

## TEMPERATURE DISTRIBUTION IN THE SUCROSE SOLUTION–SUGAR CRYSTAL–MASSECUITE CELLS UNDER THEIR VARIOUS LOCATION IN THE HEATING TUBE

T. Pogorilyy

National University of Food Technologies

---

**Key words:**

*Temperature  
Cell  
Sucrose solution  
Sugar crystal  
Massecuite*

**Article history:**

Received 15.01.2016  
Received in revised form  
29.01.2016  
Accepted 23.02.2016

**Corresponding author:**

T. Pogorilyy  
**E-mail:**  
taras22@mail.ru

---

**ABSTRACT**

The paper presents the received results of temperature distribution for each cell of a system for three different options of the location of the walls of sugar crystal cells as to heating pipes surfaces depending on the duration of the contact of the cells system to the surface of the heating tube.

The calculations were made for ten particular values of the relative time of sugar massecuite boiling ( $\tau/\tau_c = 0.15; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 1.0$ ). On this basis we determined the duration of contact between the cell system of sucrose solution–crystal sugar–massecuite and the surface of the heating tube. The distribution of temperatures in the cells has been determined by solving a system of four differential equations of parabolic type (heat equation) having mixed boundary conditions (of the first kind – for the left edge of the first area corresponding to the left area of the intercellular sucrose solution, and of the second kind – for the right edge of the boundary area corresponding to the cell of the massecuite).

---

## РОЗПОДІЛ ТЕМПЕРАТУР У КОМІРКАХ МІЖКРИСТАЛЬНОГО РОЗЧИНУ САХАРОЗИ–КРИСТАЛУ ЦУКРУ–УТФЕЛЮ ПРИ РІЗНОМУ СПОСОБІ ЇХ РОЗТАШУВАННЯ В ГРІЮЧІЙ ТРУБЦІ

Т.М. Погорілий

Національний університет харчових технологій

*У статті отримано результати розподілу температур у кожній комірці системи для трьох різних способів розташування сторін комірки кристалу цукру стосовно поверхні стінки нагрівальної трубки залежно від тривалості контакту системи комірок з поверхнею нагрівальної трубки. Розрахунки здійснено для десяти окремих значень відносного часу уварювання цукрового утфелю ( $\tau/\tau_c = 0,15; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$ ), на основі яких визначалась тривалість контакту системи комірок розчин сахарози–*

*кристал цукру–утфель з поверхнею нагрівальної трубки. Розподіл температур у комірках знайдено на основі розв'язку системи чотирьох нестационарних диференціальних рівнянь у частинних похідних параболічного типу (рівняння теплопровідності) із змішаними граничними умовами (першого роду — для лівого краю першої області, що відповідає лівій області комірки міжкристального розчину сахарози, та другого роду — для правого краю останньої області, що відповідає комірці утфелю).*

**Ключові слова:** температура, комірка, міжкристальний розчин, кристал цукру, утфель.

**Постановка проблеми.** Найбільш енергоємним у виробництві цукру є процес отримання кристалічної сахарози. Для його керування необхідно створити математичну модель процесу кристалізації сахарози, яка б найповніше описувала процес тепло- та масообміну, що відбувається між складовими частинами багатозафазної системи, якою є цукровий утфель.

Описати ці процеси з урахуванням усіх технологічних факторів, які впливають на процес кристалізації, практично надзвичайно складно, тому при створенні математичної моделі кристалізації сахарози, яка має ідеалізований характер, було прийнято ряд спрощень.

У даному випадку цукровий утфель представлено у вигляді коміркової моделі [1]. Кожна комірка кристалу цукру оточена коміркою міжкристального розчину сахарози. Вважається, що кожна комірка міжкристального розчину сахарози відповідає лише певній комірці кристалу цукру, а тепло- та масообмінні процеси відбуваються між цими комірками.

Щоб визначити вплив технологічних параметрів (температура нагрівання, тиск тощо) на процес кристалізації, насамперед потрібно визначити кількість перенесеної речовини між комірками розчину сахарози. Одночасно з цим потрібно визначити кількість сахарози, що буде кристалізуватись (або розчинятись) при контакті тієї чи іншої комірки розчину сахарози з відповідною для неї коміркою кристалу цукру.

Дана задача масообміну ґрунтується передусім на отриманні температурних полів у системі комірок, якою є утфель, тому при створенні математичної моделі процесу кристалізації необхідно знайти розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для чотирьох комірок розглянутої вище системи.

Моделювання процесу теплообміну здійснюється для всіх можливих випадків (три випадки) розташування лише однієї комірки розчину сахарози, що оточує відповідну комірку кристалу цукру в нагрівальній трубці стосовно її поверхні нагрівання, також показано взаємодію цієї системи комірок з утфелем. Зміна температур визначається всередині нагрівальної трубки на основі розв'язку нестационарних задач теплопровідності. За початковий момент часу приймається той момент часу, коли вся система комірок потрапляє в нагрівальну трубку знизу, а за кінцевий — момент часу, коли система комірок виходить з верхньої частини цієї ж трубки.

**Мета дослідження.** Знайти нестационарний розподіл температур в усіх складових одновимірних областях «ліва сторона міжкристального розчину

сахарози–кристал цукру–права сторона міжкристального розчину сахарози–утфель» при різних способах розташування кристалу цукру, що оточений міжкристальним розчином сахарози, стосовно поверхні нагрівальної трубки підвісної нагрівної камери вакуум-апарата залежно від відносного часу уварювання цукрового утфелю  $\tau/\tau_{ц}$  і часу  $\tau_{к}(\tau/\tau_{ц})$  перебування всієї системи комірок усередині гріючої трубки.

**Матеріали і методи.** Припустимо, що комірка кристалу цукру в ідеалізованому варіанті має вигляд паралелепіпеда з пропорцією сторін [2], що відповідає нормальним пропорціям кристалу сахарози, вирощеного в чистому розчині, і має таке співвідношення довжин своїх вісей  $a:b:c = 1,2595:1,0000:0,8782$  [1].

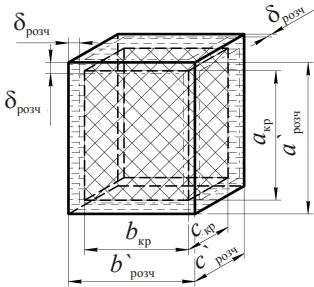


Рис. 1. Взаємне розташування комірки кристалу цукру і комірки міжкристального розчину сахарози

У свою чергу, комірка міжкристального розчину сахарози має сталу товщину по всій поверхні кристалу цукру [3]. Методика визначення цієї товщини для ідеалізованої математичної моделі детальніше представлена в [3].

Одночасне розташування комірок кристалу цукру–міжкристальний розчин сахарози показано на рис. 1.

Характерний лінійний розмір кристалу цукру приймався рівним  $l_{кр} = 5 \cdot 10^{-4}$  м. Відповідно до цього, всі сторони комірки кристалу цукру визначались, як:  $a_{кр} = 5 \cdot 10^{-4}$  м,  $b_{кр} = 3,9 \cdot 10^{-4}$  м та  $c_{кр} = 3,4 \cdot 10^{-4}$  м (рис. 1). Величина комірки міжкристального розчину приймалась сталою для всіх сторін комірки кристалу цукру, і, в даному випадку, рівною  $\delta_{розч} = 4,29 \cdot 10^{-5}$  м. Величина області цукрового утфелю приймалась такою, щоб уся система комірок була розташована від стінки нагрівальної трубки гріючої камери до центра цієї трубки, діаметр якої приймався рівним  $d_{тр} = 9,86 \cdot 10^{-2}$  м.

Геометрична модель для комірок системи міжкристальний розчин сахарози–кристал цукру–утфель будувалась у тривимірному (об’ємному) випадку по координаті. Розв’язок нестационарної задачі теплопровідності для такої системи комірок, у свою чергу, розглядався в одновимірному (по координаті) випадку.

Проекцію трьох різних об’ємних геометричних моделей розташування комірок системи міжкристальний розчин сахарози–кристал цукру–утфель у нагрівальній трубці зображено для двовимірного випадку (рис. 2–4).

Таким чином, розглядалось три різних випадки розташування комірок системи міжкристальний розчин сахарози–кристал цукру–утфель, коли кристал цукру через прошарок міжкристального розчину сахарози буде контактувати зі стінкою нагрівальної трубки:

а) найменшою своєю стороною  $b_{кр} \times c_{кр}$ ; отже, найбільша сторона кристалу  $a_{кр}$  цукру буде направлена від стінки нагрівальної трубки до вісі цієї трубки, що й зображено на рис. 2;

б) середньою своєю стороною  $a_{кр} \times c_{кр}$ ; отже, в даному випадку, середня сторона кристалу  $b_{кр}$  цукру буде направлена від стінки нагрівальної трубки до вісі цієї трубки (рис. 3);

в) найбільшою своєю стороною  $a_{кр} \times b_{кр}$ ; отже, найменша сторона кристалу  $c_{кр}$  цукру буде направлена від стінки нагрівальної трубки до вісі цієї трубки (рис. 4).

В одновимірному по координаті випадку система комірок міжкристальний розчин сахарози–кристал цукру–утфель буде представлена чотирма областями (рис. 2—4), де відповідні номери областей визначають такі комірки: 1 — ліва сторона комірки міжкристального розчину сахарози (надалі позначимо індексом розч.Л); 2 — комірка кристалу цукру; 3 — права сторона комірки розчину сахарози (розч.П); 4 — комірка утфеля.

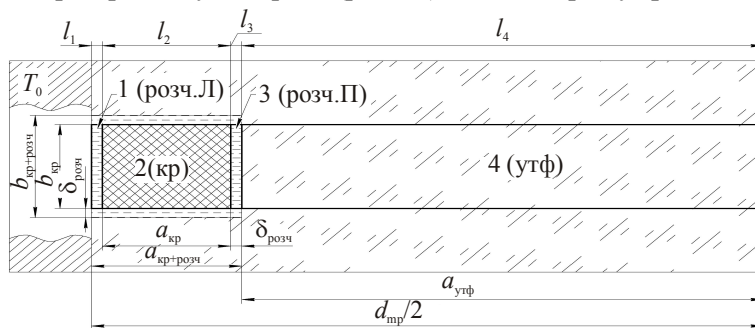


Рис. 2. Система комірок міжкристальний розчин сахарози–кристал цукру–утфель при розміщенні кристалу цукру біля нагрівальної трубки найменшою стороною  $b_{кр} \times c_{кр}$

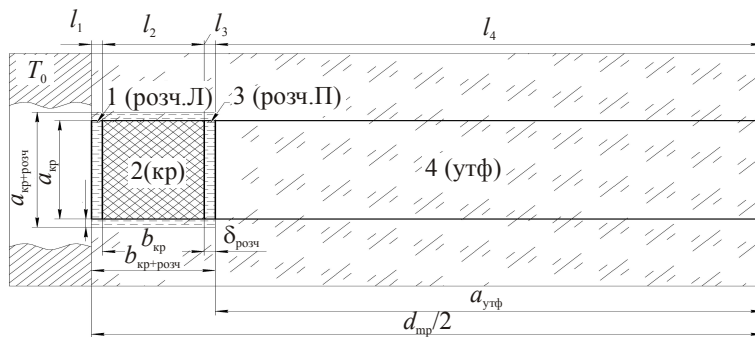


Рис. 3. Система комірок міжкристальний розчин сахарози–кристал цукру–утфель при розміщенні кристалу цукру біля нагрівальної трубки середньою стороною  $a_{кр} \times c_{кр}$

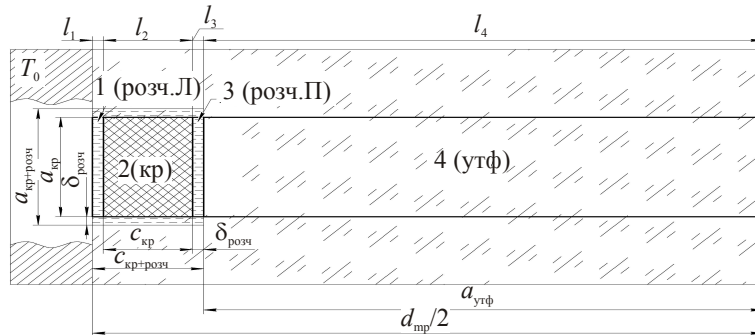


Рис. 4. Система комірок міжкристальний розчин сахарози–кристал цукру–утфель при розміщенні кристалу цукру біля нагрівальної трубки найбільшою стороною  $a_{кр} \times b_{кр}$

Для кожного випадку розташування кристалу цукру стосовно поверхні нагрівальної трубки необхідно знайти розв'язок системи (1) одночасно для чотирьох нестационарних диференціальних рівнянь у частинних похідних параболічного типу (рівняння теплопровідності) для відповідних чотирьох одновимірних областей, що попарно контактують між собою із змішаними граничними умовами (2)—(4) та відповідними початковими умовами (5):

$$\frac{\partial T_i}{\partial \tau} = a_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2}, \quad (i = 1, 2, 3, 4); \quad (1)$$

$$T_1(0, \tau) = T_0 = 100; \quad (2)$$

$$-\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \Big|_{x=l_i} = -\lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} \Big|_{x=l_i}, \quad (i = 1, 2, 3); \quad (3a)$$

$$T_i = T_{i+1}, \quad (i = 1, 2, 3); \quad (3b)$$

$$\frac{\partial T_4}{\partial x} \Big|_{x=l_4} = 0; \quad (4)$$

$$T_i(x, 0) = T_{i0} = 75, \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (5)$$

Для кожної задачі теплопровідності знайдено два типу розв'язків:

- таких, що одночасно залежать від сталих;
- таких, що одночасно залежать від змінних теплофізичних характеристик по кожній області, що представляють комірки розглянутої вище системи.

Слід зауважити, що і у випадку сталих, і у випадку змінних теплофізичних характеристик по кожній окремій області системи комірок ці характеристики змінюються протягом усього циклу уварювання цукрового утфелю. Для врахування цього окремо виділено десять значень відносного часу уварювання цукрового утфелю ( $\tau/\tau_{ц} = 0,15; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$ ), в яких і фіксувались усі поточні значення теплофізичних і технологічних характеристик. Залежно від відносного часу уварювання також було знайдено час підйому системи комірок у нагрівальній трубці. Саме це значення часу і вважається часом контакту  $\tau_{end}$  всієї системи комірок з поверхнею нагріву трубки.

Варто зазначити, що у пропонованому дослідженні представлено розрахунки лише для випадку відносного часу уварювання  $\tau/\tau_{ц} = 0,15$ .

Початкова температура приймалась однаковою для всіх складових системи комірок і складала  $75^\circ\text{C}$ . Температура стінки нагрівальної трубки приймалась рівною  $100^\circ\text{C}$ , що є граничною умовою для лівої області для кожного випадку розташування кристалу цукру (рис. 2—4). Всі інші граничні умови (3a) виражають ідеальний теплообмін між сусідніми комірками системи, а умови (3b) — так звані умови «зшивки».

Гранична умова (4) отримана з фізичного змісту, оскільки задача в тривимірному випадку розглядається як осесиметрична (правий край на рис. 2—4 — це вісь симетрії нагрівальної трубки).

Розв'язати систему нестационарних диференціальних рівнянь (1) з граничними (2)—(4) та початковими умовами (5) аналітичним методом [4] досить складно, тому в даному випадку був застосований один із методів

чисельного розв'язку нестационарних задач теплопровідності, відомий як метод контрольного об'єму [6, 7].

Дискретизація по часу становила  $\Delta\tau = 0,001$  с. Для дискретизації по координаті була застосована нерівномірна сітка з розбиттям кожної комірки на відповідну кількість контрольних об'ємів ( $n_1 = 5, n_2 = 20, n_3 = 5, n_4 = 100$ ). Для області, що представляла утфель, також було використано нерівномірний крок розбиття. Для відносного часу уварювання  $\tau/\tau_{\text{н}} = 0,15$  кінцевий час контакту системи комірок зі стінкою нагрівальної трубки становить  $\tau_{\text{end}} = 3,95$  с.

**Результати і обговорення.** Результати отриманих розв'язків системи рівнянь (1)—(5) представлені для трьох випадків розташування кристалу стосовно поверхні нагрівальної трубки, які на графіках виражені через коефіцієнти «к50е5» — для випадку, зображеному на рис. 2; «к39е5» — для випадку, зображеному на рис. 3 та «к34е5» — для випадку, зображеному на рис. 4. Для кожного з цих випадків, у свою чергу, було розглянуто два випадки розподілу температур.

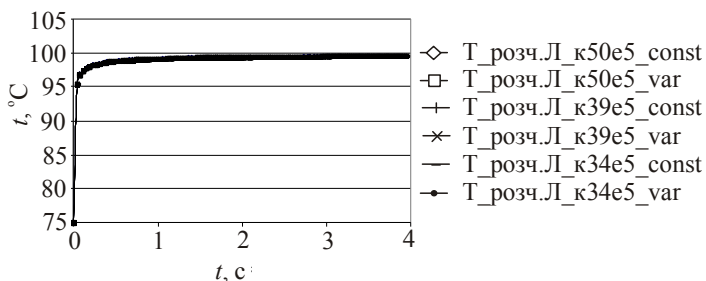


Рис. 5. Розподіл середніх по координаті температур у першій області (рис. 2—4), що відповідає лівій стороні комірки міжкристального розчину сахарози залежно від тривалості контакту всієї системи комірок з поверхнею нагрівальної трубки при сталих (індекс const) і змінних (індекс var) теплофізичних характеристиках ( $\tau/\tau_{\text{н}} = 0,15$ )

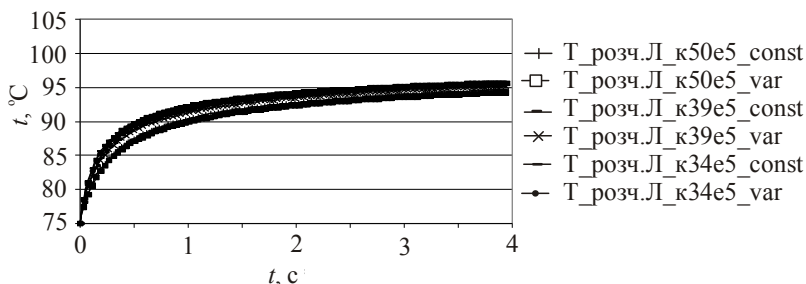


Рис. 6. Розподіл середніх по координаті температур у другій області (рис. 2—4), що відповідає комірці кристалу цукру залежно від тривалості контакту всієї системи комірок з поверхнею нагрівальної трубки при сталих (індекс const) і змінних (індекс var) теплофізичних характеристиках ( $\tau/\tau_{\text{н}} = 0,15$ )

У першому випадку розглядався розподіл середніх по координаті області температур у системі комірок міжкристальний розчин сахарози—кристал цукру—утфель залежно від тривалості контакту цієї системи з поверхнею нагрівальної трубки при сталих (на рис. 5—9 позначено через криві з індексом *const*) і змінних (на рис. 5—9 позначено через криві з індексом *var*) теплофізичних характеристиках складових системи комірок.

У другому випадку представлено остаточний розподіл температур у системі комірок при її виході з нагрівальної трубки залежно від відстані  $x$  від верхньої нагрівальної трубки до її вісі симетрії при сталих (на рис. 9 позначено через індекс const) і змінних (на рис. 9 позначено через індекс var) теплофізичних характеристиках.

Зважаючи на велику кількість отриманих даних, у пропоновану дослідженні представлені графіки наведено тільки для випадку  $\tau/\tau_{\text{ц}} = 0,15$ .

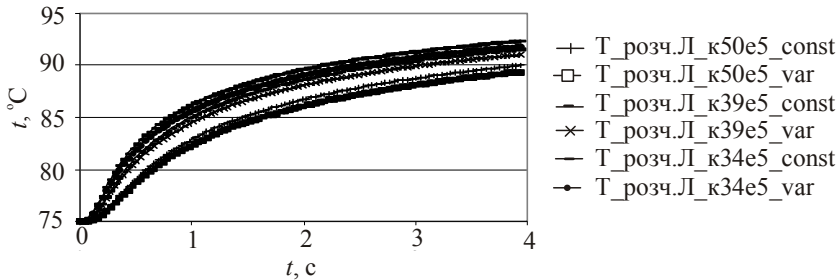


Рис. 7. Розподіл середніх по координаті температур у третій області (рис. 2—4) що відповідає правій стороні комірки міжкристалного розчину сахарози залежно від тривалості контакту всієї системи комірок з поверхнею нагрівальної трубки при сталих (індекс const) і змінних (індекс var) теплофізичних характеристиках ( $\tau/\tau_{\text{ц}} = 0,15$ )

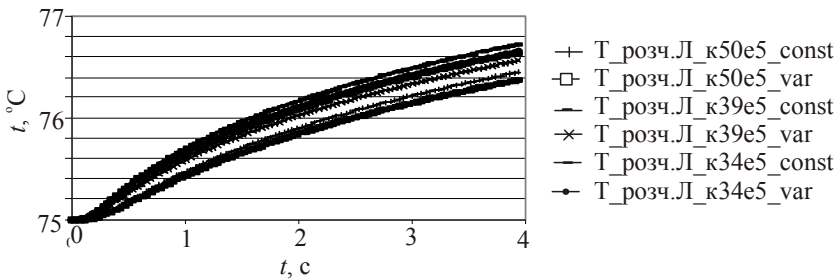


Рис. 8. Розподіл середніх по координаті температур у четвертій області (рис. 2—4), що відповідає utfелю, залежно від тривалості контакту всієї системи комірок з поверхнею нагрівальної трубки при сталих (індекс const) і змінних (індекс var) теплофізичних характеристиках ( $\tau/\tau_{\text{ц}} = 0,15$ )

При  $\tau/\tau_{\text{ц}} = 0,15$  на виході з нагрівальної трубки середня (по координаті області) температура для першої області, тобто для лівої сторони комірки розчину сахарози (рис. 2—4), при розміщенні біля поверхні нагрівальної трубки своєю найменшою (рис. 2), середньою (рис. 3) та найбільшою (рис. 4) стороною комірки кристалу цукру складає, відповідно, 99,536 °C, 99,530 °C та 99,528 °C при сталих теплофізичних характеристиках по кожній з комірок та, відповідно, 99,517 °C, 99,510 °C і 99,507 °C при змінних теплофізичних характеристиках.

Середня (по координаті області) температура для другої області, тобто для комірки кристалу цукру (рис. 2—4), яка через прошарок міжкристалного розчину дотикається до нагрівальної трубки найменшою (рис. 2), середньою (рис. 3) та найбільшою (рис. 3) стороною складає, відповідно, 95,911 °C, 95,506 °C і 94,673 °C при сталих теплофізичних характеристиках по кожній з

комірок, та, відповідно, 95,616 °С, 95,189 °С і 94,315 °С при змінних теплофізичних характеристиках.

Середня температура третьої області, тобто для правої сторони комірки міжкристального розчину сахарози (рис. 2—4), складає, відповідно, 92,376 °С, 91,593 °С і 90,000 °С при сталих теплофізичних характеристиках по кожній з комірок, та, відповідно, 91,870 °С, 91,057 °С і 89,418 °С при змінних теплофізичних характеристиках.

Середня температура останньої четвертої області, тобто для цукрового утфелю (рис. 2—4), складає, відповідно, 76,729 °С, 76,636 °С і 76,451 °С при сталих теплофізичних характеристиках по кожному з випадків розташування комірки кристалу цукру, та, відповідно, 76,657 °С, 76,563 °С і 76,378 °С при змінних теплофізичних характеристиках.

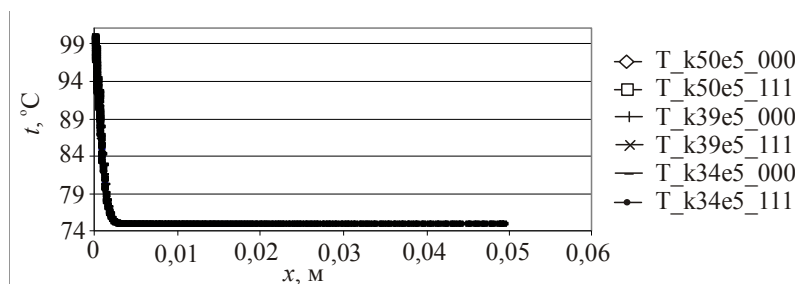


Рис. 9. Розподіл температури в системі комірок залежно від відстані  $x$  від поверхні нагрівальної трубки до вісі її симетрії при сталих (індекс const) і змінних (індекс var) теплофізичних характеристиках ( $\tau/\tau_{ц} = 0,15$ )

При  $\tau/\tau_{ц} = 0,15$  для наведених варіантів контакту сторін комірки кристалу цукру з поверхнею нагрівальної трубки, температура утфелю порівняно з початковою температурою, що приймалась на вході в нагрівальну трубку рівною 75 °С, на виході з гріючої трубки залишається практично незмінною на відстані, відповідно,  $x = 0,004826$  м,  $x = 0,004732$  м та  $x = 0,004688$  м від нагрівальної стінки в напрямку вісі трубки.

## Висновки

Для трьох різних варіантів розміщення сторін комірки кристалу цукру стосовно поверхні нагрівальної трубки знайдено нестационарний розподіл температур у системі комірок міжкристальний розчин сахарози–кристал цукру–утфель при контакті цієї системи з нагрівальною трубкою у двох випадках: а) залежно від часу контакту системи комірок з поверхнею нагрівальної трубки; б) на виході з неї отримано остаточний розподіл температур усієї системи комірок залежно від відстані  $x$  від поверхні трубки (координати) до її вісі. Всі дані розраховувались для десяти різних значень відносного часу уварювання цукрового утфелю  $\tau/\tau_{ц}$ .

## Література

1. Кулинченко В.Р., Мирончук В.Г. Промышленная кристаллизация сахаристых веществ: Монография. — Киев: НУПТ, 2012. — 426 с.



2. Погорілий Т.М. Об'ємна геометрична модель кристалів цукру в системі комірок кристали цукру–міжкристальні розчини сахарози–парова бульбашка // Наукові праці Національного університету харчових технологій. — Т. 20, № 5. — С. 141—151.

3. Погорілий Т.М. Об'ємна геометрична модель міжкристального розчину сахарози в системі комірок кристали цукру–міжкристальні розчини сахарози–парова бульбашка // Наукові праці Національного університету харчових технологій. — Т. 21, № 2. — С. 139—150.

4. Погорельый Т.М., Мирончук В.Г. Математическое моделирование процесса рекристаллизации на основании аналитических решений нестационарных задач теплопроводности в двухмерном случае для прямоугольных областей с неоднородными (непрерывными и разрывными на одной из сторон) граничными условиями и неоднородными начальными условиями // Тезисы докладов и сообщений XIV Минского международного форума по тепло- и массообмену, 10—13 сентября 2012 г.— Том 1, Часть 2.— Минск.: Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси, 2012. — С. 761—764.

5. Pogoriliy T. The distribution of temperatures in the sucrose solution-sugar crystal-sucrose solution-masseccuite cells depending on the boiling sugar masseccuite time // Ukrainian Journal of Food Science. — 2015. — Volume 3, Issue 1. — P. 139—148.

6. Eymard R., Gallouët T.R., Herbin R. The finite volume method Handbook of Numerical Analysis. — 2000. — Vol. VII. — P. 713—1020.

7. LeVeque Randall Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. — Cambridge University Press. — 2002. — 580 p.

## **РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР В ЯЧЕЙКАХ МЕЖКРИСТАЛЬНОГО РАСТВОРА САХАРОЗЫ– КРИСТАЛЛА САХАРА–УТФЕЛЯ ПРИ РАЗНОМ СПОСОБЕ ИХ РАЗМЕЩЕНИЯ В НАГРЕВАТЕЛЬНОЙ ТРУБКЕ**

**Т.М. Погорельый**

*Національний університет пищевых технологий*

*В статье получены результаты распределения температур в каждой ячейке системы для трех различных способов расположения сторон ячейки кристалла сахара по отношению к поверхности стенки нагревательной трубки в зависимости от продолжительности контакта системы ячеек с поверхностью нагревательной трубки. Расчеты осуществлены для десяти отдельных значений относительного времени уваривания сахарного утфеля ( $\tau/\tau_{\text{н}} = 0,15; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$ ), на основании которых определялась продолжительность контакта системы ячеек раствор сахарозы–кристалл сахара–утфель с поверхностью нагревательной трубки. Распределение температур в приведенной выше системе ячеек определено на основании решения системы четырех нестационарных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа (уравнение теплопроводности) со смешанными граничными условиями (первого рода — для левого края первой области, которая представляет левую ячейку межкристального раствора, и второго рода — для правого края последней области, которая представляет ячейку утфеля).*

**Ключевые слова:** температура, ячейка, межкристальный раствор, кристалл сахара, утфель.