УДК 517.9.519.46

GROUP SYMMETRY EXTENSION OF HYDRODYNAMIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. Bogatyrchuk, I. Juryk
National University of Food Technologies

Key words:
Hydrodynamic equation
Infinitesimal operator
Group classification

Article history:
Received 11.07.2014
Received in revised form 22.07.2014
Accepted 01.08.2014

Corresponding author:
A. Bogatyrchuk
Email:
an1952@ukr.net

ABSTRACT

Group classification of hydrodynamic differential equations used for the description of inviscid compressible fluid motion, as well as the equations of medium state, has been performed. The symmetrical properties of a set of equations describing a liquid motion have been studied. It was stated that the main thermodynamic parameters of a medium (pressure p, density ρ and temperature T) are connected by a relation p=F (ρ, T), where F (ρ, T) is a smooth function. It was also stated that the process is either isothermal or homogeneously thermal. The infinitesimal method of C.Li was used for symmetry research. The task of determining the maximum local group of dot conversions is reduced to determining the coordinates of infinitesimal operators which generate its one-parameter groups.

РОЗШИРЕННЯ ГРУПОВОЇ СИМЕТРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ГІДРОДИНАМІКИ

А.С. Богатирчук, І.І. Юрик
Національний університет харчових технологій

У статті проведено групову класифікацію диференціальних рівнянь гідродинаміки, які описують рух нев'язкої стисливої рідини, разом з рівнянням стану середовища. Досліджено симетрійні властивості системи рівнянь, які описують рух рідини. Припускалось, що основні термодинамічні параметри середовища (тиск p, густина ρ і температура T) зв'язані співвідношенням p=Φ(ρ,T), де Φ(ρ,T) — гладка функція, а також те, що процес або ізотермічний, або гомотермічний. Для дослідження симетрії використовувався інфінітезимальний метод С. Лі. Задача знаходження максимальної локальної групи точкових перетворень зводиться до знаходження координат інфінітезимальних операторів, які породжують її однопараметричні групи.

Ключові слова: *рівняння гідродинаміки, інфінітезимальний оператор, групова класифікація.*

Принцип симетрії відіграє значну роль у сучасних дослідженнях математичної фізики. Основні рівняння математичної і теоретичної фізики мають широку симетрію і саме ця властивість виділяє їх з усієї множини диференціальних рівнянь. Встановлення симетрійних властивостей рівнянь математичної фізики дозволяє дати загальну класифікацію їх розв'язків, що має широке застосування в різних розділах математики, механіки та фізики. Вивчення груп перетворень, відносно яких інваріантна фізична система, надає можливість отримати важливу інформацію без розв'язування рівнянь. Закони збереження, розмноження розв'язків, абзаци, розділення змінних — всі ці поняття і методи базуються на симетрійних властивостях диференціальних рівнянь. Більше того, всі відомі розв'язки, а також багатопараметричні сімейства нових частинних розв'язків можна отримати у межах групового підходу.

У статті досліджуються симетрійні властивості системи рівнянь, які описують рух рідини:

$$\begin{aligned} &\mathrm{D_t}u^k(t,x)+\rho^{-1}\nabla_k p(t,x)=0 \\ &\mathrm{D_t}\rho(t,x)+\rho\nabla_k u^k(t,x)=0, \end{aligned} \tag{1}$$

де $t\in R'$, $x\in R^n$, $k=1,2...,n$; $u^k(t,x)-k$ компонентна швидкість; p — тиск; ρ — густина; $\nabla_k=\dfrac{\partial}{\partial x^k}$; $D_t=\dfrac{\partial}{\partial t}+u^k\nabla_k$.

Припускаємо, що основні термодинамічні параметри середовища (тиск p, густина p і температура T) пов'язані співвідношенням $p=\Phi(\rho,T)$, де $\Phi(\rho,T)$ — гладка функція. Припускаємо також, що процес, який описується системою (1), або ізотермічний ($T=const$), або гомотермічний ($\nabla_k T=0$). Таким чином, T не залежить від просторових координат і рівняння стану можна записати у вигляді $p=F(\rho,t)$ з функцією F.

Введемо такі позначення:

$$u_\mu^k=\frac{\partial u^k}{\partial x^\mu},\ \ \rho_\mu=\frac{\partial\rho}{\partial x^\mu},\ \ p_k=\frac{\partial p}{\partial x^k},\ \ x^0=t\,.$$

Тоді, використовуючи рівняння стану, система (1) набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} &u_o^k+u^j u_j^k+\rho^{-1}F_\rho\rho_k=0, \\ &\rho_0+u^j\rho_j+\rho u_j^j=0, \end{aligned} \tag{2}$$

де $F_\rho=\dfrac{\partial F}{\partial\rho}$.

Для дослідження симетрії системи (2) використаємо інфінітезимальний метод С.Лі. Задача знаходження максимальної локальної групи точкових перетворень, які допускає система (2), зводиться до знаходження координат інфінітезимальних операторів, що породжують її однопараметричні підгрупи. У випадку системи (2) інфінітезимальний оператор симетрії знаходимо у такому вигляді:

$$X=\xi^\mu(x,u,p)\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\eta^k(x,u,p)\frac{\partial}{\partial u^k}+\lambda(x,u,\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\,. \tag{3}$$

Діючи цим оператором на рівняння (2), отримаємо систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Виключивши з цієї системи змінні u_0^k, ρ_0, отримаємо систему рівнянь, в якій величини x^α, u_j^k, ρ_j можна вважати незалежними змінними. В результаті маємо таку систему:

$$\begin{aligned}
&\eta^k_{u^e} + \xi^l_k = 0, \quad \eta^k_{u^e} + \xi^k_l = 0, \quad k \neq l;\\
&\eta^j + u^j \xi^0_0 - \xi^j_0 - \sum_{i=0}^{n} \xi^j_i u_i = 0,\\
&\lambda_\rho + \rho^{-1}\lambda + \xi^k_k - \xi^0_0 - \eta^k_{u^k} = 0,\\
&\lambda_0 + \sum_{l=1}^{n}\left(u^e \lambda_e + \rho u^l_l\right) = 0;
\end{aligned} \tag{4}$$

$$2F_\rho\left(\xi^0_0 - \xi^k_k\right) + F_{\rho\rho}\lambda + F_{0\rho}\xi^0 = 0, \tag{5}$$

де $\xi^0 = \xi^0\left(x^0\right), \xi^k = \xi^k(x), \eta^k = \eta^k(x,u), \lambda = \lambda(x,u,\rho)$.

Знаходимо розв'язки системи (4):

$$\begin{aligned}
&\xi_0 = \chi x_0^2 + \gamma x_0 + \alpha, \quad \lambda = \left[c - \frac{n}{2}\dot{\xi}^0(x_0)\right]\rho,\\
&\xi^k = \left[\frac{1}{2}\dot{\xi}^0\left(x^0\right) + \delta\right]x^k + \mu^k x^0 + \sum_{l=1}^{n} a^k_e x^l + \nu^k,\\
&\eta^k = \chi x^k + \mu^k + \sum_{l=1}^{n} Q^k_l u^l + \left[\delta - \frac{1}{2}\dot{\xi}^0 x^0\right]u^k,
\end{aligned} \tag{6}$$

де $\dot{\xi}^0\left(x^0\right) = d\xi^0\left(x^0\right)/dx^0, \quad a^k_e = -a^l_k, c, \chi, \alpha, \delta, \gamma, \mu^k, \nu^k$ — зовнішні параметри.

Підставивши ці розв'язки в рівняння (5), одержимо:

$$\left[\frac{n}{2}\dot{\xi}\left(x^0\right) - c\right]\varphi_\rho - \xi^0\varphi_0 = \left[\dot{\xi}^0(x_0) - 2\delta\right]\varphi, \tag{7}$$

де $\varphi(\rho,t) = F_\rho(\rho,t)$.

Параметри a^k_e, μ^k, ν^k $(\alpha \text{ при } \varphi_0 = 0)$ не входять у систему, (7), тому при довільній функції $F(\rho,t)$ системи (4), (5) мають розв'язок :

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = 0, \quad \xi^k = \sum_{j=1}^{n} a^k_j x^j + \mu^k x_0 + \nu^k\\
&\eta^k = \sum_{j=0}^{n} a^k_j u^j + \mu^k, \quad a^k_j = -a^j_k,
\end{aligned} \tag{8}$$

а при $F_\rho = \varphi(\rho)$ — розв'язок з $\xi^0 = \alpha = const$. Функції ξ^0, ξ^k, η^k відповідають диференціальним операторам:

$$P_k = \frac{\partial}{\partial x^k}, G_k = x_0 \frac{\partial}{\partial x^n} + \frac{\partial}{\partial u^k}$$
$$I_{kr} = x_k \frac{\partial}{x^r} - x_r \frac{\partial}{\partial x^k} + u^k \frac{\partial}{\partial u^r} - u^r \frac{\partial}{\partial u^k}, \quad (9)$$

які за загальною теорією $[1]$ утворюють алгебру Лі. Крім того, оператори (9) разом з $P_0 = \frac{\partial}{\partial x^0}$ утворюють алгебру Лі групи Галілея.

Теорема. При довільній функції $F_\rho = \varphi(\rho, t)$ система рівнянь (2) допускає $\frac{n(n+3)}{2}$ параметричну групу перетворень, алгебра Лі якої породжується операторами (9), а у випадку $F_\rho = \varphi(\rho)$ дана система допускає групу Галілея *G(n)*.

Виявляється, що для деяких функцій F симетрія системи (2) набагато ширша. Нами знайдено всі випадки такого розширення. Відповідні функції $F_\rho = \varphi$, а також множина інфінітезимальних операторів симетрії, які допускає система (2), перераховані в таблиці.

Таблиця. **Функції $F_\rho = \varphi$ і множина інфінітезимальних операторів симетрії, які допускає система (2)**

$\varphi = F_\rho$	x
$\varphi_1 = M\rho^{2/n}$	$x_1 = \alpha P_0 + \gamma L_1 + \delta L_2 + n\left(\delta - \frac{\gamma}{2}\right)L_3 + \chi L_0,$ $L_0 = x_0^2 \frac{\partial}{\partial x^0} + x_0 x_k \frac{\partial}{\partial x^k} + \left(x^k - x^0 u^k\right)\frac{\partial}{\partial u^k} + (-1)^n x_0 \rho \frac{\partial}{\partial \rho},$ $L_1 = x_0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{1}{2} x_k \frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{1}{2} u^k \frac{\partial}{\partial u^k},$ $L_2 = x_k \frac{\partial}{x^k} + u^k \frac{\partial}{\partial u^k}, \quad L_3 = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad P_0 = \frac{\partial}{\partial x^0}$
$\varphi_2 = M\rho^\chi$	$x_2 = \alpha P_0 + \gamma L_1 + \delta L_2 + \frac{2}{\chi}\left(\delta - \frac{\gamma}{2}\right)L_3 \quad \chi \neq 0$
$\varphi_3 = Mx_0^\sigma \rho^\chi$	$x_3 = \gamma L_1 + \delta L_2 + \left[\frac{2}{\chi}\left(\delta - \frac{\gamma}{2}\right) - \frac{\sigma}{\chi}\lambda\right]L_3, \quad \chi \neq 0$
$\varphi_4 = \rho^{2/n} G(j),$ $j = \rho^{2/n} x_0^\sigma$	$x_4 = \gamma L_1 + \frac{k}{n}\gamma L_2 + n\gamma\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right)L_3, \ \sigma = 1 - \frac{2k}{n}.$
$\varphi_5 = Mx_0^\sigma$	$x_5 = \gamma L_1 + \frac{\sigma+1}{2}\gamma L_2 + \left(\mu - \frac{n}{2}\lambda\right)L_3$
$\varphi_6 = x_0^{-1} G(\rho)$	$x_6 = \lambda L_1$
$\varphi = F_\rho$	x

Продовження табл

$\varphi_7 = \Phi\left(\rho^{2/n} x_0^{\sigma}\right)$	$x_7 = \gamma L_1 + \frac{\gamma}{2} L_2 + n\frac{\sigma}{2}\gamma L_3, \quad \sigma = 1 - \frac{2k}{n}$
$\varphi_8 = e^{\sigma x_0}\Phi(\rho)$	$x_8 = \alpha P_0 + \frac{\sigma}{2}\alpha L_2$
$\varphi_9 = \Phi\left(\rho^{2/n} e^{-\sigma x_0}\right)$	$x_9 = \alpha P_0 + \frac{n\sigma}{2}\alpha L_3$
$\varphi_{10} = \Phi(\rho) x_0^{\sigma}$	$x_{10} = \gamma\left(L_1 + \frac{\sigma+1}{2} L_2\right)$
$\varphi_{11} = \Phi(\rho)$	$x_{11} = \alpha P_0 + \gamma\left(L_1 + \frac{1}{2} L_2\right)$
$\varphi_{12} = \rho^k \Phi(x_0)$	$x_{12} = \delta\left(L_3 + \frac{k}{2} L_2\right)$

Для всіх рівнянь стану, які допускають розширення симетрії, крім випадку, $\varphi = \varphi_1 = MP^{2/n}$ довільна однопараметрична група інваріантності рівняння (1) породжується оператором вигляду:

$$X = \left(\alpha + \lambda x_0\right)\frac{\partial}{\partial x^0} + \left(Ax^k\right)\frac{\partial}{\partial x^k} + Bu^k\frac{\partial}{\partial u^k} + L\rho\frac{\partial}{\partial \rho},$$

який при $\alpha = 0$ називається генератором масштабних перетворень. Розв’язки, які інваріантні відносно цього оператора, називаються автомодельними $[1,2]$.

Теорема. Розширення симетрії системи (2) можливі тільки у випадках, які наведені в таблиці. Максимальною групою інваріантності є $\frac{n(+3)}{2} + 4$ — параметрична проективна група, яка допускається системою (2) тоді і тільки тоді, коли $F_\rho = c\rho^{2/n}$.

Слід відмітити, що одномірний випадок є особливим, оскільки перші два рівняння в системі (4) з’являються тільки при $n > 1$ і, як було доведено в $[3]$, для рівняння стану $p = \frac{M}{3}\rho^3$ система (2) при $n = 1$ допускає нескінченну групу симетрії. Це надало можливість отримати загальний розв’язок.

Висновок

Знайдено всі розширення алгебри симетрії системи рівнянь, які описують рух рідини. Проведена повна групова класифікація рівняння стану, яке забезпечує зв’язок між термодинамічними параметрами середовища. Це, у свою чергу, надасть можливість отримати нові точні розв’язки системи рівнянь (1), що і буде предметом наших подальших досліджень.

Література

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ диференциональных уравнений. — М.: Наука, 1987. — 400с.

2. *Новиков В.Д., Юрик И.И., Владимиров В.А.* Автомодельные решения задачи о точечном взрыве в воде. — К., 1984. — 23с.— (Препринт АН УССР. Ин-т кибернетики).

3. *Фущич В.И., Серов М.М.* О максимальной группе инвариантности и общее решение одномерных уровнений газовой динамики. — Доклады АН СССР. — 1983. — 268, №5. — С.1162—1164.

РАСШИРЕНИЕ ГРУППОВОЙ СИММЕТРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

А.С. Богатырчук, И.И. Юрик
Национальный университет пищевых технологий

В статье проведена групповая классификация дифференциальных уравнений гидродинамики, описывающих движение невязкой сжимаемой жидкости, совместно с уравнениям состояние среды. Исследованы симметрийные свойства системы уравнений, которые описывают движение жидкости. Предпологалось, что основные термодинамические параметры среды (давление p, плотность ρ и температура T) связаны соотношением $p=\Phi(\rho,T)$, где $\Phi(\rho,T)$ — гладкая функция, а также то, что процесс или изотермический, или гомотермический. Для исследования симметрии использовался инфинитезимальный метод С. Ли. Задача нахождения максимальной локальной группы точечных преобразований сводится к нахождению координат инфинитезимальных операторов, которые порождают ее однопараметрические группы.

Ключевые слова: *уравнение гидродинамики, инфинитезимальный оператор, групповая классификация.*