УДК 664.1.054, 517.958

MATHEMATICAL MODELING OF HEAT EXCHANGE PROCESSES

T. Pogoriliyy
National University of Food Technologies

Key words:
Cellular model
Heat transfer
Nonstationary equation
Discontinuous boundary conditions
Analytical solution

Article history:
Received 15.07.2014
Received in revised form 20.07.2014
Accepted 01.08.2014

Corresponding author:
T. Pogoriliyy
E-mail:
taras22@mail.ru

ABSTRACT

The extension of study on creating mathematical model of heat transfer between the cells of sucrose and a vapor bubble is presented in this article. A geometric model, which was established on the basis of cellular models, is still used for the following system: sugar crystal of a smaller cell -sucrose solution of smaller cell - vapor bubble - sucrose solution of bigger cell — sugar crystal of bigger cells in three-dimensional case. However, in this case, the rectangular area which corresponds to the bigger cell of sucrose solution is pointed out during the change from two-dimensional to three-dimensional model. The analytical solution of the nonstationary problem of heat transfer in two-dimensional case with patchy discontinuous on one side (left) and continuous ones on all the other sides of the domain boundary conditions and inhomogeneous initial condition has been proposed in this study.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛООБМІНУ

Т.М. Погорілий
Національний університет харчових технологій

У статті представлено продовження створення математичної моделі процесу теплообміну між комірками сахарози та паровою бульбашкою. Геометрична модель, що була створена на основі комірчастої моделі і розглядалась для системи: кристал цукру меншої комірки–розчин сахарози меншої комірки–парова бульбашка–розчин сахарози більшої комірки–кристал цукру більшої комірки в тривимірному випадку, використовується й надалі. Але в даному випадку при переході від об'ємної моделі до двовимірної виділено саме ту прямокутну область, яка відповідає більшій комірці розчину сахарози. Саме для неї й розглядається аналітичний розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності в двовимірному випадку з неоднорідними розривними на одній із бічних сторін (лівій) і неперервними на всіх інших сторонах області граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою.

Ключові слова: *комірчаста модель, теплообмін, нестаціонарне рівняння, розривні граничні умови, аналітичний розв'язок.*

З метою подальшого створення математичної моделі [1] процесу тепло- та масообміну між комірками сахарози при масовому уварюванні цукрового утфелю було використано вже створену автором [2] геометричну тривимірну модель кристал цукру меншої комірки–розчин сахарози меншої комірки–парова бульбашка–розчин сахарози більшої комірки–кристал цукру більшої комірки.

З отриманої геометричної моделі міжкристальний розчин сахарози меншої j-ої комірки–кристал цукру меншої j-ої комірки–парова бульбашка–кристал цукру більшої i-ої комірки–міжкристальний розчин сахарози більшої i-ої комірки в тривимірному випадку перейдемо до геометричної моделі в двовимірному випадку (рис. 1).

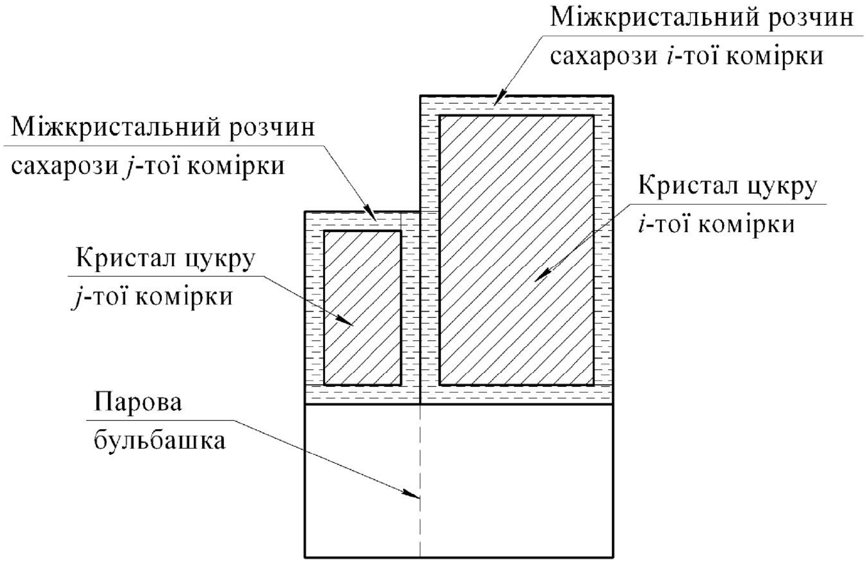

Рис. 1. Двовимірна модель міжкристальний розчин меншої j-ої комірки–кристал меншої j-ої комірки сахарози–парова бульбашка–кристал більшої i-ої комірки сахарози–міжкристальний розчин більшої i-ої комірки при масовій кристалізації утфелю

У створеній двовимірній моделі міжкристальний розчин сахарози меншої j-ої комірки–кристал цукру меншої j-ої комірки–парова бульбашка–кристал цукру більшої i-ої комірки–міжкристальний розчин сахарози більшої i-ої комірки вибираємо саме ту двовимірну прямокутну область, яка відповідає області розчину сахарози більшої комірки, оскільки там граничні умови мають розривний характер на лівій границі, що безпосередньо видно з рис. 1. Для цієї області потрібно знайти аналітичний розв’язок нестаціонарної задачі теплопровідності. Для цього сформулювали постановку задачі (початкові та граничні умови) та провели пошук її розв’язання.

Отже, потрібно знайти аналітичний розв’язок нестаціонарного рівняння теплопровідності в двовимірному випадку для прямокутної області (рис. 2) [3, 4]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

де $u(x,y,t)$, °C — функція розподілу температури в прямокутній області $D=\{(x,y)|x_1 \le x \le x_2,\ y_1 \le y \le y_2\}$, в залежності від координат x, y, м та часу t, с;

$a=\dfrac{\lambda}{c\cdot\rho}$, м/с^2 — коефіцієнт температуропровідності; λ, Вт/(м·К) — коефіцієнт теплопровідності; *c*, кДж/(кг·К) — теплоємність; *ρ*, кг/м^3 — густина речовини, з неоднорідними розривними на одній із бічних сторін та неперервними на всіх інших сторонах області *D* граничними умовами другого роду (рис. 1):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_{1_1}}}=-\frac{\mu_{1_1}(t)}{\lambda},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_{1_1}\le y\le y_2}}=-\frac{\mu_{1_2}(t)}{\lambda},\quad (t\ge 0), \tag{2,а}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\ y_1\le y\le y_2}}=-\frac{\mu_2(t)}{\lambda},\quad (t\ge 0), \tag{2, б}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1\\ x_1\le x\le x_2}}=-\frac{\mu_3(t)}{\lambda},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2\\ x_1\le x\le x_2}}=-\frac{\mu_4(t)}{\lambda},\quad (t\ge 0) \tag{2, в}$$

та наступною неоднорідною початковою умовою:

$$u(x,y,t)\big|_{t=0}=\varphi(x,y),\,(x_1\le x\le x_2,\,y_1\le y\le y_2). \tag{3}$$

Знаходження розв'язку даної задачі проводилось з використанням методу розділення змінних Фур'є [3, 4]. Варто зауважити, що безпосередньо застосовувати метод Фур'є розділення змінних для розв'язання поставленої нестаціонарної задачі теплопровідності (1)—(3) в даному випадку неможливо через неоднорідні (тотожно не рівні нулю) граничні умови (2, а)—(2, в). Зважаючи на це, задача (1)—(3) була зведена до такого вигляду, коли вже буде можливе безпосереднє застосування методу Фур'є [3, 4]. Розв'язок задачі (1)—(3) шукався у вигляді суми двох функцій *v(x,y,t)* та *U(x,y,t)*:

$$u(x,y,t)=v(x,y,t)+U(x,y,t), \tag{4}$$

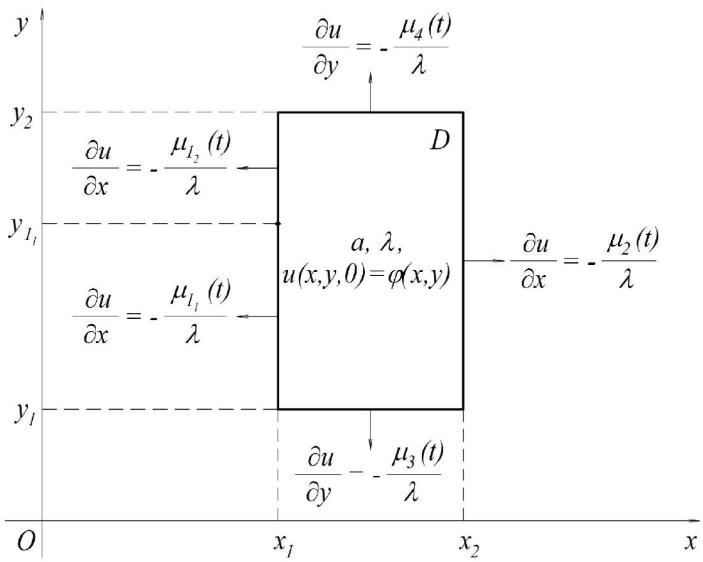

Рис. 2. Нестаціонарна задача теплопровідності для двовимірної прямокутної області *D* з неоднорідними розривними на одній із бічних сторін і неперервними на всіх інших сторонах області D граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою

де функцію *U(x,y,t)* обрано таким чином, щоб задовольнялись неоднорідні розривні на одній із бічних сторін та неперервні на всіх інших сторонах граничні умови (2, а)—(2, в), тобто:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_{1_1}}}=-\frac{\mu_{1_1}(t)}{\lambda},\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_{1_1}\le y\le y_2}}=-\frac{\mu_{1_2}(t)}{\lambda},(t\ge 0), \qquad (5,\text{а})$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\ y_1\le y\le y_2}}=-\frac{\mu_2(t)}{\lambda},\quad (t\ge 0)\cdot \qquad (5,\text{б})$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1\\ x_1\le x\le x_2}}=-\frac{\mu_3(t)}{\lambda},\quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2\\ x_1\le x\le x_2}}=-\frac{\mu_4(t)}{\lambda},\quad (t\ge 0). \qquad (5,\text{в})$$

Шукана функція *U(x,y,t)* матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned}U(x,y,t)=&-\frac{1}{\lambda\cdot(x_2-x_1)}\cdot\Big[x\cdot\Big(x_2\cdot\Big\{\mu_{1_1}(t)\big[H(y-y_1)-H(y-y_{1_1})\big]+\\&+\mu_{1_2}(t)\big[H(y-y_{1_1})-H(y-y_2)\big]\Big\}-x_1\cdot\mu_2(t)\Big)+\\&+\frac{x^2}{2}\cdot\Big(\mu_2(t)-\Big\{\mu_{1_1}(t)\big[H(y-y_1)-H(y-y_{1_1})\big]+\mu_{1_2}(t)\big[H(y-y_{1_1})-H(y-y_2)\big]\Big\}\Big)\Big]-\\&-\frac{1}{\lambda\cdot(y_2-y_1)}\Big[y\cdot\big(y_2\cdot\mu_3(t)-y_1\cdot\mu_4(t)\big)+\frac{y^2}{2}\cdot\big(\mu_4(t)-\mu_3(t)\big)\Big],\end{aligned} \qquad (6)$$

де функція *H(x)* — симетрична одинична функція Хевісайда [5].

З урахуванням граничних умов (2, а)—2, в) та початкової умови (3), а також вибору функції *U(x,y,t)*, що задовольняє граничні умови (5, а)—(5, в), шукана функція *v(x,y,t)*, у свою чергу, повинна задовольняти такі розривні на одній із бічних сторін і неперервні на всіх інших сторонах граничні умови:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_{1_1}}}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_{1_1}}}-\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y1_1}}=0,\quad (t\ge 0), \qquad (7,\text{а})$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_{1_1}\le y\le y_2}}=0,\quad (t\ge 0), \qquad (7,\text{б})$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\ y_1\le y\le y_2}}=0,\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1\\ x_1\le x\le x_2}}=0,\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2\\ x_1\le x\le x_2}}=0,(t\ge 0), \qquad (7,\text{в})$$

а також наступній початковій умові:

$$v(x,y,t)\big|_{t=0}=u(x,y,t)\big|_{t=0}-U(x,y,t)\big|_{t=0}=\psi(x,y). \qquad (8)$$

Відповідно, функція $\psi(x,y)$, виходячи з умови (8), буде дорівнювати:

$$
\begin{aligned}
\psi(x,y) = \varphi(x,y) + \frac{1}{\lambda\cdot(x_2-x_1)}\Big[x\Big(x_2\cdot\Big\{\mu_{1_1}(0)\cdot\big[H(y-y_1)-H(y-y_{1_1})\big]+ \\
+\mu_{1_2}(0)\cdot\big[H(y-y_{1_1})-H(y-y_2)\big]\Big\}-x_1\cdot\mu_2(0)\Big)+ \\
+\frac{x^2}{2}\cdot\Big(\mu_2(0)-\Big\{\mu_{1_1}(0)\cdot\big[H(y-y_1)-H(y-y_{1_1})\big]+\mu_{1_2}(0)\cdot\big[H(y-y_{1_1})-H(y-y_2)\big]\Big\}\Big)\Big]+ \\
+\frac{1}{\lambda\cdot(y_2-y_1)}\Big[y\cdot\big(y_2\cdot\mu_3(0)-y_1\cdot\mu_4(0)\big)+\frac{y^2}{2}\cdot\big(\mu_4(0)-\mu_3(0)\big)\Big].
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Диференціальне рівняння теплопровідності для функції *v(x,y,t)* на основі (4) запишеться в наступному вигляді:

$$
\frac{\partial v}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+a\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial U}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t)\,, \tag{10}
$$

де функція $f(x,y,t)$, в свою чергу, буде знаходитись з наступного виразу:

$$
\begin{aligned}
f(x,y,t) = a\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\lambda\cdot(x_2-x_1)}\Big[a\Big(\mu_2(t)- \\
-\Big\{\mu_{1_1}(t)\cdot\big[H(y-y_1)-H(y-y_{1_1})\big]+\mu_{1_2}(t)\cdot\big[H(y-y_{1_1})-H(y-y_2)\big]\Big\}\Big)- \\
-x\cdot\Big(x_2\cdot\Big\{\mu_{1_1}'(t)\cdot\big[H(y-y_1)-H(y-y_{1_1})\big]+\mu_{1_2}'(t)\cdot\big[H(y-y_{1_1})-H(y-y_2)\big]\Big\}- \\
-x_1\cdot\mu_2'(t)\Big)-\frac{x^2}{2}\cdot\Big(\mu_2'(t)-\Big\{\mu_{1_1}'(t)\cdot\big[H(y-y_1)-H(y-y_{1_1})\big]+ \\
+\mu_{1_2}'(t)\cdot\big[H(y-y_{1_1})-H(y-y_2)\big]\Big\}\Big)\Big]-\frac{1}{\lambda\cdot(y_2-y_1)}\Big[a\big(\mu_4(t)-\mu_3(t)\big)- \\
-y\cdot\big(y_2\cdot\mu_3'(t)-y_1\cdot\mu_4'(t)\big)-\frac{y^2}{2}\cdot\big(\mu_4'(t)-\mu_3'(t)\big)\Big].
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Через неоднорідність диференціального рівняння (10) та неоднорідну початкову умову (8) застосувати метод розділення змінних Фур'є для знаходження вже нової шуканої функції *v(x,y,t)* все ще неможливо. Зважаючи на це, подамо функцію *v(x,y,t)* у вигляді суми двох функцій $v_1(x,y,t)$ та $v_2(x,y,t)$:

$$
v(x,y,t) = v_1(x,y,t)+v_2(x,y,t)\,. \tag{12}
$$

Слід зазначити, що функція $v_1(x,y,t)$ обирається такою, щоб задовольнити таке нестаціонарне однорідне рівняння теплопровідності:

$$
\frac{\partial v_1}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\right), \tag{13}
$$

з однорідними на основі (7) розривними на одній із бічних сторін і неперервними на всіх інших сторонах граничними умовами:

$$\left.\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_{1_1}}}=0,\quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_{1_2}}}=0,\quad (t\ge 0), \tag{14, а}$$

$$\left.\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\ y_1\le y\le y_2}}=0, \left.\frac{\partial v_1}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1\\ x_1\le x\le x_2}}=0, \left.\frac{\partial v_1}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2\\ x_1\le x\le x_2}}=0, (t\ge 0), \tag{14, б}$$

і такою неоднорідною початковою умовою:

$$v_1(x,y,t)\big|_{t=0}=\psi(x,y), \tag{15}$$

враховуючи, що функція $\psi(x,y)$ знаходиться з виразу (9).

З урахуванням вибору таких умов для функції $v_1(x,y,t)$ функція $v_2(x,y,t)$ буде задовольняти таке нестаціонарне неоднорідне рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t), \tag{16}$$

з однорідними розривними на одній із бічних сторін і неперервними на всіх інших сторонах граничними умовами:

$$\left.\frac{\partial v_2}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_{1_1}}}=0,\quad \left.\frac{\partial v_2}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_{1_2}}}=0,\quad (t\ge 0), \tag{17, а}$$

$$\left.\frac{\partial v_2}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\ y_1\le y\le y_2}}=0, \left.\frac{\partial v_2}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1\\ x_1\le x\le x_2}}=0, \left.\frac{\partial v_2}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2\\ x_1\le x\le x_2}}=0, (t\ge 0), \tag{17, б}$$

і такою однорідною початковою умовою:

$$v_2(x,y,t)\big|_{t=0}=0. \tag{18}$$

Оскільки через вибір функції $U(x,y,t)$ (6) граничні умови (14) вже однорідні, то при безпосередньому застосуванні до задачі теплопровідності (13)–(15) методу розділення змінних Фур'є розв'язок для функції $v_1(x,y,t)$ можна записати в такому вигляді [2]:

$$v_1(x,y,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{m,n}\cdot e^{-a\cdot\left(\left(\frac{m\pi}{x_2-x_1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{y_2-y_1}\right)^2\right)\cdot t}\cdot\cos\frac{m\pi(x-x_1)}{x_2-x_1}\cdot$$
$$\cdot\cos\frac{n\pi(y-y_1)}{y_2-y_1}, \tag{19}$$

де коефіцієнти $A_{m,n}$, $(m\ge 0, n\ge 0)$ визначаються з таких виразів:

$$A_{0,0}=\frac{1}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{20}$$

$$A_{m,0} = \frac{2}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \psi(\xi, \eta) \cdot \cos \frac{m\pi(\xi - x_1)}{x_2 - x_1} d\xi d\eta, \quad (m \geq 1), \quad (21)$$

$$A_{0,n} = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{2}{y_2 - y_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \psi(\xi, \eta) \cdot \cos \frac{n\pi(\eta - y_1)}{y_2 - y_1} d\xi d\eta, \quad (n \geq 1), \quad (22)$$

$$A_{m,n} = \frac{2}{x_2 - x_1} \cdot \frac{2}{y_2 - y_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \psi(\xi, \eta) \cdot \cos \frac{m\pi(\xi - x_1)}{x_2 - x_1} \cdot \cos \frac{n\pi(\eta - y_1)}{y_2 - y_1} d\xi d\eta, (m, n \geq 1). \quad (23)$$

Розв'язок задачі теплопровідності (16)–(18) для функції $v_2(x,y,t)$, у свою чергу, можна записати в такому вигляді [3]:

$$v_2(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{2_{m,n}}(t) \cdot \cos \frac{m\pi(x - x_1)}{x_2 - x_1} \cdot \cos \frac{n\pi(y - y_1)}{y_2 - y_1}, \quad (24)$$

де, відповідно, коефіцієнти $T_{2_{m,n}}(t), (m \geq 0, n \geq 0)$, знаходяться з таких виразів:

$$T_{2_{m,n}}(t) = \int_0^t e^{-a \cdot \left(\left(\frac{m\pi}{x_2 - x_1} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{y_2 - y_1} \right)^2 \right) \cdot (t - \tau)} \cdot f_{m,n}(\tau) d\tau, (m, n \geq 0). \quad (25)$$

Коефіцієнти $f_{m,n}(t), (m \geq 0, n \geq 0)$, у свою чергу, знаходяться з таких виразів:

$$f_{0,0}(t) = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(\xi, \eta, t) d\xi d\eta, \quad (26)$$

$$f_{m,0}(t) = \frac{2}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(\xi, \eta, t) \cdot \cos \frac{m\pi(\xi - x_1)}{x_2 - x_1} d\xi d\eta, \quad (m \geq 1), ,(27)$$

$$f_{0,n}(t) = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{2}{y_2 - y_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(\xi, \eta, t) \cdot \cos \frac{n\pi(\eta - y_1)}{y_2 - y_1} d\xi d\eta, \quad (n \geq 1), ,(28)$$

$$f_{m,n}(t) = \frac{2}{x_2 - x_1} \cdot \frac{2}{y_2 - y_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(\xi, \eta, t) \cdot$$

$$\cdot \cos \frac{m\pi(\xi - x_1)}{x_2 - x_1} \cdot \cos \frac{n\pi(\eta - y_1)}{y_2 - y_1} d\xi d\eta, (m, n \geq 1) \quad (29)$$

де функція $f(x, y, t)$ в підінтегральних виразах (26)–(29) записується на основі виразу (10).

Остаточно, розв'язок вихідної нестаціонарної задачі теплопровідності (1)–(3) на основі (4) та (12) буде записано через суму функцій:

$$u(x, y, t) = U(x, y, t) + v_1(x, y, t) + v_2(x, y, t), \quad (30)$$

де функція $U(x,y,t)$ представлена виразом (6); функція $v_1(x,y,t)$ — виразом (19), де коефіцієнти $A_{m,n}$, $(m \geq 0, n \geq 0)$, у свою чергу, знаходяться з виразів (20)–(23); функція $v_2(x,y,t)$ — представлена виразом (24), де шукані коефіцієнти $T_{2_{m,n}}(t), (m \geq 0, n \geq 0)$ та $f_{m,n}(t), (m \geq 0, n \geq 0)$ знаходяться, відповідно, з виразів (25) і (26)—(29).

Отже, за допомогою введення функції $U(x,y,t)$, що записана виразом (6) та розкладанні функції $v(x,y,t)$ (12) на суму двох функцій $v_1(x,y,t)$ та $v_2(x,y,t)$, що, відповідно, задовольняють диференціальні рівняння теплопровідності в частинних похідних (13) та (16) з відповідними однорідними розривними на одній із бічних сторін та неперервними на всіх інших сторонах граничними (14) та (17) і початковими (15) та (18) умовами, стало можливим застосувати метод розділення змінних Фур'є в кожному з випадків для розв'язання поставленої нестаціонарної задачі теплопровідності в двовимірному випадку для прямокутної області (1) з неоднорідними розривними на одній із бічних сторін і неперервними на всіх інших сторонах області граничними умовами другого роду (2, а)—(2, б) та неоднорідною початковою умовою (3), остаточний розв'язок якої записано через вираз (30).

Висновок

На основі створеної тривимірної комірчастої моделі кристал цукру меншої комірки–розчин сахарози меншої комірки–парова бульбашка–розчин сахарози більшої комірки–кристал цукру більшої комірки зроблено перехід до двовимірної моделі та виділено одну область з розривними неоднорідними граничними умовами, що відповідає розчину сахарози більшої комірки. Для цієї області знайдено аналітичний розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності з неоднорідними розривними на одній із бічних сторін (лівій) і неперервними на всіх інших сторонах області граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою.

Література

1. *Погорелый Т. М. Мирончук В. Г.* Математическое моделирование процесса рекристаллизации на основании аналитических решений нестационарных задач теплопроводности в двухмерном случае для прямоугольных областей с неоднородными (непрерывными и разрывными на одной из сторон) граничными условиями и неоднородными начальными условиями // Тезисы докладов и сообщений XIV Минского международного форума по тепло- и массообмену, 10—13 сентября 2012 г. — Том 1, Часть 2. — Минск.: Інститут тепло- и массобмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, 2012. — С. 761—764.

2. *Погорілий Т. М.* Математичне моделювання процесу теплообміну між комірками сахарози на основі аналітичного розв'язку нестаціонарної задачі теплопровідності в двохвимірному випадку для прямокутної області з неоднорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою. // Наукові праці НУХТ. — К.: 2014. — Т. 20, №2. — С. 136—145.

3. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967. — 599 с.

4. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. — М.: Высшая школа, 1970. — 712 с.

5. *Корн Г., Корн Т.,* Справочник по математике (для научных сотрудников и инженеров). — М.: Наука, 1974. — 832 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛООБМЕНА

Т.М. Погорелый
Национальный университет пищевых технологий

В статье представлено продолжение создания математической модели процесса теплообмена между ячейками сахарозы и паровым пузырьком. Геометрическая модель, которая была создана на основании ячеистой модели и рассматривалась для системы: кристалл сахара меньшей ячейки–раствор сахарозы меньшей ячейки–паровой пузырек–раствор сахарозы большей ячейки–кристалл сахара большей ячейки в трехмерном случае, используется и в дальнейшем. Но в данном случае при переходе от объемной модели к двухмерной выделена именно ту прямоугольную область, которая соответствует большей ячейке раствора сахарозы. Именно для нее и рассматривается аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности в двухмерном случае с неоднородными разрывными на одной из сторон (левой) и непрерывными на всех остальных сторонах области граничними условиями и неоднородным начальным условием.

Ключевые слова: *ячеистая модель, теплообмен, нестационарное уравнение, разрывные граничные условия, аналитическое решение.*