

УДК 664.1.054

VOLUME GEOMETRIC MODEL OF INTERCRYSTALLINE SUCROSE SOLUTIONS IN THE CELL SYSTEMS: SUGAR CRYSTALS–INTERCRYSTALLINE SUCROSE SOLUTIONS–STEAM BUBBLE

T. Pogoriliy

National University of Food Technologies

Key words:

*Cellular model
Intercrystalline sucrose solution
Surfaces area
Solution volume
Layer thickness*

Article history:

Received 26.12.2014
Received in revised form
12.01.2015
Accepted 17.02.2015

Corresponding author:

T. Pogoriliy
Email:
taras22@mail.ru

ABSTRACT

Further steps of creating the geometric model having simultaneous contact for the following system: sugar crystal of smaller cell–intercrystalline sucrose solution of smaller cell–steam bubble–intercrystalline sucrose solution of bigger cell–sugar crystal of bigger cell, are presented in this paper. The given model is developed in three-dimensional case in the coordinate. Creation of such a geometric model is needed for developing mathematical model of unsteady heat transfer process and diffusion mass transfer between cells of sucrose and a steam bubble in three dimensions (coordinate) case. Based on previously created volume model of sugar crystals of aforementioned cell system, the volume geometric model of intercrystalline sucrose solution distribution surrounding the larger and smaller crystals of sugar in the respective cell system has been designed and constructed. The assertion of the the distribution of values of intercrystalline sucrose solution in each cell proportional to the surface area of sugar crystal in this cell has been used durin the calculations. The amount of intercrystalline solution in each cell is taken as a constant value over the entire surface of crystal for each cell.

ОБ'ЄМНА ГЕОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ МІЖКРИСТАЛЬНОГО РОЗЧИНУ САХАРОЗИ В СИСТЕМІ КОМІРОК: КРИСТАЛИ ЦУКРУ–МІЖКРИСТАЛЬНІ РОЗЧИНІ САХАРОЗИ–ПАРОВА БУЛЬБАШКА

Т.М. Погорілий

Національний університет харчових технологій

У статті продовжено створення геометричної моделі одночасного контакту такої системи комірок: кристал цукру меншої комірки–міжкристальний розчин сахарози меншої комірки–парова бульбашка–міжкристальний розчин сахарози більшої комірки–кристал цукру більшої комірки. Модель розроблено в

об'ємному (тривимірному) випадку по координаті. Побудова такої геометричної моделі необхідна для створення математичної моделі нестационарного процесу теплообміну та дифузійного масообміну між комірками сахарози та паровою бульбашкою в тривимірному (по координаті) випадку. На основі створеної раніше об'ємної моделі кристалів цукру вищезгаданої системи комірок розроблено та побудовано об'ємну геометричну модель розподілу міжкристального розчину сахарози, що оточує більший і менший кристали цукру у відповідних комірках системи. При проведенні розрахунків було прийнято положення про розподіл кількості величини міжкристального розчину сахарози в кожній окремій комірці системи пропорційно до площі поверхні кристалу цукру в цих самих комірках. Значення величини товщини міжкристального розчину в кожній окремій комірці приймається сталою величиною по всій поверхні кристалу для кожної комірки, що розглядається окремо.

Ключові слова: комірчаста модель, міжкристальний розчин сахарози, площа поверхні, об'єм розчину, товщина прошарку.

Постановка проблеми. Шляхом створення найбільш адекватної математичної моделі того чи іншого процесу в галузі харчової або хімічної промисловості досягається вирішення однієї з основних проблем сьогодення, і, як результат, покращення проходження даного процесу та зниження енерговитрат на його проведення. Щодо цукрової промисловості, то найбільш складним, енергетично ємним і таким, що найважче піддається описанню, є процес масової кристалізації цукру з розчину сахарози при уварюванні утфелів у промислових умовах.

З метою створення математичної моделі процесу кристалізації сахарози, яка б найбільш повно описувала цей процес, необхідно спочатку створити геометричну модель розглядуваної системи в тривимірному (об'ємному) випадку по координаті. Як відомо, цукровий утфель — це досить складна багатофазна дисперсна систему. За певних прийнятих спрощень, утфель розглядається з точки зору саме комірчастої моделі. Ця ідеалізована модель представлена такою системою: кристал цукру меншої комірки–міжкристальний розчин сахарози меншої комірки–парова бульбашка–міжкристальний розчин сахарози більшої комірки–кристал цукру більшої комірки. Для продовження створення об'ємної геометричної моделі такої системи комірок [1] необхідно створити об'ємну модель міжкристального розчину сахарози, що оточує відповідні кристали цукру більшої та меншої комірок. Тобто це можливо зробити лише на основі створеної об'ємної моделі комірок більшого та меншого кристалів цукру, що вже для вищезгаданої системи комірок було зроблено в [1].

Варто зауважити, що основи такого підходу при створенні математичної моделі процесу кристалізації цукру можуть бути також використані в будь-якій іншій суміжній галузі в тих випадках, коли в розглядуваній дисперсній системі наявні дві або три складові фази. В даному випадку це може бути або система кристал–розчин, або система кристал–розчин–парова бульбашка.

У зв'язку зі значними труднощами, які виникають при описанні процесу тепло- та масообміну при проходженні масової кристалізації сахарози в реальних промислових умовах, вимушені було використано ряд припущень для створення ідеалізованої геометричної моделі складових системи комірок.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Що стосується створення математичних моделей процесу масової кристалізації сахарози, останні дослідження [2, 3, 4] безпосередньо вказують на те, що через складність перебігу процесу, особливо в промислових умовах, на сьогоднішні не існує єдиного підходу та не вироблено єдиної загальноприйнятої теорії, яка б могла дати в повній мірі відповіді на всі поставлені запитання щодо процесу кристалізації. Також залишається відкритим питанням повного описання наявного в процесі масової кристалізації сахарози процесу рекристалізації, який, за попередніми даними, займає вагоме місце в процесі масової кристалізації сахарози. Таким чином, необхідно створити таку математичну модель, яка б змогла найбільш повно описати цей процес. Також залишається відкритим питання визначення ваги впливу процесу рекристалізації на весь процес масової кристалізації сахарози при проходженні останнього в промислових умовах.

Мета статті. Розглянути питання подальшого створення геометричної об'ємної моделі вищезгаданої системи комірок, а саме: модель міжкристального розчину сахарози, що оточує відповідні кристали цукру в більшій і меншій комірках системи. Ця геометрична модель буде базуватись на вже створеній [1] геометричній моделі кристалів цукру в тривимірному випадку у формі паралелепіпеда та у формі кулі (сфери).

Матеріали і результати дослідження. Передусім введемо позначення для індексів міжкристальних розчинів, що оточують кристали цукру різної величини згаданої вище системи аналогічно до вже введених позначень індексів самих цих кристалів (про що вже згадувалось у [1]), що повністю відповідатиме індексам комірок системи, які розглядаються. Таким чином, індекс «1» стосується «більшої» за розміром комірки, а отже, і більшого кристалу цукру та міжкристального розчину сахарози, що його оточує. У свою чергу, індекс «2» стосується «меншої» за розміром комірки, і цей же індекс стосується також меншого кристалу та міжкристального розчину, що його оточує.

За основу створення геометричної моделі міжкристального розчину сахарози, що оточує більший і менший кристали цукру, візьмемо той факт, що в комірчастій моделі дисперсної системи, якою є цукровий утфель, міжкристальний розчин сахарози розподіляється пропорційно площі поверхні кристалу [4, 8].

Оскільки, як відомо [4], процес кристалізації складається з трьох стадій: досягнення переохолодження або пересичення, утворення центрів кристалізації, ріст кристалів, то розглядатимемо процес кристалізації саме з того моменту часу, коли вже досягнуто критичну (мінімальну) концентрацію кристалів, якої достатньо для створення структурної сітки та перетворення суспензії сахарози в структуровану рідину [8]. За даними [8] відомо, що ця величина складає 7—16 % і є одного порядку з критичною концентрацією кристалів суспензії, необхідної для створення ізогідричних умов.

Позначимо величину об'єму міжкристального розчину сахарози, що оточує один центр кристалізації в такий момент часу через $V_{\text{розч } 0}$. Таким чином, за відомої величини початкового набору сиропу $V_{\text{поч}}$, з урахуванням кількості n_0 центрів кристалізації в 1 м^3 утфелю [4] можна знайти величину об'єму міжкристального розчину, що припадає на один центр кристалізації з такого виразу:

$$V_{\text{розч } 0} = \frac{1}{n_0}. \quad (1)$$

Зауважимо, що існує також і інший підхід для визначення величини $V_{\text{розч } 0}$ шляхом визначення товщини міжкристального розчину, що припадає на один центр кристалізації. Для цього може бути використана одна з методик, запропонованих співробітниками УкрНДЦП. За даними [2], для отримання кристалів цукру визначеного кінцевого розміру у вакуум-апараті необхідно утворювати строго визначену кількість центрів кристалізації, і при цьому відстань між ними в момент утворення не повинна перевищувати 0,4 мм.

Оскільки в нашій системі комірок розглядається менший і більший кристали цукру одночасно, тобто два кристали, то для визначення кількості розподіленого міжкристального розчину для кожного з них візьмемо величину, що дорівнює подвійному об'єму $V_{\text{розч } 0}$.

Приймаємо той факт, що міжкристальний розчин, як уже згадувалось раніше, розподіляється пропорційно площі поверхні кристалу. Якщо в узагальненому випадку, тобто для кристалу і у формі паралелепіпеда, і у формі сфери позначити площу поверхні більшого кристалу цукру через $S_{\text{кр}1}$, а меншого — через $S_{\text{кр}2}$, то можемо записати коефіцієнти пропорційності величини площі відповідно для більшого кристалу цукру:

$$k_{S_{\text{кр}1}} = \frac{S_{\text{кр}1}}{S_{\text{кр}1} + S_{\text{кр}2}}, \quad (2)$$

та для меншого кристалу цукру:

$$k_{S_{\text{кр}2}} = \frac{S_{\text{кр}2}}{S_{\text{кр}1} + S_{\text{кр}2}}. \quad (3)$$

Отже, на більшу комірку, що включає в себе більший кристал цукру, припаде така кількість міжкристального розчину сахарози:

$$V_{\text{розч } 1} = \frac{S_{\text{кр}1}}{S_{\text{кр}1} + S_{\text{кр}2}} \cdot 2 \cdot V_0, \quad (4)$$

а на меншу комірку, що включає в себе менший кристал цукру, припаде така кількість міжкристального розчину сахарози:

$$V_{\text{розч } 2} = \frac{S_{\text{кр}2}}{S_{\text{кр}1} + S_{\text{кр}2}} \cdot 2 \cdot V_0. \quad (5)$$

Якщо кристали цукру розглядаються у формі паралелепіпеда, то вирази (2)—(5) можливо розрахувати на основі вже отриманих виразів (3)—(4) [1] для обрахунку величин площі поверхні кристалів $S_{\text{кр}1}$, та $S_{\text{кр}2}$. За умови,

що кристали розглядаються у формі кулі (сфери), вирази (2)—(5) можна розрахувати на основі отриманої формули (9) [1].

Вважатимемо, що товщина плівки міжкристального розчину сахарози для кожного окремого кристалу є величиною сталою для всієї площі поверхні даного кристалу. Зрозуміло, що ця величина для кристалів різних форм і різних розмірів буде мати різні значення.

Позначимо товщину міжкристального розчину через величину $\delta_{\text{розч}}$. Тоді для випадку системи комірок, про яку згадувалось вище, для більшої комірки товщину міжкристального розчину позначимо через величину $\delta_{\text{розч}1}$, а для меншої комірки — через $\delta_{\text{розч}2}$. Для випадку форми кристалів цукру у вигляді паралелепіпеда до введених позначень додамо індекс «парал», для випадку форми кристалів цукру у вигляді сфери — «сфера».

Розглянемо спочатку випадок, коли кристали цукру мають форму паралелепіпеда (рис. 1). Вважатимемо, що міжкристальний розчин сахарози, що оточує кожен з розглядуваних кристалів, також має форму паралелепіпеда,

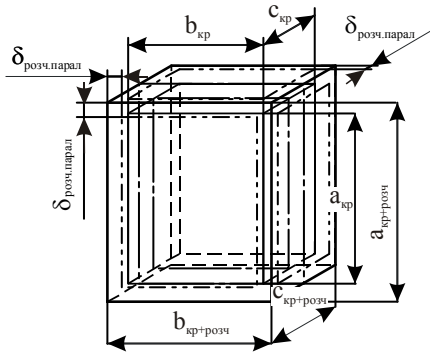


Рис. 1. Тривимірна модель міжкристального розчину, що оточує кристал цукру у формі паралелепіпеда

який всередині містить кристал цукру. Зауважимо, що на рис. 1 зображено узагальнений випадок розташування міжкристального розчину сахарози стосовно розташування кристалу цукру, тобто випадок для «більшої» та «меншої» комірки одночасно.

Знайдемо вирази для визначення величин товщини міжкристального розчину для більшої та меншої комірок. Використовуючи формули [9],

можемо записати вираз для визначення величини об'єму більшої комірки, що включає в себе одночасно більший кристал цукру у формі паралелепіпеда та міжкристальний розчин сахарози, що його оточує (рис. 1):

$$V_{\text{кр+розч},1,\text{парал}} = (a_{\text{кр}1} + 2 \cdot \delta_{\text{розч}1,\text{парал}}) \cdot (b_{\text{кр}1} + 2 \cdot \delta_{\text{розч}1,\text{парал}}) \cdot (c_{\text{кр}1} + 2 \cdot \delta_{\text{розч}1,\text{парал}}) \cdot (6)$$

Аналогічно, величина об'єму меншої комірки для меншого кристалу цукру та міжкристального розчину сахарози, що його оточує (рис. 1), визначається з виразу:

$$V_{\text{кр+розч},2,\text{парал}} = (a_{\text{кр}2} + 2 \cdot \delta_{\text{розч}2,\text{парал}}) \cdot (b_{\text{кр}2} + 2 \cdot \delta_{\text{розч}2,\text{парал}}) \cdot (c_{\text{кр}2} + 2 \cdot \delta_{\text{розч}2,\text{парал}}) \cdot (7)$$

Однак в той же час зрозуміло, що справджуються також і рівності для більшої комірки:

$$V_{\text{кр+розч},1,\text{парал}} = V_{\text{кр}1,\text{парал}} + V_{\text{розч}1} \cdot (8)$$

а також для меншої комірки:

$$V_{\text{кр}+\text{розч}, 2, \text{парал}} = V_{\text{кр} 2, \text{парал}} + V_{\text{розч} 2} \quad (9)$$

Нагадаємо, що у виразах (8)—(9) значення об'ємів кристалів цукру $V_{\text{кр}1, \text{парал}}$ та $V_{\text{кр}2, \text{парал}}$ визначаються з виразів (5)—(6) [1]; вирази для площі поверхонь $S_{\text{кр}1, \text{парал}}$ та $S_{\text{кр}2, \text{парал}}$ визначаються з виразів (3)—(4) [1]; значення об'ємів міжкристалних розчинів $V_{\text{розч}1}$ та $V_{\text{розч}2}$ — визначаються з виразів (4)—(5) пропонуваного дослідження.

Використаємо всі ці значення в останніх двох виразах (8)—(9). При цьому, розкриємо у виразах (6)—(7) дужки та приведемо спільні члени при невідомих шуканих значеннях $\delta_{\text{розч}1, \text{парал}}$ та $\delta_{\text{розч}2, \text{парал}}$. У результаті отримаємо окремо кубічне рівняння (алгебраїчне рівняння третього ступеня) відносно невідомого значення товщини $\delta_{\text{розч}1, \text{парал}}$ міжкристалного розчину для більшої комірки:

$$8 \cdot \delta_{\text{розч}1, \text{парал}}^3 + 4(a_{\text{кр}1} + b_{\text{кр}1} + c_{\text{кр}1}) \cdot \delta_{\text{розч}1, \text{парал}}^2 + S_{\text{кр}1, \text{парал}} \cdot \delta_{\text{розч}1, \text{парал}} - \frac{S_{\text{кр}1, \text{парал}} \cdot 2V_{\text{розч}0}}{S_{\text{кр}1, \text{парал}} + S_{\text{кр}2, \text{парал}}} = 0 \quad (10)$$

та інше кубічне рівняння відносно невідомого значення $\delta_{\text{розч} 2, \text{парал}}$ для меншої комірки:

$$8 \cdot \delta_{\text{розч} 2, \text{парал}}^3 + 4(a_{\text{кр}2} + b_{\text{кр}2} + c_{\text{кр}2}) \cdot \delta_{\text{розч} 2, \text{парал}}^2 + S_{\text{кр}2, \text{парал}} \cdot \delta_{\text{розч} 2, \text{парал}} - \frac{S_{\text{кр}2, \text{парал}} \cdot 2V_{\text{розч}0}}{S_{\text{кр}1, \text{парал}} + S_{\text{кр}2, \text{парал}}} = 0 \quad (11)$$

Добре відомо [9], що розв'язати кубічні рівняння можна аналітичними методами за відомими формулами (тобто не застосовувати чисельні методи). В результаті отримаємо такі проміжні додаткові вирази для випадку більшої комірки (для подальшого спрощення позначимо всі знайдені нижче вирази у вигляді однієї системи):

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{S_{\text{кр}1}}{8} - \frac{(a_{\text{кр}1} + b_{\text{кр}1} + c_{\text{кр}1})^2}{12}; \\ q_1 = \frac{(a_{\text{кр}1} + b_{\text{кр}1} + c_{\text{кр}1})^3}{108} - \frac{(a_{\text{кр}1} + b_{\text{кр}1} + c_{\text{кр}1}) \cdot S_{\text{кр}1}}{48} - \frac{V_{\text{розч}0} \cdot S_{\text{кр}1}}{4(S_{\text{кр}1} + S_{\text{кр}2})}; \\ D_1 = \left(\frac{p_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{q_1}{2}\right)^2; \\ u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} + \sqrt{D_1}}; \\ v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} - \sqrt{D_1}}, \end{array} \right. \quad (12)$$

та систему додаткових виразів для випадку меншої комірки:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_2 = \frac{S_{кр2}}{8} - \frac{(a_{кр2} + b_{кр2} + c_{кр2})^2}{12}; \\ q_2 = \frac{(a_{кр2} + b_{кр2} + c_{кр2})^3}{108} - \frac{(a_{кр2} + b_{кр2} + c_{кр2}) \cdot S_{кр2}}{48} - \frac{V_{розч0} \cdot S_{кр2}}{4(S_{кр1} + S_{кр2})}; \\ D_2 = \left(\frac{p_2}{3}\right)^3 + \left(\frac{q_2}{2}\right)^2; \\ u_2 = \sqrt[3]{-\frac{q_2}{2} + \sqrt{D_2}}; \\ v_2 = \sqrt[3]{-\frac{q_2}{2} - \sqrt{D_2}}. \end{array} \right. \quad (13)$$

На основі отриманих виразів (12)—(13) остаточно можемо записати шукані значення товщини $\delta_{розч1,парал}$ міжкристального розчину сахарози для більшої комірки:

$$\delta_{розч1,парал} = u_1 + v_1 - \frac{a_{кр1} + b_{кр1} + c_{кр1}}{6}, \quad (14)$$

та значення товщини $\delta_{розч2,парал}$ міжкристального розчину сахарози для меншої комірки:

$$\delta_{розч2,парал} = u_2 + v_2 - \frac{a_{кр2} + b_{кр2} + c_{кр2}}{6}. \quad (15)$$

Зауважимо, що розв'язки кожного кубічного рівняння (10)—(11) включають в себе по три різних корені одночасно. Однак, як показали дослідження автора, при реальних умовах перебігу процесу масової кристалізації сахарози в кожному з рівнянь (10)—(11) є тільки по одному дійсному кореню. Всі інші отримані корені — уявні (комплексно-спряжені), що не відповідають фізичним умовам, накладеним на величини $\delta_{розч1, парал}$ та $\delta_{розч2,парал}$.

Отримавши значення товщини міжкристальних розчинів сахарози ($\delta_{розч1, парал}$ — для більшої комірки та $\delta_{розч2, парал}$ — для меншої), що визначаються з виразів (14)—(15) за допомогою систем (12)—(13), а також розміри самих кристалів цукру ($a_{кр1}$, $b_{кр1}$, $c_{кр1}$ — для більшого кристалу, та $a_{кр2}$, $b_{кр2}$, $c_{кр2}$ — для меншого), що, у свою чергу, визначаються з виразів (1)—(2) [1], знайдемо сторони самих комірок розглядуваної системи, що представлені у формі паралелепіпедів (рис. 1). Отже, остаточно запишемо розміри більшої комірки:

$$\begin{array}{l} a_{кр+розч1} = a_{кр1} + 2 \cdot \delta_{розч1,парал}; \\ b_{кр+розч1} = b_{кр1} + 2 \cdot \delta_{розч1,парал}; \\ c_{кр+розч1} = c_{кр1} + 2 \cdot \delta_{розч1,парал}, \end{array} \quad (16)$$

та розміри меншої комірки:

$$\begin{aligned} a_{\text{кр}+\text{розч}2} &= a_{\text{кр}2} + 2 \cdot \delta_{\text{розч}2,\text{парал}}; \\ b_{\text{кр}+\text{розч}2} &= b_{\text{кр}2} + 2 \cdot \delta_{\text{розч}2,\text{парал}}; \\ c_{\text{кр}+\text{розч}2} &= c_{\text{кр}2} + 2 \cdot \delta_{\text{розч}2,\text{парал}}. \end{aligned} \quad (17)$$

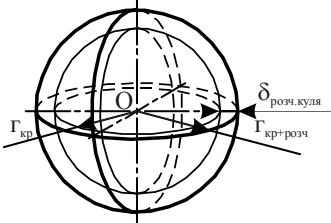


Рис. 2. Тривимірна модель міжкристалного розчину, що оточує кристал цукру у формі кулі (сфери)

Розглянемо випадок, коли кристали цукру мають форму кулі (сфери) (рис. 2) з радіусом $r_{\text{кр}}$. Як і в попередньому випадку, вважатимемо, що міжкристалний розчин сахарози $\delta_{\text{розч},\text{куля}}$, що оточує кожен з кристалів, які розглядаються також має форму кулі, яка в середині містить кристал цукру. Зауважимо, що на рис. 2 також зображено узагальнений випадок розташування міжкристалного розчину сахарози стосовно розташування кристалу цукру, розуміючи, що це стосується і «більшої», і «меншої» комірки в однаковій мірі.

Знайдемо вирази для визначення величин товщини міжкристалного розчину в даному випадку. Використовуючи формули [9], можемо записати такий вираз для визначення величини об'єму більшої комірки, що включає в себе одночасно більший кристал цукру у формі кулі та міжкристалний розчин сахарози, що його оточує (рис. 2):

$$V_{\text{кр}+\text{розч},1,\text{куля}} = \frac{4}{3} \pi \cdot (r_{\text{кр}1} + \delta_{\text{розч}1,\text{куля}})^3, \quad (18)$$

а також вираз для визначення величини об'єму меншої комірки з меншим кристалом цукру у формі кулі та міжкристалним розчином сахарози, що його оточує (рис. 2):

$$V_{\text{кр}+\text{розч},2,\text{куля}} = \frac{4}{3} \pi \cdot (r_{\text{кр}2} + \delta_{\text{розч}2,\text{куля}})^3. \quad (19)$$

З іншого боку, справджуються також рівності для більшої комірки:

$$V_{\text{кр}+\text{розч},1,\text{куля}} = V_{\text{кр}1,\text{куля}} + V_{\text{розч}1}, \quad (20)$$

та для меншої комірки:

$$V_{\text{кр}+\text{розч},2,\text{куля}} = V_{\text{кр}2,\text{куля}} + V_{\text{розч}2}. \quad (21)$$

Нагадаємо, що у виразах (20)—(21) значення об'ємів кристалів $V_{\text{кр}1,\text{куля}}$ та $V_{\text{кр}2,\text{куля}}$ визначаються з узагальненого виразу (9) [1]; вирази для площі поверхонь $S_{\text{кр}1,\text{сфера}}$ та $S_{\text{кр}2,\text{сфера}}$ визначаються з виразів (16)—(17) [1]; значення об'ємів міжкристалних розчинів $V_{\text{розч}1}$ та $V_{\text{розч}2}$ визначаються з виразів (4)—(5) пропонованого дослідження. Використаємо всі ці значення в останніх двох виразах (20)—(21), та, після певних перетворень, отримаємо такий вираз для невідомого значення товщини міжкристалного розчину $\delta_{\text{розч}1,\text{куля}}$ більшої комірки:

$$\delta_{\text{розч}1,\text{куля}} = \sqrt[3]{r_{\text{кр}1}^3 + \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{S_{\text{кр}1,\text{сфера}}}{S_{\text{кр}1,\text{сфера}} + S_{\text{кр}2,\text{сфера}}} \cdot V_{\text{розч}0} - r_{\text{кр}1}}, \quad (22)$$

а також вираз для невідомого значення $\delta_{\text{розч } 2, \text{ куля}}$ меншої комірки:

$$\delta_{\text{розч } 2, \text{ куля}} = \sqrt[3]{r_{\text{кр}2}^3 + \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{S_{\text{кр}2, \text{ сфера}}}{S_{\text{кр}1, \text{ сфера}} + S_{\text{кр}2, \text{ сфера}}} \cdot V_{\text{розч } 0} - r_{\text{кр}2}} \quad (23)$$

Остаточню визначимо розміри самих комірок (більшої та меншої) системи, яка розглядається, що представлені у формі кулі (сфери) (рис. 2). Розмір більшої комірки, на основі виразу (22), визначається з такого виразу:

$$r_{\text{кр}+\text{розч}1} = r_{\text{кр}1} + \delta_{\text{розч}1, \text{ куля}} \quad (24)$$

а розмір меншої комірки, на основі виразу (23) визначається як:

$$r_{\text{кр}+\text{розч}2} = r_{\text{кр}2} + \delta_{\text{розч}2, \text{ куля}} \quad (25)$$

Залишається також встановити, чи відрізняється товщина міжкристального розчину, що оточує більший кристал цукру у формі паралелепіпеда, від товщини міжкристального розчину, що оточує більший кристал цукру у формі кулі, і якщо відрізняється, то на яку величину. Аналогічне питання стосується співвідношень для товщини міжкристального розчину у випадку різних форм кристалів цукру і для меншої комірки.

Для цього прийняли таку величину об'єму міжкристального розчину $V_{\text{розч}0} = 3,35 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3$ з такими характерними лінійними розмірами у випадку: більшого кристалу цукру — $l_{\text{кр}1} = 5,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, меншого кристалу цукру — $l_{\text{кр}2} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$. Зауважимо, що всі розміри та геометричні характеристики кристалів цукру у формі паралелепіпеда та у формі кулі при заданих характерних лінійних розмірах кристалів $l_{\text{кр}}$ розраховуються за отриманими формулами (1)—(2), (7), (9)—(10) та (12)—(13) [1].

Проведені дослідження та розрахунки показали, що при вищезаданих значеннях розмірів кристалів цукру отримуємо співвідношення окремо для більшої та меншої комірки (при різних формах кристалів):

$$\frac{\delta_{\text{розч}1, \text{ парал}}}{\delta_{\text{розч}1, \text{ куля}}} \approx 0,7768; \quad \frac{\delta_{\text{розч}2, \text{ парал}}}{\delta_{\text{розч}2, \text{ куля}}} \approx 0,7811. \quad (26)$$

Таким чином, для більшої комірки відношення товщини міжкристального розчину, що оточує кристал цукру у формі паралелепіпеда, до товщини міжкристального розчину, що оточує кристалу цукру у формі кулі, становить 77,68 %. Тобто товщина міжкристального розчину, що оточує кристал у формі паралелепіпеда, менша від товщини розчину, що оточує кристал у формі кулі, на 22,32 %, що пояснюється тим (як це було показано в [1]), що площа поверхні кристалу у формі паралелепіпеда більша на 30,18 % за площу поверхні кристалу у формі кулі за однакових характерних лінійних розмірів кристалів.

Аналогічно, для меншої комірки відношення товщини міжкристального розчину, що оточує кристал цукру у формі паралелепіпеда, до товщини міжкристального розчину, що оточує кристалу цукру у формі кулі, становить 78,11 %, тобто товщина міжкристального розчину, що оточує кристал у формі паралелепіпеда, менша від товщини розчину, що оточує кристал у формі кулі, на 21,89 %.

Отже, знайдено такі вирази для визначення товщини міжкристального розчину сахарози більшої $\delta_{\text{розч1}}$ та меншої $\delta_{\text{розч2}}$ комірки для випадків форми кристалів цукру: (14)—(15) — у вигляді паралелепіпеда; (23)—(24) — у вигляді кулі (сфери).

Також знайдено безпосередньо самі розміри більшої та меншої комірок (кристал цукру разом з міжкристальним розчином, що його оточує), для випадків форми кристалів цукру: (16)—(17) — у вигляді паралелепіпеда; (24)—(25) — у вигляді кулі (сфери).

Зауважимо, що для остаточного створення геометричної об'ємної моделі системи комірок залишається створити геометричну об'ємну модель парової бульбашки, що буде розглянуто в подальших дослідженнях.

Висновки

На основі створеної об'ємної геометричної моделі кристалів цукру більшої та меншої комірки, кожна з яких представлена у формі паралелепіпеда та у формі кулі (сфери), створено об'ємну геометричну модель міжкристального розчину сахарози, що оточує відповідні кристали цукру, та завершено побудову більшої та меншої комірок системи.

Встановлено величину товщини міжкристального розчину сахарози $\delta_{\text{розч1}}$ для більшої комірки: за формулами (12), (14) — для випадку кристалу цукру у формі паралелепіпеда; за формулами (23) — для випадку кристалу цукру у формі кулі (сфери). Також встановлено величину товщини міжкристального розчину сахарози $\delta_{\text{розч2}}$ для меншої комірки: за формулами (13), (15) — для випадку кристалу цукру у формі паралелепіпеда; за формулами (24) — для випадку кристалу цукру у формі кулі (сфери). На основі отриманих значень розмірів кристалів цукру та величин товщини міжкристального розчину сахарози знайдено розміри самих комірок системи, що розглядається:

- для більшої комірки: за формулами (16) — для випадку кристалу цукру у формі паралелепіпеда; за формулами (24) — для випадку кристалу цукру у формі кулі (сфери);

- для меншої комірки: за формулами (17) — для випадку кристалу цукру у формі паралелепіпеда; за формулами (25) — для випадку кристалу цукру у формі кулі (сфери).

На основі створених тривимірних геометричних моделей кристалів цукру та відповідних тривимірних геометричних моделей міжкристальних розчинів, що оточують ці кристали, для остаточного створення коміркової моделі системи: кристал цукру меншої комірки—міжкристальний розчин сахарози меншої комірки—парова бульбашка—міжкристальний розчин сахарози більшої комірки—кристал цукру більшої комірки можливо та необхідно продовжити дослідження та моделювання тривимірної геометричної моделі парової бульбашки.

Література

1. *Погорілий Т.М.* Об'ємна геометрична модель кристалів цукру в системі комірок: кристали цукру—міжкристальні розчини сахарози—парова бульбашка // Наукові праці Національного університету харчових технологій. — 2014. — Т. 20, № 5. — С. 141—151.

2. *Современные технологии и оборудование свеклосахарного производства: В 2-х ч.* / В.О. Штангеев, В.Т. Кобер, Л.Г. Белостоцкий и др.; Под. ред. В.О. Штангеева — К.: «Цукор України», 2004. — Ч. 2. — 320 с.

3. *Тужилкин В.И.* Кристаллизация сахара: Монография. — М.: Издательский комплекс МГУПП, 2007. — 336 с.

4. *Кулинченко В.Р., Мирончук В.Г.* Промышленная кристаллизация сахаристых веществ: Монография. — К.: НУПТ, 2012. — 426 с.

5. *Погорельый Т.М., Мирончук В.Г.* Математическое моделирование процесса рекристаллизации на основании аналитических решений нестационарных задач теплопроводности в двухмерном случае для прямоугольных областей с неоднородными (непрерывными и разрывными на одной из сторон) граничными условиями и неоднородными начальными условиями // Тезисы докладов и сообщений XIV Минского международного форума по тепло- и массообмену, 10—13 сентября 2012 г. — Том 1, часть 2. — Минск.: Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси, 2012. — С. 761—764.

6. *Погорілий Т.М.* Математичне моделювання процесу теплообміну між комірками сахарози на основі аналітичного розв'язку нестационарної задачі теплопровідності в двовимірному випадку для прямокутної області з неоднорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою // Наукові праці Національного університету харчових технологій. — 2014. — Т. 20, № 2. — С. 136—145.

7. *Погорілий Т.М.* Математичне моделювання процесу теплообміну між комірками сахарози на основі аналітичного розв'язку нестационарної задачі теплопровідності з неоднорідними розривними на одній із бічних сторін та неперервними на всіх інших сторонах області граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою // Наукові праці Національного університету харчових технологій. — 2014. — Т. 20, № 4. — С. 165—173.

8. *Бажал И.Г., Куриленко О.Д.* Переконденсация в дисперсных системах. — К.: Наукова думка, 1975. — 216 с.

9. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — 13-е изд., исправленное. — М.: Наука, 1986. — 544 с.

ОБЪЕМНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖКРИСТАЛЬНОГО РАСТВОРА САХАРОЗЫ В СИСТЕМЕ ЯЧЕЕК: КРИСТАЛЛЫ САХАРА– МЕЖКРИСТАЛЬНЫЕ РАСТВОРЫ САХАРОЗЫ– ПАРОВОЙ ПУЗЫРЕК

Т.М. Погорельый

Национальный университет пищевых технологий

В статье представлено продолжение создания геометрической модели одно-временного контакта следующей системы ячеек: кристалл сахара меньшей

ячейки–межкристальный раствор сахарозы меньшей ячейки–паровой пузырек–межкристальный раствор сахарозы большей ячейки–кристалл сахара большей ячейки. Модель разработана в объемном (трехмерном) случае по координате. Построение такой геометрической модели необходимо для создания математической модели нестационарного процесса теплообмена и диффузионного массообмена между ячейками сахарозы и паровым пузырьком в трехмерном (по координате) случае. На основании созданной ранее объемной модели кристаллов сахара вышеупомянутой системы ячеек разработана и построена объемная геометрическая модель распределения межкристального раствора сахарозы, который окружает больший и меньший кристаллы сахара в соответствующих ячейках системы. При проведении расчетов было принято положение о распределении количества величины межкристального раствора сахарозы в каждой отдельной ячейке рассматриваемой системы пропорционально площади поверхности кристаллов сахара в этих самых ячейках. Значение величины толщины межкристального раствора в каждой отдельной ячейке принимается постоянной величиной по всей поверхности кристалла для каждой отдельной рассматриваемой ячейки.

Ключевые слова: ячеистая модель, межкристальный раствор сахарозы, площадь поверхности, объем раствора, толщина слоя.