(s_0) = \dfrac{C_2}{C_1 + C_2} = \dfrac{0,4}{0,6+0,4} = 0,4.$ через таку ж різницю з кроком $2h$ (див. формулу (1.31) з [2] при $n = m = 2$), для всіх $x \in \mathbb{R}$ отримаємо:

$$\Delta^3_{H+2h}(f, x-2h) + \Delta^3_{H-2h}(f, x+2h) - 2\Delta^3_H(f, x) =$$
$$= f(x+3H+4h) - 3f(x+2H+2h) + 3f(x+H) - f(x-2h) +$$
$$+ f(x+3H-4h) - 3f(x+2H-2h) + 3f(x+H) - f(x+2h) -$$
$$-2f(x+3H) + 6f(x+2H) - 6f(x+H) + 2f(x) =$$
$$= \Delta^2_{4h}(f, x+3H-4h) - 3\Delta^2_{2h}(f, x+2H-2h) - \Delta^2_{2h}(f, x-2h) =$$
$$= \Delta^2_{2h}(f, x+3H) + 2\Delta^2_{2h}(f, x+3H-2h) + \Delta^2_{2h}(f, x+3H-4h) -$$
$$-3\Delta^2_{2h}(f, x+2H-2h) - \Delta^2_{2h}(f, x-2h) =$$
$$= \Delta^2_{2h}(f, x+3Nh) - \Delta^2_{2h}(f, x+(2N-2)h) +$$
$$+2\Delta^2_{2h}(f, x+(3N-2)h) - 2\Delta^2_{2h}(f, x+(2N-2)h) +$$
$$+\Delta^2_{2h}(f, x+(3N-4)h) - \Delta^2_{2h}(f, x-2h).$$

Для оцінки отриманого виразу встановимо допоміжні нерівності. Зауважимо, що для довільних $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$ і $m \in \mathbb{N}$ існує тотожність:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(\Delta^2_h(f, y+(k+1)h) - \Delta^2_h(f, ky)\right) = \Delta^2_h(f, y+mh) - \Delta^2_h(f, h).$$

Дійсно, розкривши дужки у лівій частині наведеної рівності і звівши подібні, отримаємо праву частину. Відзначимо також, що третя скінченна різниця є різницею других скінченних різниць, точніше, для довільних $y \in \mathbb{R}$ і $h > 0$ можлива така рівність:

$$\Delta^3_h(f, y) = \Delta^2_h(f, y+h) - \Delta^2_h(f, y).$$

Тому для довільних $l \in \mathbb{Z}$ і $m \in \mathbb{N}$ отримуємо:

$$\left|\Delta_h^2\left(f, x+(l+m)h\right)-\Delta_h^2\left(f, x+lh\right)\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{m-1}\left(\Delta_h^2\left(f, x+(l+k+1)h\right)-\Delta_h^2\left(f, x+(l+k)h\right)\right)\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{m-1}\Delta_h^3\left(f, x+(l+k)h\right)\right| \le \sum_{k=0}^{m-1}\left|\Delta_h^3\left(f, x+(l+k)h\right)\right| \le \omega_3(f, t)m.$$

У передостанній нерівності ми скористались тим, що модуль суми не перевищує суми модулів, а в останній нерівності використано означення третього модуля неперервності, означення точної верхньої межі і враховано, що $0<h\le t$.

Використовуючи вираз для другої скінченної різниці з кроком $2h$ через таку ж різницю з кроком h і щойно отриману нерівність, для довільних $l \in \mathbb{Z}$ і $m \in \mathbb{N}$ отримуємо вираз:

$$\left|\ \Delta_{2h}^2\left(f, x+(l+m)h\right)-\Delta_{2h}^2\left(f, x+lh\right)\ \right|=$$

$$=\left|\ \Delta_h^2\left(f, x+(l+m)h\right)+2\Delta_h^2\left(f, x+(l+m+1)h\right)+\Delta_h^2\left(f, x+(l+m+2)h\right)-\right.$$

$$\left.-\Delta_h^2\left(f, x+lh\right)-2\Delta_h^2\left(f, x+(l+1)h\right)-\Delta_h^2\left(f, x+(l+2)h\right)\ \right|\le$$

$$\le \omega_3(f, t)(m+2m+m)\le 4m\omega_3(f, t).$$

Використовуючи отриману оцінку, маємо, що:

$$\left|\ \Delta_{2h}^2\left(f, x+3Nh\right)-\Delta_{2h}^2\left(f, x+(2N-2)h\right)\ \right|\le 4(N+2)\omega_3(f, t)$$

$$\left|\ \Delta_{2h}^2\left(f, x+(3N-2)h\right)-\Delta_{2h}^2\left(f, x+(2N-2)h\right)\ \right|\le 8N\omega_3(f, t),$$

$$\left|\ \Delta_{2h}^2\left(f, x+(3N-4)h\right)-\Delta_{2h}^2\left(f, x-2h\right)\ \right|\le 4(3N-2)\omega_3(f, t).$$

Врахувавши отриману на початку доведення тотожність і щойно одержані нерівності, маємо, що:

$$\left|\ \Delta_{H+2h}^3\left(f, x-2h\right)+\Delta_{H-2h}^3\left(f, x+2h\right)-2\Delta_H^3\left(f, x\right)\ \right|=$$

$$=\left|\ \Delta_{2h}^2\left(f, x+3Nh\right)-\Delta_{2h}^2\left(f, x+(2N-2)h\right)+\right.$$

$$+2\Delta_{2h}^2\left(f, x+(3N-2)h\right)-2\Delta_{2h}^2\left(f, x+(2N-2)h\right)+$$

$$\left.+\Delta_{2h}^2\left(f, x+(3N-4)h\right)-\Delta_{2h}^2\left(f, x-2h\right)\ \right|\le$$

$$\le 4\omega_3(f, t)(N+2+2N+3N-2)=24N\omega_3(f, t).$$

Таким чином,

$$\left|\ \Delta_{H+2h}^3\left(f, x-2h\right)+\Delta_{H-2h}^3\left(f, x+2h\right)-2\Delta_H^3\left(f, x\right)\ \right|\le 24N\omega_3(f, t).$$

Врахуємо, що коли для дійсних чисел a, b, c і невід'ємного числа d справджується нерівність $|a+b-c| \le d$, то

$$|c| = |(a+b-c)-(a+b)| \le |a+b-c| + |a+b| \le d + |a| + |b|.$$

Отже,

$$2\left|\Delta_H^3(f, x)\right| \le \left|\Delta_{H+2h}^3(f, x-2h)\right| + \left|\Delta_{H-2h}^3(f, x+2h)\right| + 24N\omega_3(f, t) \le$$
$$\le \omega_3(f, (N+2)t) + \omega_3(f, (N-2)t) + 24N\omega_3(f, t).$$

Якщо h пробігає весь проміжок $(0,t]$, то Nh пробігає весь проміжок $(0, Nt]$, тому з останньої нерівності означення модуля неперервності третього порядку й означення точної верхньої межі одержуємо нерівність:

$$2\omega_3(f, Nt) \le \omega_3(f, (N+2)t) + \omega_3(f, (N-2)t) + 24N\omega_3(f, t).$$

Для довільних $0 < t \le T$ покладемо $N := \left[\frac{T}{t}\right]$. За означенням цілої частини маємо, що $N \le \frac{T}{t} < N+1$, звідси $Nt \le T < (N+1)t$. Враховуючи, що функція ω_3 є монотонно неспадною на $[0, +\infty)$ (властивість 3) модулів неперервності старших порядків, наведена на початку статті), остаточно отримуємо такий ланцюжок нерівностей:

$$2\omega_3(f, T) \le 2\omega_3(f, (N+1)t) \le$$
$$\le \omega_3(f, (N+3)t) + \omega_3(f, (N-1)t) + 24(N+1)\omega_3(f, t) \le$$
$$\le \omega_3(f, T+3t) + \omega_3(f, T-t) + 24\left(\left[\frac{T}{t}\right]+1\right)\omega_3(f, t).$$

Теорему доведено.

Висновки

У роботі отримано нову нерівність для третіх рівномірних модулів неперервності функцій, рівномірно неперервних на осі.

Література

1. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977. — 512 с.

2. *Шевчук И.А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. — К.: Наукова думка, 1992. — 224 с.

3. *Никольский С.М.* Ряд Фурье с данным модулем непрерывности // ДАН СССР. — 1946. — Т. 52. — № 3. — С. 191—194.

4. *Конягин С.В.* О вторых модулях непрерывности // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. — 2010. — Т. 269. — С. 1—3.

5. *Безкрила С.І., Нестеренко О.Н., Чайковський А.В.* Про треті модулі неперервності // Укр. матем. журн. (в друці).

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ ТРЕТЬЕГО МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

А.Н. Нестеренко
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

В статье исследованы свойства модулей непрерывности старших порядков, являющихся важной характеристикой гладкости недифференцируемых функций. Рассматриваются равномерные модули непрерывности старших порядков для вещественнозначных функций действительной переменной, равномерно непрерывных на всей действительной оси. Получено новое неравенство для третьих равномерных модулей непрерывности таких функций: $2\omega_3(f,T) \le \omega_3(f,T+3t)+\omega_3(f,T-t)+24\left(\left[\frac{T}{t}\right]+1\right)\omega_3(f,t)$, *где* f *— вещественнозначная равномерно непрерывная на действительной оси функция, а действительные числа T и t удовлетворяют неравенство* $0<t\le T$. *Полученное неравенство является обобщением известного неравенства С.В. Конягина для вторых модулей непрерывности, а также подобного неравенства для третьих модулей непрерывности, полученного ранее только для случая, когда число T является кратным числу t. С помощью этих неравенств недавно было опровергнуто несколько гипотез относительно поведения модулей непрерывности старших порядков. Доказательство установленного в работе неравенства требовало существенной модификации известного ранее метода получения таких неравенств.*

Ключевые слова: неравенство, равномерно непрерывная функция, конечная разность, модуль непрерывности третьего порядка.