УДК 517.53

MEMBERSHIP OF HADAMARD COMPOSITION OF DIRICHLET DERIVED SERIES IN CONVERGENCE CLASSES

O. Mulyava
National University of Food Technologies

Key words:
Dirichlet series
Hadamard Composition
Convergence class

Article histore:
Received 27.08.2013
Received in revised form 15.09.2013
Accepted 14.10.2013

Corresponding author:
O. Mulyava
E-mail:
oksana.m@bigmir.net

ABSTRACT

Hadamard composition of Dirichlet series $F(s)=$ $=\sum_{k=0}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}$ and $G(s)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k \exp\{s\lambda_k\}$ are called Dirichlet series $(F\cdot G)(s)=\sum_{\kappa=0}^{\infty} f_k g_k \exp\{s\lambda_k\}$. The membership of Hadamard composition $F^{(n)}\cdot G^{(n)}$ of the derivatives and of the derivative of Hadamard composition $(F\cdot G)^{(n)}$ in convergence classes has been investigated. It is established that if F and G belong to convergence class defined by Kamthan for entire Dirichlet series of finite non zero R-order ρ then for each $n\geq 0$ the Dirichlet series $F^{(n)}\cdot G^{(n)}$ and $(F\cdot G)^{(n)}$ belong to convergence class of R-order $\rho/2$ and, thus, to convergence class of R-order ρ. Similar problem has been solved for Dirichlet series with null abscissa of absolute convergence.

ПРО НАЛЕЖНІСТЬ АДАМАРОВИХ КОМПОЗИЦІЙ ПОХІДНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ ДО КЛАСІВ ЗБІЖНОСТІ

О.М. Мулява
Національний університет харчових технологій

Адамаровою композицією рядів Діріхле $F(s)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}$ *і* $G(s)=$ $=\sum_{k=0}^{\infty} g_k \exp\{s\lambda_k\}$ *називається ряд Діріхле* $(F\cdot G)(s)=\sum_{\kappa=0}^{\infty} f_k g_k \exp\{s\lambda_k\}$. *Досліджено належність адамарової композиції* $F^{(n)}\cdot G^{(n)}$ *похідних і похідної адамарової композиції* $(F\cdot G)^{(n)}$ *до певного класу збіжності. Зокрема, доведено, що якщо* F *і* G *належать до означеного Камсеном класу збіжності для цілих рядів Діріхле скінченого ненульового R-порядку* ρ, *то для*

будь-якого $n \geq 0$ ряди Діріхле $F^{(n)} \cdot G^{(n)}$ і $(F \cdot G)^{(n)}$ належать до класу збіжності R-порядку $\rho/2$, отже, до класу збіжності R-порядку ρ. Подібна задача розв'язана для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності.

***Ключові слова**: ряд Діріхле, адамарова композиція, клас збіжності.*

Нехай $\Lambda = (\lambda_\kappa)$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел $(\lambda_0 = 0)$, а ряди Діріхле

$$F(s) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}, s = \sigma + it, \tag{1}$$

і $G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \exp\{s\lambda_k\}$ мають абсциси абсолютної збіжності $\sigma_a[F]$ і $\sigma_a[G]$. Адамаровою композицією цих рядів називається ряд Діріхле

$$(F \cdot G)(s) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} f_k g_k \exp\{s\lambda_k\}. \tag{2}$$

Твердження 1. Якщо $\sigma_a[F] > -\infty$ і $\sigma_a[G] > -\infty$, то $\sigma_a[F \cdot G] \geq \sigma_a[F] + \sigma_a[G]$.

Справді, оскільки $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| \exp\left\{\sigma^* \lambda_k\right\} < +\infty$ для довільного $\sigma^* < \sigma_a[G]$, а $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \exp\left\{ \left(\sigma - \sigma^*\right) \lambda_k \right\} < +\infty$ для довільного $\sigma < \sigma_a[F] + \sigma^*$, то $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k| |g_k| e^{\sigma\lambda_k} = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| e^{\left(\sigma-\sigma^*\right)\lambda_k} |g_k| e^{\sigma^*\lambda_k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| e^{\left(\sigma-\sigma^*\right)\lambda_k} \sum_{k=0}^{\infty} |g_k| e^{\sigma^*\lambda_k} < +\infty$ для довільного $\sigma < \sigma_a[F] + \sigma^*$, тобто $\sigma_a[F \cdot G] \geq \sigma_a[F] + \sigma^*$, а з огляду на довільність σ^* отримаємо потрібну нерівність.

Зауважимо, що нерівність $\sigma_a[F \cdot G] \geq \sigma_a[F] + \sigma_a[G]$ правильна також, коли $\sigma_a[F] = -\infty$ і $\sigma_a[G] < +\infty$, а якщо $\sigma_a[F] = -\infty$ і $\sigma_a[G] = +\infty$, то $\sigma_a[F \cdot G]$ може дорівнювати будь-якому $c \in [-\infty, +\infty]$. До того ж обернена нерівність $\sigma_a[F \cdot G] \leq \sigma_a[F] + \sigma_a[G]$ загалом не є правильною.

Твердження 2. Рівності $\sigma_a[F \cdot G] = \sigma_a\left[(F \cdot G)^{(n)}\right] = \sigma_a\left[F^{(n)} \cdot G^{(n)}\right]$ правильні для будь-якого $n \in N$.

Справді, оскільки $(F \cdot G)^n(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n f_k g_k \exp\{s\lambda_k\}$ і $\left(F^{(n)} \cdot G^{(n)}\right)(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2n} \times f_k g_k \exp\{s\lambda_k\}$, то

$$\left(F^{(n)} \cdot G^{(n)}\right)(s) = (F \cdot G)^{(2n)}(s). \tag{3}$$

Звідси випливає, що досить довести рівність $\sigma_a[F\cdot G]=\sigma_a\left[(F\cdot G)'\right]$, тобто для кожного ряду Діріхле (1) $\sigma_a[F]=\sigma_a[F']$.

Оскільки $F'(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k f_k \exp\{s\lambda_k\}$, то зрозуміло, що $\sigma_a[F']\le\sigma_a[F]$ і $\sigma_a[F]=\sigma_a[F']$, якщо $\sigma_a[F]=-\infty$. Якщо ж $\sigma_a[F]>-\infty$, то для довільного $\sigma<\sigma_a[F]$ існує таке натуральне число $k_0(\sigma)$, що $\frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k}\le\frac{\sigma_a[F]-\sigma}{2}$ для $k\ge k_0(\sigma)$ і, отже,

$$\sum_{k=k_0(\sigma)}^{\infty}\lambda_k|f_k|\exp\{\sigma\lambda_k\}=$$

$$\sum_{k=k_0(\sigma)}^{\infty}|f_k|\exp\left\{\lambda_k\left(\sigma+\frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k}\right)\right\}\le\sum_{k=k_0(\sigma)}^{\infty}|f_k|\exp\left\{\lambda_k\frac{\sigma_a[F]+\sigma}{2}\right\}<+\infty.$$

З огляду на довільність σ звідси випливає, що $\sigma_a[F']\ge\sigma_a[F]$, отже, $\sigma_a[F']=\sigma_a[F]$.

Для цілого $(\sigma_a[F]=+\infty)$ ряду Діріхле (1) R-порядком називається величина $\rho_R[F]=\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}}\frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{\sigma}$, де $M(\sigma,F)=\sup\left\{|F(\sigma+it)|:t\in R\right\}$. Добре відомо [1], що якщо

$$\ln k=o(\lambda_k\ln\lambda_k),\, k\to+\infty, \tag{4}$$

то правильна формула Рітта $\rho_R[F]=\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{\lambda_k\ln\lambda_k}{-\ln|f_k|}$. Використовуючи цю формулу, неважко показати, що за умови (4) $\frac{1}{\rho_R[F\cdot G]}\ge\frac{1}{\rho_R[F]}+\frac{1}{\rho_G[F]}$, тобто

$$\rho_R[F\cdot G]\le\frac{\rho_R[F]\rho_R[G]}{\rho_R[F]+\rho_R[G]}. \tag{5}$$

Зрозуміло, що обернена нерівність не завжди правильна, але правильне наступне твердження.

Твердження 3. Рівності $\rho_R[F\cdot G]=\rho_R\left[(F\cdot G)^{(n)}\right]=\rho_R\left[F^{(n)}\cdot G^{(n)}\right]$ правильні для будь-якого $n\in N$.

Справді, з огляду на (3), як у доведенні твердження 2, досить довести, що для цілого ряду Діріхле (1) $\rho_R[F]=\rho_R[F']$. Для цього припустимо спочатку, що ряд (1) має будь-яку абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a[F]>-\infty$ і, як у [2].

Розглянемо $F(\sigma+it)$ як комплекснозначну функцію дійсної змінної $\sigma\in(-\infty,\sigma_a[F])$. Тоді $\frac{d}{d\sigma}|F(\sigma+it)|\le\left|\frac{d}{d\sigma}F(\sigma+it)\right|=|F'(\sigma+it)|\le M(\sigma,F')$, звідки $|F(\sigma+it)|\le\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma}M(\sigma,F')dx+|F(\sigma_0+it)|$, тобто для $-\infty<\sigma_0<\sigma<\sigma_a[F]$

$$M(\sigma,F)\le M(\sigma,F')(\sigma-\sigma_0)+M(\sigma_0,F). \tag{6}$$

З іншого боку, якщо $\delta>0$ і $\sigma+\delta<\sigma_a[F]$, то $F'(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau-s|=\delta}\frac{F(\tau)d\tau}{(\tau-s)^2}$, звідки $|F'(s)|\le\frac{1}{\delta}\max\limits_{|\tau-s|=\delta}|F(\tau)|\le\frac{1}{\delta}M(\sigma+\delta,F)$, тобто

$$M(\sigma,F')\le\frac{1}{\delta}M(\sigma+\delta,F). \tag{7}$$

Виберемо $\delta=1$ і $\sigma_0=0$. Тоді для $\sigma>0$ з (6) і (7) отримаємо нерівності $M(\sigma,F')\le M(\sigma+1,F)$ і $M(\sigma,F)\le\sigma M(\sigma,F')+M(0,F)$, з яких випливає потрібна рівність.

Для ряду Діріхле (1) з нульовою абсцисою збіжності R-порядок вводиться [3] за формулою $\rho_R^0[F]=\varlimsup\limits_{\sigma\to 0}|\sigma|\ln\ln M(\sigma,F)$. Відомо [3], що якщо

$$\ln k=o(\lambda_k/\ln\lambda_k),\ k\to\infty \tag{8}$$

то правильна формула $\rho_R^0[F]=\varlimsup\limits_{k\to\infty}\frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k}\ln^+|f_k|$. Використовуючи цю формулу, неважко показати, що за умови (8)

$$\rho_R[F\cdot G]\le\rho_R[F]+\rho_R[G]. \tag{9}$$

Зрозуміло, що обернена нерівність не завжди правильна, але правильне наступне твердження.

Твердження 4. Якщо $\sigma_a[F]=\sigma_a[G]=\sigma_a[F\cdot G]=0$, то рівності $\rho_R^0[F\cdot G]=$ $=\rho_R^0\left[(F\cdot G)^{(n)}\right]=\rho_R^0\left[F^{(n)}\cdot G^{(n)}\right]$ правильні для будь-якого $n\in N$.

Справді, як у доведенні твердження 3, досить довести, що для ряду Діріхле (1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності $\rho_R^0[F]=\rho_R^0[F']$. Виберемо $\delta=|\sigma|/2$ і $\sigma_0=-1$. Тоді з (6) і (7) отримуємо нерівності $M(\sigma,F')\le\frac{2}{|\sigma|}M\left(\frac{\sigma}{2},F\right)$ і $M(\sigma,F)\le M(\sigma,F')+M(-1,F)$, звідки легко випливає потрібна рівність. Зауважимо, що за твердженням 1 з рівностей $\sigma_a[F]=\sigma_a[G]=+\infty$ випливає рівність $\sigma_a[F\cdot G]=+\infty$. Для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності ситуація дещо інша. З рівностей

$\sigma_a[F]=\sigma_a[G]=0$ випливає тільки, що $\sigma_a[F\cdot G]\geq 0$. Рівність $\sigma_a[F\cdot G]=0$ може не виконуватись, тому у твердженні 4 наявна умова $\sigma_a[F\cdot G]=0$. Вона виконується, наприклад, якщо $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|f_k g_k|>0$. Справді, якщо існують число $a>0$ і зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел таких, що $\left|f_{k_j} g_{k_j}\right|\geq a$, то для $\sigma>0$ маємо $\left|f_{k_j} g_{k_j}\right|\exp\left\{\sigma\lambda_{k_j}\right\}\geq a\exp\left\{\sigma\lambda_{k_j}\right\}\geq 1$ $(j\geq j_0)$, звідки випливає, що $\sigma_a[F\cdot G]\leq 0$.

Перейдемо до основних результатів. Безпосереднім узагальненням валіронового класу збіжності для цілих функцій скінченного ненульового порядку є введений Камсеном $[4]$ клас збіжності цілих рядів Діріхле (1), який визначається умовою

$$\int\limits_0^\infty e^{-\rho\sigma}\ln M(\sigma,F)d\sigma<+\infty, \tag{10}$$

де $\rho=\rho_R[F]\in(0,+\infty)$. У $[5]$ вказано необхідну і достатню умову на коефіцієнти і показники ряду (1), за якої функція F належить до цього класу.

Для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності, які мають скінченний ненульовий R-порядок, клас збіжності вводиться $[5]$ умовою

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|^2\exp\{\rho/|\sigma|\}}d\sigma<+\infty, \tag{11}$$

де $\rho=\rho_R^0[F]$. Необхідну і достатню умову належності до цього класу в термінах коефіцієнтів встановлено в $[5]$.

Тут буде досліджено умови, за яких з належності до того чи іншого класу функцій F і G випливатиме належність до цього ж класу функцій $(F\cdot G)^{(n)}$ і $F^{(n)}\cdot G^{(n)}$. Для цього нам потрібні леми. Для цілих рядів Діріхле з доведених вище нерівностей $M(\sigma,F')\leq M(\sigma+1,F)$ і $M(\sigma,F)\leq\sigma M(\sigma,F')+$ $+M(0,F)$легко випливає лема 1.

Лема 1. Цілий ряд Діріхле (1) і його похідна належать чи не належать до означеного умовою (10) класу збіжності одночасно.

Аналогом леми 1 для рядів Діріхле з нульовою абсцисою є лема 2.

Лема 2. Ряд Діріхле (1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності та його похідна належать чи не належать до означеного умовою (11) класу збіжності одночасно.

Справді, для $\sigma_0=-1$ з (6) отримуємо нерівність $M(\sigma,F)\leq M(\sigma,F')\times$ $\times(1-|\sigma|)+M(-1,F)=(1+o(1))M(\sigma,F')$ при $\sigma\uparrow 0$, тобто з належності до класу збіжності F' випливає належність до класу збіжності F.

З іншого боку, для $\delta=\sigma^2=|\sigma|^2$ з (7) $\ln M(\sigma,F')\le\ln M\left(\sigma+\sigma^2,F\right)-2\ln|\sigma|$. Тому

$$\int_{-1/3}^{0}\frac{\ln M(\sigma,F')}{|\sigma|^2\exp\{\rho/|\sigma|\}}d\sigma\le\int_{-1/3}^{0}\frac{\ln M\left(\sigma+\sigma^2,F\right)}{|\sigma|^2\exp\{\rho/|\sigma|\}}d\sigma+2\int_{-1/3}^{0}\frac{\ln\left(1/|\sigma|\right)}{|\sigma|^2\exp\{\rho/|\sigma|\}}=$$

$$=\int_{-1/3}^{0}\frac{\left|\sigma+\sigma^2\right|^2}{|\sigma|^2}\frac{\exp\left\{\rho/\left|\sigma+\sigma^2\right|-\rho/|\sigma|\right\}\ln M\left(\sigma+\sigma^2,F\right)}{\left|\sigma+\sigma^2\right|^2\exp\left\{\rho/\left|\sigma+\sigma^2\right|\right\}}\frac{d\left(\sigma+\sigma^2\right)}{1+2\sigma}+const\le$$

$$\le 3\exp\left\{3\,\rho/2\right\}\int_{-1/3}^{0}\frac{\ln M\left(\sigma+\sigma^2,F\right)}{\left|\sigma+\sigma^2\right|^2\exp\left\{\rho/\left|\sigma+\sigma^2\right|\right\}}d\left(\sigma+\sigma^2\right)+const,$$

тобто з належності до класу збіжності F випливає належність до класу збіжності F'. Лему 2 доведено.

Якщо $\sigma_a[F]>-\infty$, для $\sigma<\sigma_a[F]$ нехай $\mu(\sigma,F)=\max\left\{|f_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}:n\ge 0\right\}$ — максимальний член ряду (1). Через $S(\Lambda)$ позначимо клас усіх цілих рядів Діріхле із заданою послідовністю показників Λ, а через $S^0(\Lambda)$ — усіх рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності і послідовністю показників Λ.

Лема 3 $[6]$**.** Для того, щоб для кожної функції $F\in S(\Lambda)$ умови (10) і $\int_0^{\infty}e^{-\rho\sigma}\ln\mu(\sigma,F)d\sigma<+\infty$ були рівносильними, необхідно і досить, щоб $\ln k=O(\lambda_k)$ при $k\to\infty$.

Лема 4 $[7]$**.** Для того, щоб для кожної функції $F\in S^0(\Lambda)$ умови (11) і $\int_{-1}^{0}\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{|\sigma|^2\exp\{\rho/|\sigma|\}}d\sigma<+\infty$ були рівносильними, необхідно, щоб $\ln k=O\left(\lambda_k/\ln^2\lambda_k\right)$ при $k\to\infty$, і досить, щоб $\ln k\le\lambda_k/\ln^q\lambda_k$ $(k\ge k_0)$ для $q>3$.

Для $0<\rho<+\infty$ через $V\{\rho\}$ позначимо клас цілих рядів Діріхле, які задовольняють умову (10).

Теорема 1. Нехай $\ln k=O(\lambda_k)$ при $k\to\infty$. Якщо $F\in V\{\rho_1\}$ і $G\in V\{\rho_2\}$, то $F^{(n)}\cdot G^{(n)}\in V\left\{\rho_1\rho_2/(\rho_1+\rho_2)\right\}$ і $(F\cdot G)^{(n)}\in V\left\{\rho_1\rho_2/(\rho_1+\rho_2)\right\}$.

Доведення. Покажемо спочатку, що $F\cdot G\in V\left\{\rho_1\rho_2/(\rho_1+\rho_2)\right\}$. Справді, оскільки

$$\ln\mu(\sigma,F\cdot G)=\max\left\{\ln|f_k g_k|+\sigma\lambda_k:k\ge 0\right\}=$$

$$=\max\left\{\ln|f_k|+\frac{\rho_2\sigma\lambda_k}{\rho_1+\rho_2}+\ln|g_k|+\frac{\rho_1\sigma\lambda_k}{\rho_1+\rho_2}:k\ge 0\right\}\le$$

$$\le\ln\mu\left(\frac{\rho_2\sigma}{\rho_1+\rho_2},F\right)+\ln\mu\left(\frac{\rho_1\sigma}{\rho_1+\rho_2},G\right),$$

то

$$\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{\rho_1\rho_2\sigma}{\rho_1+\rho_2}\right\}\ln\mu(\sigma,F*G)\,d\sigma\le$$

$$\le\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{\rho_1\rho_2\sigma}{\rho_1+\rho_2}\right\}\ln\mu\left(\frac{\rho_2\sigma}{\rho_1+\rho_2},F\right)d\sigma+$$

$$+\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{\rho_1\rho_2\sigma}{\rho_1+\rho_2}\right\}\ln\mu\left(\frac{\rho_1\sigma}{\rho_1+\rho_2},G\right)d\sigma=$$

$$=\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_2}\int_0^{\infty}\exp\left\{-\rho_1\frac{\rho_2\sigma}{\rho_1+\rho_2}\right\}\ln\mu\left(\frac{\rho_2\sigma}{\rho_1+\rho_2},F\right)d\left(\frac{\rho_2\sigma}{\rho_1+\rho_2}\right)+$$

$$+\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1}\int_0^{\infty}\exp\left\{-\rho_2\frac{\rho_1\sigma}{\rho_1+\rho_2}\right\}\ln\mu\left(\frac{\rho_1\sigma}{\rho_1+\rho_2},G\right)d\left(\frac{\rho_1\sigma}{\rho_1+\rho_2}\right)<+\infty$$

тобто з огляду на лему 3 $F\cdot G\in V\{\rho_1\rho_2/(\rho_1+\rho_2)\}$. Тому за лемою 1 $(F\cdot G)^{(n)}\in V\{\rho_1\rho_2/(\rho_1+\rho_2)\}$ для кожного $n\ge 1$ і з огляду на (3) і $F^{(n)}\cdot G^{(n)}\in V\{\rho_1\rho_2/(\rho_1+\rho_2)\}$ для кожного $n\ge 1$. Теорему 1 доведено.

Розглянемо ряди Діріхле, абсолютно збіжні у півплощині. Для $0<\rho<+\infty$ через $W\{\rho\}$ позначимо клас рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності, які задовольняють умову (11).

Теорема 2. Нехай $\ln k\le\lambda_k/\ln^q\lambda_k$ $(k\ge k_0)$ для $q>3$ і $\varliminf\limits_{k\to\infty}|f_k\rho_k|>0$. Тоді, якщо $F\in W\{\rho_1\}$ і $G\in W\{\rho_2\}$, то $F^{(n)}\cdot G^{(n)}\in W\{\rho_1+\rho_2\}$ і $(F\cdot G)^{(n)}\in W\{\rho_1+\rho_2\}$.

Доведення. Оскільки

$$\ln\mu(\sigma,F\cdot G)\le\ln\mu\left(\frac{\rho_1\sigma}{\rho_1+\rho_2},F\right)+\ln\mu\left(\frac{\rho_2\sigma}{\rho_1+\rho_2},G\right),$$

то

$$\int_{-1}^{0}\frac{\ln\mu(\sigma,F*G)}{|\sigma|^2\exp\{(\rho_1+\rho_2)/|\sigma|\}}d\sigma\le$$

$$\le \int_{-1}^{0} \frac{\ln \mu\left(\frac{\rho_1 \sigma}{\rho_1+\rho_2}, F\right)}{|\sigma|^2 \exp\{(\rho_1+\rho_2)/|\sigma|\}} d\sigma + \int_{-1}^{0} \frac{\ln \mu\left(\frac{\rho_2 \sigma}{\rho_1+\rho_2}, G\right)}{|\sigma|^2 \exp\{(\rho_1+\rho_2)/|\sigma|\}} d\sigma =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2} \int_{-1}^{0} \frac{\ln \mu\left(\frac{\rho_1 \sigma}{\rho_1+\rho_2}, F\right)}{\left|\frac{\rho_1 \sigma}{\rho_1+\rho_2}\right|^2 \exp\left\{\rho_1 \frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1|\sigma|}\right\}} d\left(\frac{\rho_1 \sigma}{\rho_1+\rho_2}\right) +$$

$$+ \frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2} \int_{-1}^{0} \frac{\ln \mu\left(\frac{\rho_2 \sigma}{\rho_1+\rho_2}, F\right)}{\left|\frac{\rho_2 \sigma}{\rho_1+\rho_2}\right|^2 \exp\left\{\rho_2 \frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_2|\sigma|}\right\}} d\left(\frac{\rho_2 \sigma}{\rho_1+\rho_2}\right) < +\infty$$

тобто за лемою 4 $F \cdot G \in W\{\rho_1+\rho_2\}$. Тому за лемою 2 $(F \cdot G)^{(n)} \in W\{\rho_1+\rho_2\}$. Оскільки $F^{(n)} \cdot G^{(n)} = (F \cdot G)^{(2n)}$, то й $F^{(n)} \cdot G^{(n)} \in W\{\rho_1+\rho_2\}$. Теорему 2 доведено.

Висновки

Отже, згідно з доведеними теоремами 1, 2, встановлено, що при виконанні певних умов існує абсолютна збіжність у півплощині рядів Діріхле, звідки випливає належність адамарових композицій до відповідного класу збіжності.

Література

1. *Ritt J.* On certain points in the theory of Dirichlet series // Amer. J. of Math. — 1928. — V.50, № 1. — P.73—86.

2. *Шеремета М.Н., Федыняк С.И.* О производной ряда Дирихле // Сиб. матем. журн. — 1998. — Т. 39, № 1. — С.206—223.

3. *Гайсин А.М.* Оценки роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуплоскости // Матем.сб. — 1982. — Т. 117, № 3. —С. 412—424.

4. *Kamthan P.*K. A theorem of step functions // Istambul univ. fen. fac. mecm. —1963. — V 28. — P. 65—69.

5. *Мулява О.*М. Про класи збіжності рядів Діріхле // Укр. мат. журн. — 1999. — Т.51, № 11. — С.1485—1494.

6. *Filevych P.*V., *Fedynyak S.I. On* belonding of entire Dirichlet series to convergence class // Matem. Studii. — 2001. — V. 16, № 1. — P. 57—60.

7. *Мулява О.М., Шеремета М.М.* Про належність абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле скінченного R-порядку до класу збіжності // Вісник Льв.ун-ту, сер. мех.-мат. — 2007. — Вип. 67.— С. 204—210.

О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ АДАМАРОВСКИХ КОМПОЗИЦИЙ ПРОИЗВОДНЫХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ КЛАССАМ СХОДИМОСТИ

О.М. Мулява
Национальный университет пищевых технологий

Адамаровской композицией рядов Дирихле $F(s)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}$ *и* $G(s)=$ $=\sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k \exp\{s\lambda_k\}$ *называется ряд Дирихле* $(F\cdot G)(s)=\sum\limits_{\kappa=0}^{\infty} f_k g_k \exp\{s\lambda_k\}$. *Исследована принадлежность адамаровской композиции* $F^{(n)}\cdot G^{(n)}$ *производных и производной адамаровской композиции* $(F\cdot G)^{(n)}$ *определенному классу сходимости. В часности, доказано, что если* F *и* G *принадлежат определенному Камсеном классу сходимости для целых рядов Дирихле конечного ненулевого R- порядка* ρ, *то для произвольного* $n\geq 0$ *ряды Дирихле* $F^{(n)}\cdot G^{(n)}$ *и* $(F\cdot G)^{(n)}$ *принадлежат классу сходимости R-порядка* $\rho/2$ *и, следовательно, классу сходимости R-порядка* ρ. *Аналогичная задача решена для рядов Дирихле с нулевой абсциссой абсолютной сходимости.*

Ключевые слова: *ряд Дирихле, адамаровская композиция, класс сходимости.*