

**VOLUME GEOMETRIC MODEL OF A SYSTEM OF CELLS:
SUGAR CRYSTALS–INTERCRYSTALLINE SUCROSE
SOLUTIONS–STEAM BUBBLE**

T. Pogoriliy

National University of Food Technologies

Key words:

*Cellular model
Sugar crystal
Sucrose solution
Steam bubble
Three-dimensional
geometric model of a
system*

Article history:

Received 16.07.2015
Received in revised form
16.08.2015
Accepted 30.08.2015

Corresponding author:

T. Pogoriliy
E-mail:
taras22@mail.ru

ABSTRACT

This paper presents the final phase of creating a geometric model having simultaneous contact between the entire system of cells: sugar crystal of a smaller cell - sucrose solution of a smaller cell - steam bubble - sucrose solution of a larger cell - larger sugar crystal cell, based on system of separately created volume models of separate cells of this system. The creation of volumetric system of cells having the form of parallelepiped was conducted using Cartesian coordinate system. In this connection, a method for switching from sphere to parallelepiped form of vapor bubbles contacting with each of mentioned sucrose solution cells of the system was developed.

**ОБ'ЄМНА ГЕОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ СИСТЕМИ
КОМІРОК: КРИСТАЛИ ЦУКРУ–МІЖКРИСТАЛЬНІ
РОЗЧИНИ САХАРОЗИ–ПАРОВА БУЛЬБАШКА**

Т.М. Погорілий

Національний університет харчових технологій

У статті представлено заключний етап створення геометричної моделі одночасного контакту всієї системи комірок: кристал цукру меншої комірки–міжкристальний розчин сахарози меншої комірки–парова бульбашка–міжкристальний розчин сахарози більшої комірки–кристал цукру більшої комірки на основі окремо створених об'ємних моделей складових комірок цієї системи. Розроблення об'ємної системи комірок проводилося в прямокутній декартовій системі координат для комірок, форми яких представлені у вигляді паралелепіпедів. У зв'язку з цим для парової бульбашки розроблено методуку переходу від форми сфери до форми паралелепіпеда при контакті з кожною із зазначених комірок міжкристального розчину сахарози.

Ключові слова: *комірчаста модель, кристал цукру, міжкристальний розчин сахарози, парова бульбашка, об'ємна геометрична модель системи.*

Постановка проблеми. Однією з головних проблем у харчовій промисловості (так само, як і в хімічній) є створення найбільш повної й адекватної математичної моделі того чи іншого процесу. Це дасть змогу покращити його описання, а можливість керування ним призведе до зменшення енерговитрат на його проведення. Найскладнішим з точки зору проведення моделювання та найбільш енергоємним у цукровій промисловості є процес масової кристалізації цукру з розчину сахарози при уварюванні цукрових утфелів у промислових умовах.

Відомо, що цукровий утфель за своїм складом являє собою досить складну багатофазну дисперсну систему. Одним із перших етапів у створенні математичної моделі процесу кристалізації сахарози, яка б найбільш повною мірою описувала перебіг цього процесу в промислових умовах, є створення тривимірної (об'ємної) геометричної моделі дисперсної системи. У пропонуваному дослідженні математична (геометрична) модель цукрового утфеля розглядається з точки зору комірчастої моделі. Відразу варто зауважити, що дана модель створена за певних спрощень і має характер ідеалізованої моделі цукрового утфеля. Модель представлена такою системою комірок: *кристал цукру меншої комірки–міжкристальний розчин сахарози меншої комірки–парова бульбашка–міжкристальний розчин сахарози більшої комірки–кристал цукру більшої комірки.*

На завершальному етапі в створенні об'ємної геометричної моделі такої системи комірок необхідно одночасно врахувати вже розглянуті та створені такі об'ємні геометричні моделі: модель кристалу цукру [1], модель міжкристального розчину сахарози [2] та модель парової бульбашки [3].

Оскільки математична модель розглядається з точки зору процесів тепло- та масообміну, то перевага у виборі форми моделі комірки кристалу цукру та форми комірки міжкристального розчину сахарози надається паралелепіпеду, в якого площа перенесення тепла й маси має скінченну визначену величину. Перехід від об'ємної форми парової бульбашки у вигляді сфери до еквівалентної форми комірки парової бульбашки у вигляді паралелепіпеда детально розглянуто в [3].

Слід зауважити, шоданий підхід у створенні математичної моделі процесу кристалізації цукру може бути використаний також і для будь-якої іншої суміжної галузі, тобто там, де в дисперсній системі, що розглядається, наявні дві або три складові фази. В даному випадку це може бути або система кристал–розчин, або система кристал–розчин–парова бульбашка.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Останні дослідження [4, 5, 6] свідчать про те, що створення математичних моделей процесу масової кристалізації сахарози через складність перебігу таких процесів, особливо в промислових умовах, на сьогодні остаточно не завершено. До того ж не існує єдиного підходу та не вироблено єдиної загальноприйнятої теорії, яка б могла дати в повній мірі відповіді на всі поставлені питання стосовно проходження процесу кристалізації.

Також недостатньо дослідженою залишається проблема якомога більш повного описання наявного в процесі масової кристалізації сахарози процесу рекристалізації, оскільки, за попередніми даними, процес рекристалізації є важливим у процесі масової кристалізації сахарози. Таким чином, необхідно створити таку математичну модель, яка в найбільш повній мірі могла б описати перебіг даного процесу. У зв'язку з цим наступний етап передбачає визначення значущості впливу процесу рекристалізації на процес масової кристалізації сахарози.

Мета дослідження. Розглянути питання створення геометричної об'ємної моделі вищезгаданої системи комірок: *кристал цукру меншої комірки–розчин сахарози меншої комірки–парова бульбашка–розчин сахарози більшої комірки–кристал цукру більшої комірки* в тривимірному випадку. Геометрична модель базуватиметься на вже створеній об'ємній геометричній моделі кристалів цукру в формі паралелепіпеда [1], об'ємній геометричній моделі міжкристального розчину сахарози, що оточує відповідні кристали цукру в більшій та меншій комірках системи [2], та об'ємній геометричній моделі парової бульбашки [3], що одночасно контактує з більшою та меншою комірками даної системи.

Матеріали і результати дослідження. Геометричне моделювання всієї системи. Трифазна дисперсна система розглядається з точки зору коміркової моделі [6, 10]. Надалі індексом 1 позначатимемо більшу комірку, індексом 2 — меншу.

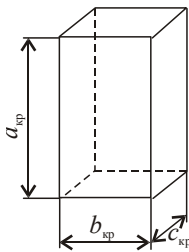


Рис. 1. Тривимірна модель кристалу цукру

Як зазначається в [1], при створенні моделі кристалів (у даному випадку цукру) прийнято ряд спрощень. Остаточною формою для комірок кристалів цукру був обраний паралелепіпед (рис. 1) зі сторонами $a_{кр1}$, $b_{кр1}$ і $c_{кр1}$ для більшого кристалу та $a_{кр2}$, $b_{кр2}$ і $c_{кр2}$ — для меншого. Пропорція для сторін кожного паралелепіпеда була вибрана за співвідношенням довжин осей нормального кристалу сахарози [6], вирощеного в чистому розчині, тобто $a_{кр} : b_{кр} : c_{кр} = 1,2595 : 1,0000 : 0,8782$. Характерний лінійний розмір кристалу відповідає найбільшій його стороні, позначеній через $a_{кр}$.

Наступний етап передбачає створення моделі розподілу міжкристального розчину (рис. 2) між кристалами більшої та меншої комірки [2]. За основу було взято той факт [6, 10], що міжкристальний розчин сахарози розподіляється пропорційно повній площі поверхні $S_{кр}$ відповідного кристалу цукру більшої та меншої комірок.

Вважатимемо, що кожен кристал оточений міжкристальним розчином сахарози товщиною $\delta_{розч}$, що є сталою величиною по всій його бічній поверхні (рис. 2). Для кожної окремої комірки, що розглядається, це буде своя величина товщини міжкристального розчину. При заданих значеннях розмірів кристалів $a_{кр1}$, $b_{кр1}$ і $c_{кр1}$ та $a_{кр2}$, $b_{кр2}$ і $c_{кр2}$ товщина міжкристального розчину $\delta_{розч}$ визначається з кубічного рівняння за формулами Кордано [2].

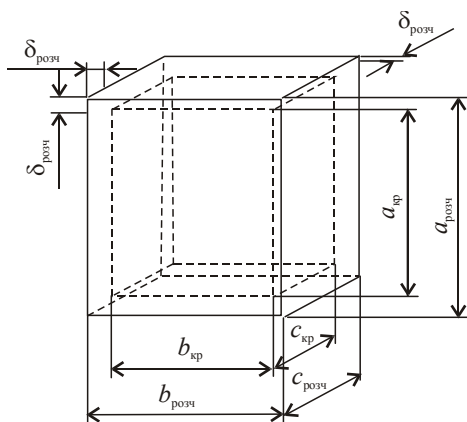


Рис. 2. Узагальнена тривимірна модель кристалу цукру, оточена міжкристалним розчином сахарози для більшої і меншої комірки

будуть записані диференціальні рівняння в частинних похідних при формулюванні постановки задач теплопровідності та масообміну між комірками. Коли ж розглядається вся система комірок одночасно, то для системи диференціальних рівнянь необхідно використати єдину систему координат (прямокутну декартову чи сферичну). Щоб уникнути неузгодженості, при створенні моделі парової бульбашки використано підхід, описаний у [3].

Завершальний етап створення моделі системи комірок передбачає [3] створення тривимірної моделі парової бульбашки (рис. 3). Складність вибору форми полягає в тому, що в природі парова бульбашка, як правило, має сферичну форму, що характерно для процесу кристалізації, який розглядається [6]. Проте для кристалів і міжкристалного розчину, що їх оточує, зважаючи на вищесказане, вже обрано форму паралелепіпеда. Зрозуміло, що від прийнятої форми (паралелепіпед чи сфера) кожної складової системи комірок в повній мірі залежатиме, в яких саме змінних по координатах

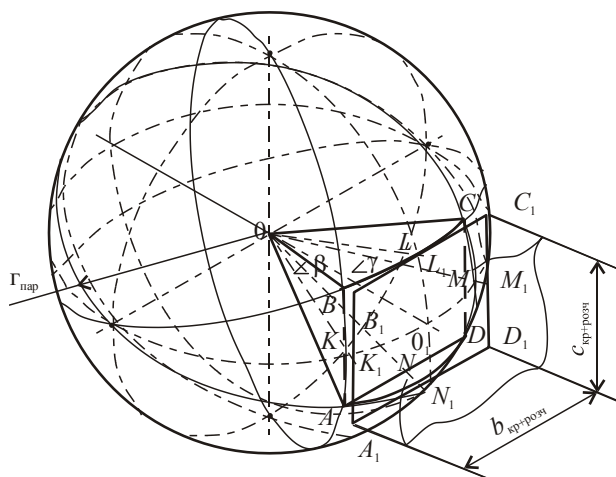


Рис. 3. Тривимірна модель парової бульбашки з виділеною областю контакту з коміркою міжкристалного розчину сахарози

Спочатку прийняли форму парової бульбашки у вигляді кулі (сфери) (рис. 3), тобто саме таку, яка відповідає її природному існуванню. Надалі було зроблено перехід [3] від об'ємної сферичної моделі парової бульбашки до еквівалентної прямокутної моделі.

Також слід зазначити, що в прийнятій моделі парової бульбашки у вигляді кулі (сфери) при масовій кристалізації сахарози не вся кількість теплоти бульбашки братиме участь у процесі теплообміну з розглянутими вище комірками кристалів і міжкристальних розчинів. Для того, щоб це врахувати в нашій моделі, а також звести всю систему комірок до єдиної системи координат, необхідно виділити з кулі (сфери) парової бульбашки саме ту її область (рис. 3), що бере участь у процесі теплообміну з коміркою розчину сахарози вказаної вище моделі дисперсної системи. Найкращою такою геометричною фігурою є прямокутна піраміда, яка «вирізана» з кулі, за умови, що вершина піраміди збігається з центром кулі, а бічні грані — проходять через бічні ребра паралелепіпеда комірок міжкристального розчину. Кути між гранями при вершині піраміди приймаємо 2β (порівняно із середньою стороною комірки міжкристального розчину) та 2γ (порівняно з меншою стороною комірки міжкристального розчину). Автором було підраховано [3] величину об'єму, утвореного такою пірамідою в кулі (сфері) радіусом $R_{нар}$:

$$V_{нар1} = \frac{4}{3} R_{нар}^3 \arcsin(\sin \alpha \cdot \sin \beta), \quad \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \right). \quad (1)$$

Знаючи величину об'єму парової бульбашки, що бере участь у процесі теплообміну з коміркою міжкристального розчину, через площу сторони паралелепіпеда [11]:

$$S_{нар1} = (b_{кр1} + 2\delta_{розч1}) \times (c_{кр1} + 2\delta_{розч1}) \quad (2)$$

можемо обчислити характерний лінійний розмір тієї частини парової бульбашки, що бере участь у процесі теплообміну з більшою коміркою міжкристального розчину:

$$a_{нар1} = \frac{V_{нар1}}{S_{нар1}} = \frac{4}{3(b_{кр1} + 2\delta_{розч1}) \cdot (c_{кр1} + 2\delta_{розч1})} R_{нар}^3 \arcsin(\sin \alpha \cdot \sin \beta). \quad (3)$$

Такий же підхід до визначення характерного лінійного розміру використовуємо і щодо іншої (тобто меншої) комірки міжкристального розчину.

Таким чином, використовуючи модель парової бульбашки у вигляді (кулі) сфери за допомогою виділення в ній області у вигляді піраміди для кожної з більшої та меншої комірок дисперсної системи, що розглядається вище, а також на основі отриманих виразів (2)—(4) розроблено методику переходу до еквівалентної моделі парової бульбашки у вигляді паралелепіпеда зі сторонами $a_{нарi}$, $b_{нарi} = b_{крi} + 2\delta_{розчi}$ та $c_{нарi} = c_{крi} + 2\delta_{розчi}$, ($i = 1, 2$), де величина $a_{нарi}$, обчислюється на основі виразу (3).

Отже, на основі проведеного тривимірного геометричного моделювання комірок більшого та меншого кристалів (цукру), комірок між кристальних розчинів, що оточують відповідні кристали, а також парової бульбашки побудовано тривимірну геометричну модель для всієї дисперсної системи комірок одночасно. В тривимірному випадку це будуть паралелепіпеди (рис. 4), що контактують між собою по зазначених вище сторонах.

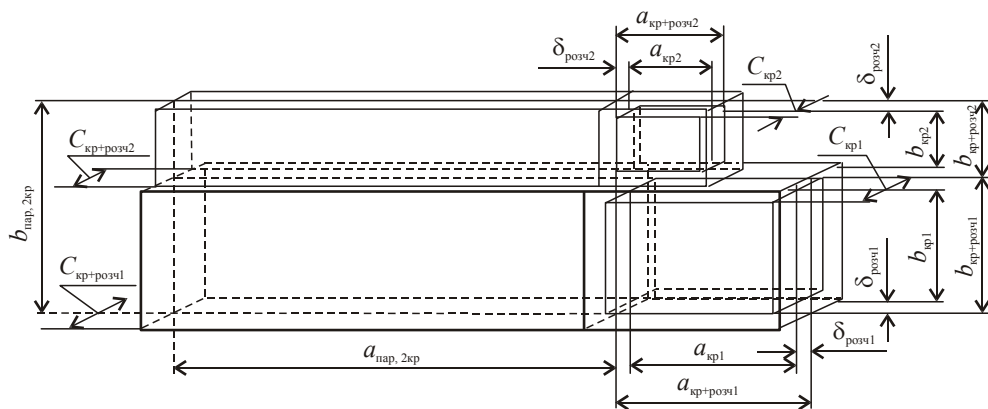


Рис. 4. Тривимірна модель системи комірок: більший кристал цукру–міжкристальний розчин більшого кристалу–парова бульбашка–міжкристальний розчин меншого кристалу–менший кристал цукру

У подальшому постановку задачі тепло- та масообміну для такої системи можна записати в декартовій системі координат. Розв’язок такої задачі потребує додаткових досліджень і виходить за межі даної статті. Варто зауважити, що розв’язок задач теплопровідності між двома комірками для двовимірного випадку дисперсної системи запропоновано в [7, 8, 9].

Висновки

На основі створених об’ємних геометричних моделей більшої та меншої комірок кристалів цукру, кожна з яких представлено у формі паралелепіпеда, об’ємних геометричних моделей комірок міжкристальних розчинів сахарози, що оточують відповідні за розміром комірки кристалів цукру, а також об’ємної геометричної моделі парової бульбашки створено об’ємну геометричну модель усієї системи комірок: *кристал цукру меншої комірки–міжкристальний розчин сахарози меншої комірки–парова бульбашка–міжкристальний розчин сахарози більшої комірки–кристал цукру більшої комірки*, що завершує побудову моделі всієї системи комірок у цілому в єдиній системі координат.

Література

1. *Погорілий Т.М.* Об’ємна геометрична модель кристалів цукру в системі комірок: кристали цукру–міжкристальні розчини сахарози–парова бульбашка // Наукові праці Національного університету харчових технологій. — 2014. — Т. 20, № 5. — С. 141—151.
2. *Погорілий Т.М.* Об’ємна геометрична модель міжкристального розчину сахарози в системі комірок: кристали цукру–міжкристальні розчини сахарози–парова бульбашка // Наукові праці Національного університету харчових технологій. — 2014. — Т. 21, № 2. — С. 139—150.
3. *Погорілий Т.М.* Об’ємна геометрична модель парової бульбашки в системі комірок: кристали цукру–міжкристальні розчини сахарози–парова бульбашка // Наукові праці Національного університету харчових технологій. — 2014. — Т. 21, № 4. — С. 154—163.
4. *Современные технологии и оборудование свеклосахарного производства: В 2-х ч. / В.О. Штангеев, В.Т. Кобер, Л.Г. Белостоцкий и др.; Под. ред. В.О. Штангеева.* — К.: «Цукор України», 2004. — Ч. 2. — 320 с.

5. Тужилкин В. И. Кристаллизация сахара: Монография. – М.: Издательский комплекс МГУПП, 2007. — 336 с.

6. Кулинченко В.Р., Мирончук В.Г. Промышленная кристаллизация сахаристых веществ: Монография. — К.: НУПТ, 2012. — 426 с.

7. Погорельый Т.М., Мирончук В.Г. Математическое моделирование процесса рекристаллизации на основании аналитических решений нестационарных задач теплопроводности в двумерном случае для прямоугольных областей с неоднородными (непрерывными и разрывными на одной из сторон) граничными условиями и неоднородными начальными условиями // Тезисы докладов и сообщений XIV Минского международного форума по тепло- и массообмену, 10—13 сентября 2012 г. — Том 1, Часть 2. — Минск.: Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси, 2012. — С. 761—764.

8. Погорілий Т.М. Математичне моделювання процесу теплообміну між комірками сахарози на основі аналітичного розв'язку нестационарної задачі теплопровідності в двовимірному випадку для прямокутної області з неоднорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою // Наукові праці Національного університету харчових технологій. — 2014. — Т. 20, № 2. — С. 136—145.

9. Погорілий Т.М. Математичне моделювання процесу теплообміну між комірками сахарози на основі аналітичного розв'язку нестационарної задачі теплопровідності з неоднорідними розривними на одній із бічних сторін та неперервними на всіх інших сторонах області граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою // Наукові праці Національного університету харчових технологій. — 2014. — Т. 20, № 4. — С. 165—173.

10. Бажал И.Г., Куриленко О.Д. Переконденсация в дисперсных системах. — К.: Наукова думка, 1975. — 216 с.

11. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — 13-е изд., исправленное. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 544 с.

ОБЪЕМНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ЯЧЕЕК: КРИСТАЛЛЫ САХАРА–МЕЖКРИСТАЛЬНЫЕ РАСТВОРЫ САХАРОЗЫ–ПАРОВОЙ ПУЗЫРЕК

Т.М. Погорельый

Національний університет пищевых технологий

В статье представлен заключительный этап в создании геометрической модели одновременного контакта всей системы ячеек: кристалл сахара меньшей ячейки–межкристальный раствор сахарозы меньшей ячейки–паровой пузырьки–межкристальный раствор сахарозы большей ячейки–кристалл сахара большей ячейки на основе отдельно разработанных объемных моделей составляющих ячеек этой системы. Разработка объемной модели всей системы ячеек проводится для случая прямоугольной декартовой системы координат для ячеек, формы которых представлены в виде параллелепипедов. В связи с этим для парового пузырька разработана методика перехода от формы сферы к форме параллелепипеда при контакте с каждой из указанных ячеек межкристального раствора сахарозы.

Ключевые слова: *ячеистая модель, кристалл сахара, межкристальный раствор сахарозы, паровой пузырек, объемная геометрическая модель системы.*