УДК 664.1.054, 517.958

MATHEMATICAL MODELING OF HEAT TRANSFER BETWEEN THE CELL SUCROSE ON BASED ON ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM UNSTEADY HEAT CONDUCTION INHOMOGENEOUS BOUNDARY CONDITIONS OF THE SECOND KIND AND INHOMOGENEOUS INITIAL CONDITIONS

T. Pogoriliy
National University of Food Technologies

Key words:
Cellular model
Heat transfer
Nonstationary Equation
Analytical solution

Article history:
Received 18.02.2014
Received in revised form 03.03.2014
Accepted 15.03.2014

Corresponding author:
T. Pogoriliy
Email:
taras22@mail.ru

ABSTRACT

Submitted by a mathematical model creating of heat transfer between cells sucrose and vapor bubbles. The model was created based on the cellular model and is being considered for the following system: crystal sugar smaller cell-sucrose solution smaller cell-vapor bubble-sucrose solution greater cell-crystal sugar greater cells in three-dimensional case. To find the nonstationary problem of heat conduction analytical solution made the transition from two-dimensional to three-dimensional model, which highlighted one area, which is considered in this article.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛООБМІНУ МІЖ КОМІРКАМИ САХАРОЗИ НА ОСНОВІ АНАЛІТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З НЕОДНОРІДНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ ДРУГОГО РОДУ І НЕОДНОРІДНОЮ ПОЧАТКОВОЮ УМОВОЮ

Т.М. Погорілий
Національний університет харчових технологій

У статті представлено створення математичної моделі процесу теплообміну між комірками сахарози й паровою бульбашкою. Модель створено на основі комірчастої моделі і розглянуто для такої системи: кристал цукру меншої комірки—розчин сахарози меншої комірки—парова бульбашка—розчин сахарози більшої комірки—кристал цукру більшої комірки в тривимірному випадку. Для знаходження аналітичного розв'язку нестаціонарної задачі теплопровідності зроблено перехід від об'ємної моделі до двовимірної та виділено одну область, яка і розглядається у пропонованій статті.

Ключові слова: *комірчаста модель, теплообмін, нестаціонарне рівняння, аналітичний розв'язок.*

З метою створення математичної моделі процесу тепло- та масообміну між комірками сахарози при масовому уварюванні цукрового утфелю спочатку було створено геометричну тривимірну модель кристал цукру меншої комірки-розчин сахарози меншої комірки-парова бульбашка-розчин сахарози більшої комірки-кристал цукру більшої комірки (рис. 1). За основу при створенні математичної моделі було взято процес рекристалізації за коливальним механізмом [1], що, у свою чергу, базується на комірчастій моделі колективного росту і розчиненні кристалів цукру. Слід зазначити, що в [2] вже було проведено математичне моделювання цього процесу, однак тільки в одновимірному випадку, що накладає певні обмеження при визначені розподілу температур та маси розчиненої речовини в досліджуваних областях.

Побудована тривимірна геометрична модель повинна відповідати таким умовам: комірки двох кристалів цукру мають бути різного розміру; міжкристальний розчин, що оточує кожен із кристалів цукру, які розглядаються, має певний розмір; парова бульбашка одночасно контактує з міжкристальними розчинами сахарози. Слід зауважити, що міжкристальні розчини, що оточують більший і менший кристали цукру, які одночасно контактують з паровою бульбашкою, у свою чергу, також повинні контактувати і між собою. Також потрібно врахувати, що модель створюється для масової кристалізації сахарози.

При побудові моделі в тривимірному випадку вважали, що товщина кожного з об'єктів, що розглядається, є однієї і тієї ж величиною (приймаємо її як товщину найменшого кристалу цукру, що розглядається). Застосування такого підходу дає змогу розробити систему, що складається з двох кристалів цукру (більшого i-го, та меншого j-го), кожен з яких оточений прошарком міжкристального розчину сахарози (з літературних джерел відомо [3], що міжкристальний розчин сахарози розподіляється пропорційно площі поверхні кожного з кристалів цукру), а також парової бульбашки саме в такому вигляді, як це представлено на рис. 1.

Також потрібно створити математичну модель, що буде описувати процес тепло- та масообміну для всіх компонентів комірчастої моделі одночасно. Через складність знаходження аналітичних розв'язків задач з визначення зміни температури та зміни маси розчиненої речовини для реальних фізичних тіл, а саме: для п'яти різних за своїми фізичними й геометричними характеристиками областей, що розглядаються, з їх природними формами, використовуватимемо спрощену ідеалізовану модель, де кожен з об'єктів представимо у вигляді тіла канонічної форми (прямокутник). Отже, для розрахунку процесу тепло- та масообміну між елементами системи розглянемо цю систему в двовимірному випадку. Кожен з об'єктів зображатимемо у вигляді прямокутників. Таким чином, з отриманої геометричної моделі міжкристальний розчин сахарози меншої j-ої комірки—кристал цукру меншої j-ої комірки—парова бульбашка—кристал цукру більшої i-ої комірки—міжкристальний розчин сахарози більшої i-ої комірки в тривимірному випадку (рис. 1) перейдемо до геометричної моделі в двовимірному випадку (рис. 2).

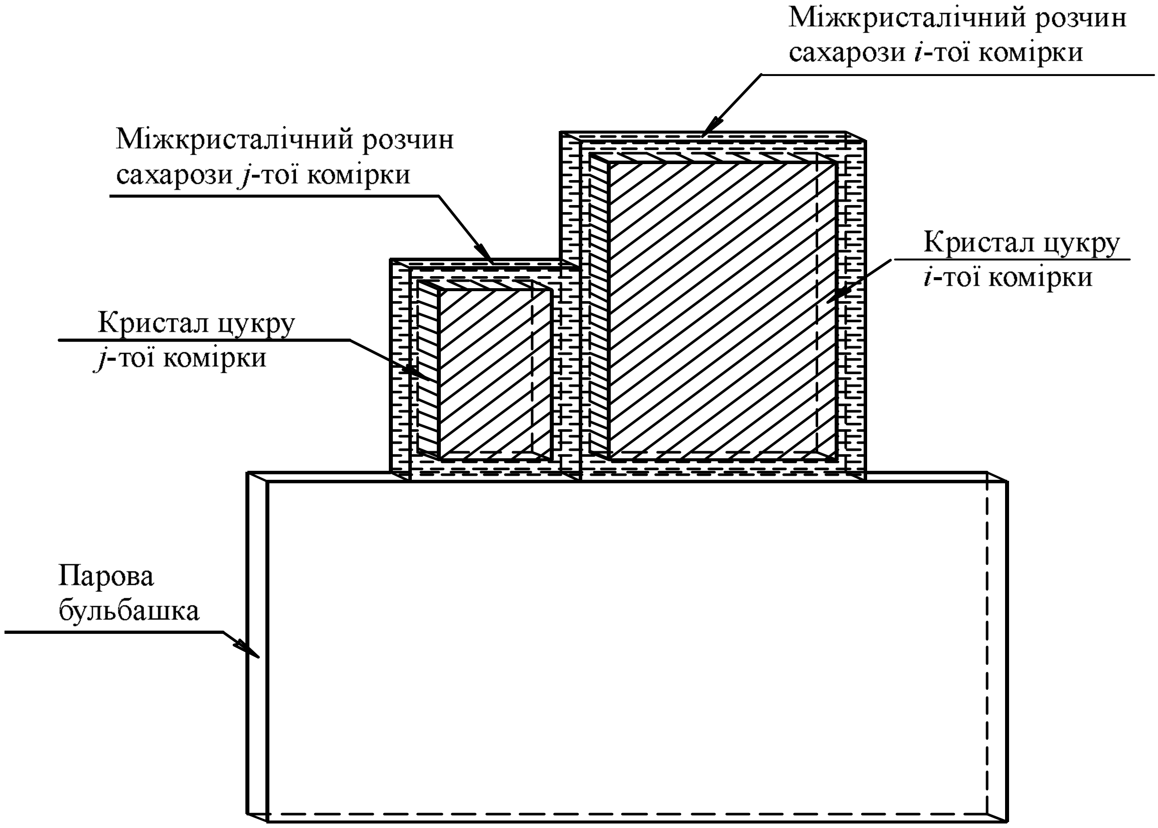

Рис. 1. Тривимірна модель міжкристальний розчин сахарози меншої *j*-ої комірки— кристал цукру меншої *j*-ої комірки—парова бульбашка—кристал цукру більшої *і*-ої комірки—міжкристальний розчин сахарози більшої *і*-ої комірки

Для врахування процесу масової кристалізації сахарози на даному етапі створення моделі виділимо в області, що представляє собою парову бульбашку, область (позначена на рис. 2 пунктирною лінією), яка братиме участь у процесі теплообміну саме з цими двома областями міжкристальних розчинів сахарози більшої *і*-ої та меншої *j*-ої комірок.

У створеній двовимірній моделі міжкристальний розчин сахарози меншої *j-ої комірки—кристал цукру меншої j-ої комірки—парова бульбашка— кристал цукру більшої і-ої комірки—міжкристальний розчин сахарози більшої і-ої комірки* вибираємо одну двовимірну прямокутну область (яку може бути виділено в розчині сахарози для меншої *j*-ої комірки чи в паровій бульбашці, але не в області розчину сахарози більшої комірки, оскільки там граничні умови мають розривний характер на лівій границі, як видно з рис. 2). Для цієї області потрібно знайти аналітичний розв’язок нестаціонарної задачі теплопровідності. Для цього сформульовано постановку задачі (початкові та граничні умови) та проведено пошук розв’язання цієї задачі для однієї області з граничними умовами другого роду. Потрібно знайти аналітичний розв’язок нестаціонарного рівняння теплопровідності в двовимірному випадку для прямокутної області (рис. 3) [4, 5]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

де $u(x,y,t)$, °С — функція розподілу температури в прямокутній області $D=\{(x,y)|x_1 \le x \le x_2,\ y_1 \le y \le y_2\}$ залежно від координат x, y, м та часу t, с; $a=\frac{\lambda}{c\cdot\rho}$, м/с^2 — коефіцієнт температуропровідності; λ, Вт/(м·К) — коефіцієнт теплопровідності; c, кДж/(кг·К) — теплоємність; ρ, кг/м^3 — густина речовини, з неоднорідними граничними умовами другого роду (рис. 1):

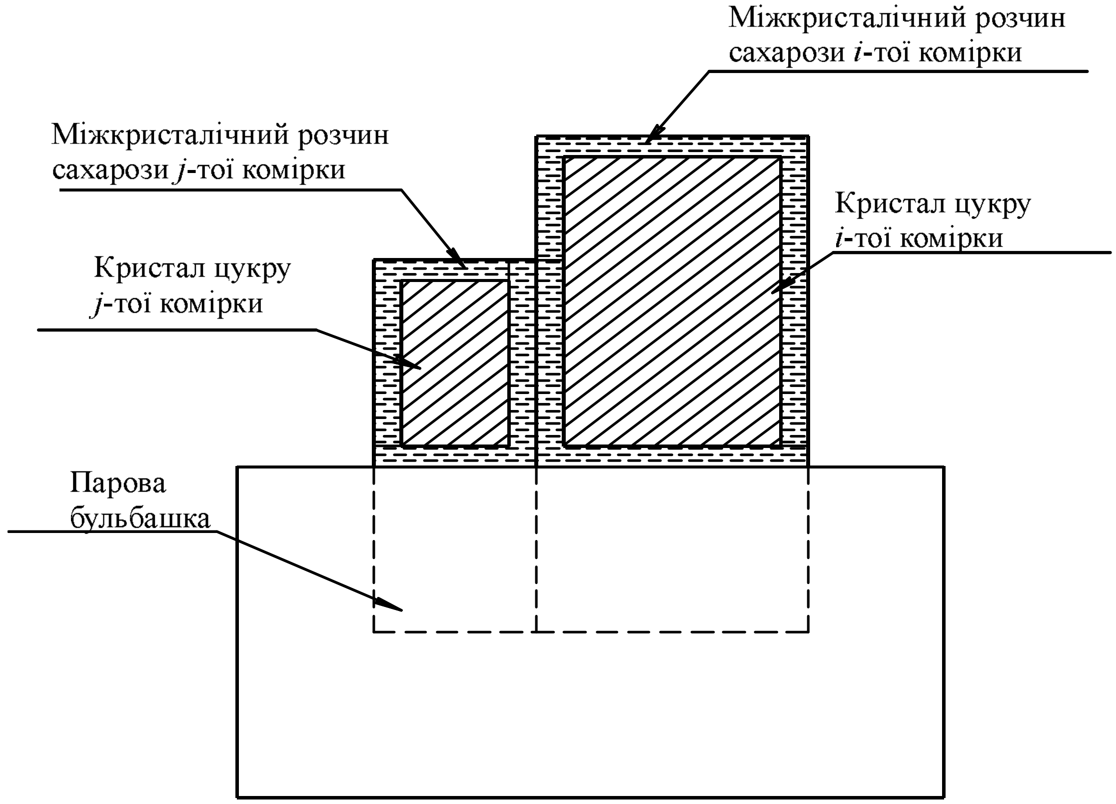

Рис. 2. Двовимірна модель міжкристальний розчин меншої *j*-ої комірки—кристал меншої *j*-ої комірки сахарози—парова бульбашка—кристал більшої *i*-ої комірки сахарози—міжкристальний розчин більшої *i*-ої комірки при масовій кристалізації утфелю

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_2}}=-\frac{\mu_1(t)}{\lambda},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\ y_1\le y\le y_2}}=-\frac{\mu_2(t)}{\lambda},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1\\ x_1\le x\le x_2}}=$$

$$=-\frac{\mu_3(t)}{\lambda},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2\\ x_1\le x\le x_2}}=-\frac{\mu_4(t)}{\lambda},\quad (t\ge 0), \tag{2}$$

та наступною неоднорідною початковою умовою:

$$u(x,y,t)\big|_{t=0}=\varphi(x,y),(x_1\le x\le x_2,\ y_1\le y\le y_2). \tag{3}$$

Знаходження розв'язку даної задачі проводилось з використанням методу розділення змінних Фур'є [4, 5]. Слід зауважити, що безпосередньо застосовувати метод розділення змінних Фур'є для розв'язання поставленої нестаціонарної задачі теплопровідності (1)—(3) в даному випадку неможливо через неоднорідні (тотожно не рівні нулю) граничні умови (2). Виходячи з цього, задача (1)—(3) була зведена до вигляду, який дає змогу застосувати метод Фур'є [4, 5]. Розв'язок задачі (1)—(3) знайшли у вигляді суми двох функцій *v(x,y,t)* та *U(x,y,t)*:

$$u(x,y,t) = v(x,y,t) + U(x,y,t), \tag{4}$$

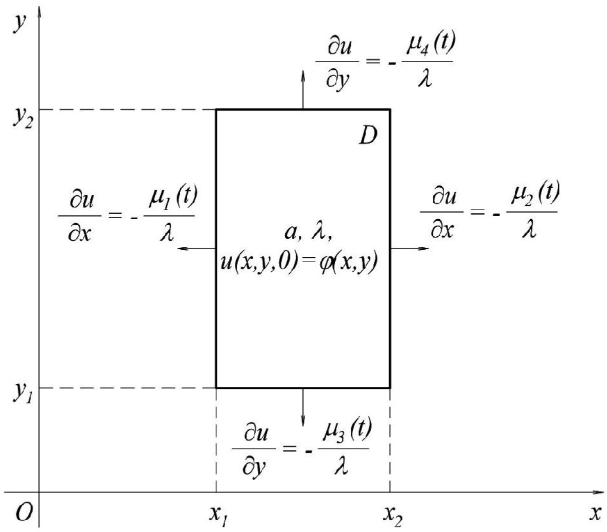

Рис. 3. Нестаціонарна задача теплопровідності для двовимірної прямокутної області *D* з неоднорідними граничними умовами та неоднорідною початковою умовою

де функцію *U(x,y,t)* обрано таким чином, щоб задовольнялись неоднорідні граничні умови (2), тобто:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1 \\ y_1\le y\le y_2}} = -\frac{\mu_1(t)}{\lambda}, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2 \\ y_1\le y\le y_2}} = -\frac{\mu_2(t)}{\lambda}, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1 \\ x_1\le x\le x_2}} =$$

$$-\frac{\mu_3(t)}{\lambda}, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2 \\ x_1\le x\le x_2}} = -\frac{\mu_4(t)}{\lambda}, \quad (t \ge 0). \tag{5}$$

Тоді шукана функція *U(x,y,t)* матиме такий вигляд:

$$U(x,y,t) = -\frac{1}{\lambda\cdot(x_2-x_1)}\left[x\cdot(x_2\cdot\mu_1(t) - x_1\cdot\mu_2(t)) + \frac{x^2}{2}\cdot(\mu_2(t)-\mu_1(t))\right] - \\ -\frac{1}{\lambda\cdot(y_2-y_1)}\left[y\cdot(y_2\cdot\mu_3(t) - y_1\cdot\mu_4(t)) + \frac{y^2}{2}\cdot(\mu_4(t)-\mu_3(t))\right]. \tag{6}$$

Отже, з урахуванням граничних умов (2) та початкової умови (3), а також вибору функції *U(x,y,t)*, що задовольняє граничні умови (5), шукана функція *v(x,y,t* повинна задовольняти такі граничні умови:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1 \\ y_1\le y\le y_2}} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1 \\ y_1\le y\le y_2}} - \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1 \\ y_1\le y\le y_2}} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2 \\ y_1\le y\le y_2}} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1 \\ x_1\le x\le x_2}} =$$

$$=0,\quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2\\ x_1\le x\le x_2}}=0,\quad (t\ge 0)\,, \tag{7}$$

а також таку початкову умову:

$$v(x,y,t)\big|_{t=0}=u(x,y,t)\big|_{t=0}-U(x,y,t)\big|_{t=0}=\psi(x,y)\,. \tag{8}$$

Відповідно, функція $\psi(x,y)$, виходячи з умови (8), буде дорівнювати:

$$\psi(x,y)=\phi(x,y)+\frac{1}{\lambda\cdot(x_2-x_1)}\left[x\cdot\left(x_2\cdot\mu_1(0)-x_1\cdot\mu_2(0)\right)+\frac{x^2}{2}\cdot\left(\mu_2(0)-\mu_1(0)\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{\lambda\cdot(y_2-y_1)}\left[y\cdot\left(y_2\cdot\mu_3(0)-y_1\cdot\mu_4(0)\right)+\frac{y^2}{2}\cdot\left(\mu_4(0)-\mu_3(0)\right)\right]. \tag{9}$$

Диференціальне рівняння теплопровідності для функції *v(x,y,t)* на основі (4) матиме такий вигляді:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+a\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial U}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t), \tag{10}$$

де функція $f(x,y,t)$ знаходиться з такого виразу:

$$f(x,y,t)=a\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial U}{\partial t}=$$
$$=-\frac{1}{\lambda\cdot(x_2-x_1)}\left[a\left(\mu_2(t)-\mu_1(t)\right)-x\cdot\left(x_2\cdot\mu_1{}'(t)-x_1\cdot\mu_2{}'(t)\right)-\frac{x^2}{2}\cdot\left(\mu_2{}'(t)-\mu_1{}'(t)\right)\right]- \tag{11}$$
$$-\frac{1}{\lambda\cdot(y_2-y_1)}\left[a\left(\mu_4(t)-\mu_3(t)\right)-y\cdot\left(y_2\cdot\mu_3{}'(t)-y_1\cdot\mu_4{}'(t)\right)-\frac{y^2}{2}\cdot\left(\mu_4{}'(t)-\mu_3{}'(t)\right)\right].$$

Таким чином, зважаючи на неоднорідність диференціального рівняння (10) та неоднорідність початкової умови (8), застосувати метод розділення змінних Фур'є для знаходження вже нової шуканої функції *v(x,y,t)* все ще не можливо. Подамо функцію *v(x,y,t)* у вигляді суми двох функцій $v_1(x,y,t)$ та $v_2(x,y,t)$:

$$v(x,y,t)=v_1(x,y,t)+v_2(x,y,t)\,. \tag{12}$$

Зазначимо, що функція $v_1(x,y,t)$ обирається такою, щоб задовольнити нестаціонарне однорідне рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\right) \tag{13}$$

з такими однорідними (на основі (7)) граничними умовами:

$$\left.\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_2}}=0,\quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\ y_1\le y\le y_2}}=0,\quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1\\ x_1\le x\le x_2}}=0,\quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2\\ x_1\le x\le x_2}}=0\,, \tag{14}$$

та такою неоднорідною початковою умовою:

$$v_1(x,y,t)\big|_{t=0} = \psi(x,y)\,, \tag{15}$$

враховуючи, що функція $\psi(x,y)$ знаходиться з виразу (9).

Тоді, з урахуванням умов для функції $v_1(x,y,t)$, функція $v_2(x,y,t)$ буде задовольняти таке нестаціонарне неоднорідне рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t)\,, \tag{16}$$

з такими однорідними граничними умовами:

$$\left.\frac{\partial v_2}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1 \\ y_1\le y\le y_2}} = 0,\quad \left.\frac{\partial v_2}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2 \\ y_1\le y\le y_2}} = 0,\quad \left.\frac{\partial v_2}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1 \\ x_1\le x\le x_2}} =$$

$$= 0,\quad \left.\frac{\partial v_2}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2 \\ x_1\le x\le x_2}} = 0,\quad (t\ge 0)\,, \tag{17}$$

та такою однорідною початковою умовою:

$$v_2(x,y,t)\big|_{t=0} = 0\,. \tag{18}$$

Оскільки через вибір функції $U(x,y,t)$ (6) граничні умови (14) вже однорідні, то при безпосередньому застосуванні до задачі теплопровідності (13)—(15) методу розділення змінних Фур'є розв'язок для функції $v_1(x,y,t)$ матиме такий вигляд [5]:

$$v_1(x,y,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}\cdot e^{-a\cdot\left(\left(\frac{m\pi}{x_2-x_1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{y_2-y_1}\right)^2\right)\cdot t}\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{m\pi(x-x_1)}{x_2-x_1}\cdot\cos\frac{n\pi(y-y_1)}{y_2-y_1}\,, \tag{19}$$

де коефіцієнти $A_{m,n},(m\ge 0, n\ge 0)$ знаходяться з таких виразів:

$$A_{0,0} = \frac{1}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta\,, \tag{20}$$

$$A_{m,0} = \frac{2}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\psi(\xi,\eta)\cdot\cos\frac{m\pi(\xi-x_1)}{x_2-x_1}d\xi d\eta,\quad (m\ge 1)\,, \tag{21}$$

$$A_{0,n} = \frac{1}{x_2-x_1}\cdot\frac{2}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\psi(\xi,\eta)\cdot\cos\frac{n\pi(\eta-y_1)}{y_2-y_1}d\xi d\eta,\quad (n\ge 1)\,, \tag{22}$$

$$A_{m,n} = \frac{2}{x_2-x_1}\cdot\frac{2}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\psi(\xi,\eta)\cdot\cos\frac{m\pi(\xi-x_1)}{x_2-x_1}\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{n\pi(\eta-y_1)}{y_2-y_1}d\xi d\eta, \quad (m,n\geq 1)\,. \tag{23}$$

Розв'язок задачі теплопровідності (16)—(18) для функції $v_2(x,y,t)$, у свою чергу, можна записати в такому вигляді [6]:

$$v_2(x,y,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}T_{2_{m,n}}(t)\cdot\cos\frac{m\pi(x-x_1)}{x_2-x_1}\cdot\cos\frac{n\pi(y-y_1)}{y_2-y_1}, \tag{24}$$

де, відповідно, коефіцієнти $T_{2_{m,n}}(t),(m\geq 0,n\geq 0)$, знаходяться з таких виразів:

$$T_{2_{m,n}}(t)=\int_0^t e^{-a\cdot\left(\left(\frac{m\pi}{x_2-x_1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{y_2-y_1}\right)^2\right)\cdot(t-\tau)}\cdot f_{m,n}(\tau)d\tau, \quad (m,n\geq 0)\,. \tag{25}$$

Коефіцієнти $f_{m,n}(t),(m\geq 0,n\geq 0)$ визначаються з таких виразів:

$$f_{0,0}(t)=\frac{1}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}f(\xi,\eta,t)d\xi d\eta\,, \tag{26}$$

$$f_{m,0}(t)=\frac{2}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}f(\xi,\eta,t)\cdot\cos\frac{m\pi(\xi-x_1)}{x_2-x_1}d\xi d\eta, \quad (m\geq 1)\,, \tag{27}$$

$$f_{0,n}(t)=\frac{1}{x_2-x_1}\cdot\frac{2}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}f(\xi,\eta,t)\cdot\cos\frac{n\pi(\eta-y_1)}{y_2-y_1}d\xi d\eta, \quad (n\geq 1)\,, \tag{28}$$

$$f_{m,n}(t)=\frac{2}{x_2-x_1}\cdot\frac{2}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}f(\xi,\eta,t)\cdot\cos\frac{m\pi(\xi-x_1)}{x_2-x_1}\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{n\pi(\eta-y_1)}{y_2-y_1}d\xi d\eta, \quad (m,n\geq 1) \tag{29}$$

де функція $f(x,y,t)$ в підінтегральних виразах (26)—(29) записується на основі виразу (10).

Остаточно розв'язок вихідної нестаціонарної задачі теплопровідності (1)—(3) на основі (4) та (12) буде записано через суму функцій:

$$u(x,y,t)=U(x,y,t)+v_1(x,y,t)+v_2(x,y,t)\,, \tag{30}$$

де функція $U(x,y,t)$ представлена виразом (6); функція $v_1(x,y,t)$ — виразом (19), де коефіцієнти $A_{m,n},(m\geq 0,n\geq 0)$ знаходяться з виразів (20)—(23); функція $v_2(x,y,t)$ — представлена виразом (24), де шукані коефіцієнти $T_{2_{m,n}}(t),(m\geq 0,n\geq 0)$ та $f_{m,n}(t),(m\geq 0,n\geq 0)$ знаходяться, відповідно, з виразів (25) та (26)—(29).

Висновки

Створено тривимірну комірчасту модель кристал цукру меншої комірки—розчин сахарози меншої комірки—парова бульбашка—розчин сахарози більшої комірки—кристал цукру більшої комірки. Зроблено перехід від тривимірної моделі до двовимірної моделі. Виділено одну область і для неї знайдено аналітичний розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності з граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою.

Література

1. *Погорелый Т. М., Мирончик В. Г.* Математическое моделирование процесса рекристаллизации на основании аналитических решений нестационарных задач теплопроводности в двухмерном случае для прямоугольных областей с неоднородными (непрерывными и разрывными на одной из сторон) граничными условиями и неоднородными начальными условиями // Тезисы докладов и сообщений XIV Минского международного форума по тепло- и массообмену, 10—13 сентября 2012 г. — Том 1, Часть 2. — Минск.: Інститут тепло- и массобмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, 2012. — С. 761—764.

2. *Погорілий Т. М.* Математичне моделювання асиметричного механізму рекристалізації при уварюванні цукрових утфелів: Дис. ... канд. техн. наук: 05.18.12. — К., 2001. — 217 с.

3. *Кулинченко В. Р., Мирончук В. Г.* Промышленная кристаллизация сахаристих веществ: Монографія. — К.: НУПТ, 2012. — 426 с.

4. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967. — 599 с.

5. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. — М.: Высшая школа, 1970. — 712 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛООБМЕНА МЕЖДУ ЯЧЕЙКАМИ САХАРОЗЫ НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ВТОРОГО РОДА И НЕОДНОРОДНЫМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Т.М. Погорелый
Национальный университет пищевых технологий

В статье представлено создание математической модели процесса теплообмена между ячейками сахарозы и паровым пузырьком. Модель создана на основании ячеистой модели и рассматривается для следующей системы: кристалл сахара меньшей ячейки—раствор сахарозы меньшей ячейки—паровой пузырек—раствор сахарозы большей ячейки—кристалл сахара *большей ячейки в трехмерном случае. Для нахождения аналитического решения нестационарной задачи теплопроводности произведен переход от объемной модели к двухмерной, в которой выделена одна область, которая и рассматривается в данной статье.*

Ключевые слова: *ячеистая модель, теплообмен, нестационарное уравнение, аналитическое решение.*