

## FILM THICKNESS IN DOWNSTREAM RING FILM FLOWS WITH INTERFACIAL INTERACTION

V. Petrenko, M. Pryadko, O. Riabchuk

National University of Food Technologies

---

**Key words:**

*Film  
Turbulence  
Interfacial friction  
Velocity profile  
Liquid flow rate*

---

**Article history:**

Received 17.02.2016  
Received in revised form  
12.03.2016  
Accepted 23.03.2016

---

**Corresponding author:**

V. Petrenko  
**E-mail:**  
npnuht@ukr.net

---

**ABSTRACT**

The results of hydrodynamic processes analysis in the stable ring downstream flows with the interfacial tangential tensions as a result of differential equation solution of impulse conservation in the liquid film flowing down on vertical surface were represented. Modeling of transfer processes in the turbulent mode of film motion was performed on the base of M.D. Millionshchikov turbulence model modified by replacing the constant coefficient at the vertex of parabola onto the exponential function of the flow rate characteristics establishing the compliance of experimental data to the calculation results of respectively adopted turbulence model. The study presents correlations for calculating the average film thickness in the laminar and turbulent modes of water flow and viscous fluids having a viscosity being changed by two orders both in free flow mode and in presence of interfacial friction between the film's surface and the gas stream.

---

## ТОВЩИНА ПЛІВКИ В НИЗХІДНИХ КІЛЬЦЕВИХ ПОТОКАХ З МІЖФАЗОВОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

В.П. Петренко, М.О. Прядко, О.М. Рябчук

Національний університет харчових технологій

*У статті наведено результати аналізу гідродинамічних процесів в усталених низхідних кільцевих потоках з міжфазовою дотичною напругою, отримані при розв'язку диференціального рівняння збереження імпульсу в плівці рідини, що стікає по вертикальній поверхні. Моделювання процесів перенесення в турбулентному режимі руху плівки здійснено на основі моделі турбулентності М.Д. Мілліоніщикова, модифікованої заміною постійного коефіцієнта при вершині параболи на експоненціальну функцію від витратних характеристик потоку, що встановлює відповідність експериментальним даним результатів розрахунку за прийнятою моделлю турбулентності. Наведено співвідношення для розрахунку середньої товщини плівки в ламінарному та турбулентному режимах руху води та в'язких рідин, в'язкість яких змінювалась на два порядки як у режимі вільного стікання, так і за наявності міжфазового тертя між поверхнею плівки та газовим потоком.*

**Ключові слова:** плівка, турбулентність, міжфазове тертя, профіль швидкості, щільність зрошення.

**Постановка проблеми.** Характерною особливістю плівкових течій у трубах випарних апаратів є наявність рухомого парового ядра і, відповідно, міжфазового тертя, яке змінює як саму товщину плівки, так і її хвильову структуру. Відомо, що в довгих каналах за умови вільного стікання переважає режим розвинутого хвильового руху, за якого по поверхні плівки скочуються великі хвилі [1]. За наявності міжфазової дотичної напруги великі хвилі деформуються, їх амплітуда зменшується, довжина зростає, тому середня товщина плівки суттєво відрізняється від умов вільного стікання.

Іншою характерною особливістю плівкових течій є те, що міжфазова поверхня, як і поверхня стінки труби, пригнічує турбулентність, тому в рівняннях перенесення імпульсу й теплоти коректним є застосування лише тих моделей турбулентності, які враховують демпфувальний вплив поверхні плівки на турбулентність.

**Мета дослідження.** Отримання співвідношень для розрахунку товщини стікаючої по вертикальній поверхні плівки рідини за наявності міжфазового тертя між поверхнею плівки та газовим ядром потоку в усталених низхідних кільцевих потоках.

**Матеріали і методи.** Математичне моделювання поля швидкостей в плівці виконано на основі аналітичного розв'язання диференціального рівняння збереження імпульсу, а середніх швидкостей — в результаті чисельного інтегрування отриманих співвідношень з розподілу швидкостей у системі Mathcad.

Фізичне моделювання здійснене на експериментальних стендах для дослідження гідродинаміки стікаючих плівок води та водо-гліцеринових сумішей у вертикальних трубах довжиною 2,4 м, діаметром 25 мм [2], а також цукрових розчинів концентрацією до 70 % в трубі довжиною 1,8 м, діаметром 20 мм [3]. Детальний опис експериментальної установки для моделювання низхідних паро-рідинних потоків цукрових розчинів можна знайти в [4].

**Результати і обговорення.** Моделювання процесів перенесення за умов наявності міжфазового тертя зручно здійснювати на основі моделі турбулентності М.Д. Мілліонщикова [5], згідно з якою існує ламінарний прошарок товщиною  $\delta_{\text{л}}^+ = 7,8$ , в межах якого  $\frac{v_t}{v} = 0$ , і турбулентний з параболічний профілем турбулентної в'язкості в діапазоні  $\frac{7,8}{\delta^+} \leq \eta \leq 1$ :

$$\frac{v_t}{v} = \varepsilon (\eta \delta^+ - \delta_o^+) (1 - \eta), \quad (1)$$

де  $\eta = \frac{y}{\delta}$ ;  $\eta_{\text{л}} = \frac{\delta_{\text{л}}}{\delta} = \frac{\delta_{\text{л}}^+}{\delta^+}$ ;  $\delta_{\text{л}} = \frac{7,8 v}{u^*}$ ;  $\delta^+ = \frac{\delta u^*}{v}$ ;  $u^* = \sqrt{\frac{\tau_i + \rho g \delta}{\rho}}$ ;  $\tau_i$  — дотична напруга на міжфазовій поверхні, н/м<sup>2</sup>;  $v$  — кінематична в'язкість

рідини, м<sup>2</sup>/с;  $\delta$  — середня товщина плівки, м;  $u^*$  — динамічна швидкість, м<sup>2</sup>/с;  $\rho$  — густина рідини, кг/м<sup>3</sup>;  $y$  — відстань від стінки, м.

В оригінальному рівнянні (1) [5] коефіцієнт  $\varepsilon = 0,39$  при вершині параболи залишається постійним незалежно від зміни витратних і режимних параметрів потоку. Для усталеного режиму руху за наявності міжфазового тертя рівняння збереження імпульсу турбулентної плівки має вигляд:

$$\frac{\tau_i \delta}{\rho v} + \frac{g \delta^2}{v} (1 - \eta) = \left[ 1 + \left( \frac{v_i}{v} \right) \right] \frac{du}{d\eta}. \quad (2)$$

Інтегрування (2) для внутрішнього ламінарного прошарку  $\eta \leq \frac{7,8}{\delta^+}$ , де  $v_i / v = 0$ , дає

$$u_n = \left( \frac{\tau_i \delta}{\rho v} + \frac{g \delta^2}{v} \right) \eta - \frac{g \delta^2}{v} \frac{\eta^2}{2}, \quad (3)$$

а для турбулентної частини  $\frac{7,8}{\delta^+} \leq \eta \leq 1$  з розподілом турбулентної в'язкості (1) профіль швидкості розраховується як

$$u_t = \left( \frac{\tau_i \delta}{\rho v} + \frac{g \delta^2}{v} \right) \int_{\eta_n}^{\eta} \frac{d\eta}{1 + \varepsilon (\eta \delta^+ - \delta_n^+) (1 - \eta)} - \frac{g \delta^2}{v} \int_{\eta_n}^{\eta} \frac{\eta d\eta}{1 + \varepsilon (\eta \delta^+ - \delta_n^+) (1 - \eta)}. \quad (4)$$

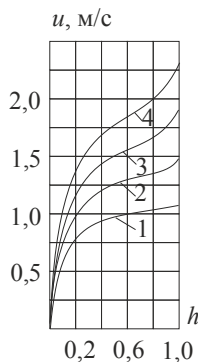
Інтегруючи (4) за граничних умов  $\eta = \eta_n$ ,  $u = u_{n,гр}$ ,  $u_{n,гр} = \left( \frac{\tau_i \delta}{\rho v} + \frac{g \delta^2}{v} \right) \eta_n - \frac{g \delta^2}{v} \frac{\eta_n^2}{2}$ , отримуємо:

$$\begin{aligned} u_t(\eta) = & \left[ \frac{2}{R} \left( \frac{\tau_i \delta}{\rho v} + \frac{g \delta^2}{v} \right) - \frac{g \delta^2}{R v} \left( 1 + \frac{\delta_n^+}{\delta^+} \right) \right] \times \\ & \times \left\{ \operatorname{arctg} \left[ \frac{\varepsilon}{R} (2\eta_n \delta^+ - \delta^+ - \delta_n^+) \right] - \operatorname{arctg} \left[ \frac{\varepsilon (2\eta \delta^+ - \delta^+ - \delta_n^+)}{R} \right] \right\} + \\ & + \left( \frac{g \delta^2}{v} \right) \left\{ \frac{1}{2\delta^+ \varepsilon} \ln \left| \frac{\varepsilon \delta^+ (\eta^2 - \eta) - \varepsilon \delta_n^+ (\eta - 1) - 1}{\varepsilon \delta^+ (\eta_n^2 - \eta_n) - \varepsilon \delta_n^+ (\eta_n - 1) - 1} \right| \right\} + \\ & + \left( \frac{\tau_i \delta}{\rho v} + \frac{g \delta^2}{v} \right) \eta_n - \frac{g \delta^2}{v} \frac{\eta_n^2}{2}, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $R = \sqrt{2\varepsilon^2 \delta^+ \delta_n^+ - \varepsilon^2 \delta^{+2} - \varepsilon^2 \delta_n^{+2} - 4\varepsilon \delta^+}$ .

У разі вільного стікання по вертикальній поверхні у рівняннях (3), (5) приймається  $\tau_i = 0$ .

Графічна інтерпретація профілю швидкості в плівці, що відповідає рівнянню (5) за умови різної дотичної напруги на міжфазовій поверхні при постійному ступені турбулізації потоку, наведена на рис. 1.



**Рис. 1.** Розрахункові за співвідношенням (5) профілі швидкості в плівці води при:  
 $t = 100\text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\varepsilon = 0,39$ ;  $Re = 6000$ ; 1 –  $\tau_i = 0\text{ Н/м}^2$ ; 2 – 1; 3 – 2; 4 – 3

Середня швидкість рідини в плівці визначається як

$$\bar{u} = U_{\text{л}}\eta_{\text{л}} + U_t(1 - \eta_{\text{л}}) = \int_0^{\eta_{\text{л}}} u_{\text{л}}(\eta)d\eta + \int_{\eta_{\text{л}}}^1 u_t(\eta)d\eta, \quad (6)$$

де  $U_{\text{л}} = \frac{1}{\eta_{\text{л}}} \int_0^{\eta_{\text{л}}} u_{\text{л}}(\eta)d\eta$ ;  $U_t = \frac{1}{1 - \eta_{\text{л}}} \int_{\eta_{\text{л}}}^1 u_t(\eta)d\eta$  — середні швидкості в ламінарному й турбулентному прошарках відповідно.

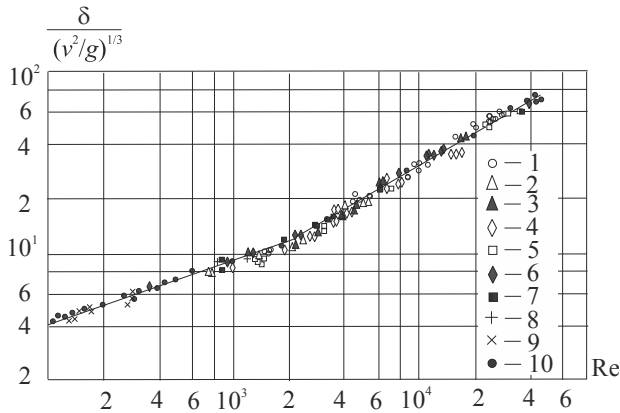
Товщина плівки зв'язана з об'ємною щільністю зрошення  $\Gamma_v$  балансовим співвідношенням

$$\delta = \Gamma_v / \bar{u}. \quad (7)$$

Оскільки в (5) фігурує товщина плівки, рівняння (5), (6), (7) розв'язують графічно або методом ітерації. Інтегрування (6) зручно здійснювати в прикладному пакеті Mathcad.

Основна маса експериментальних даних з товщини плівки отримана за умов вільного стікання модельних рідин різної в'язкості [2] (рис. 2).

Порівнюючи розраховані з (5), (6), (7) значення товщин плівки з експериментальними, наведеними на рис. 2, отримаємо значення невідомої функції  $\varepsilon$  в рівнянні (1), за якої має місце їх відповідність. Виявлено, що зі зростанням витрати рідини значення  $\varepsilon$  не залишається постійним, а змінюється за законом експоненти від 0 в ламінарному режимі до максимального 0,328 в режимі розвинутої турбулентності. При нескінченному зростанні щільності зрошення величина  $\varepsilon$  асимптотично наближується до 0,39, як у рівнянні М.Д. Мілліонщикова.



**Рис. 2.** Залежність середньої товщини плівки  $\delta$  від числа  $Re$  при вільному стіканні води й водо-гліцеринових сумішей по вертикальній поверхні: 1 —  $\nu = 0,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ; 2 —  $1,73 \cdot 10^{-6}$ ; 3 —  $1,97 \cdot 10^{-6}$ ; 4 —  $3,0 \cdot 10^{-6}$ ; 5 —  $3,8 \cdot 10^{-6}$ ; 6 —  $7,24 \cdot 10^{-6}$ ; 7 —  $8,76 \cdot 10^{-6}$ ; 8 —  $11,51 \cdot 10^{-6}$ ; 9 —  $32,0 \cdot 10^{-6}$ ; 10 — вода, гас, толуол ( $\nu = 0,6 \cdot 10^{-6} \dots 32,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ )

Отримана функція для  $\epsilon$  має такий вигляд:

$$\epsilon = 0,328 \left[ 1 - 2,3 \exp\left(-5 \cdot 10^{-4} Re^{0,98}\right) \right] \text{ при } Re \geq 1940 \quad (8)$$

$$\epsilon = 0 \text{ при } Re \leq 1940,$$

де  $Re = \frac{4\Gamma_v}{\nu}$ .

Виникає питання адекватності отриманого в умовах вільного стікання співвідношення (8) умовам руху плівки з міжфазовою дотичною напругою.

Розрахунок коефіцієнта міжфазового тертя можна виконати, скориставшись отриманим авторами співвідношенням для  $\xi$  [3], яке узагальнює результати досліджень втрат тиску від тертя в паро- і газо-рідинних потоках води та цукрових розчинів у трубах діаметрами від 13 до 55 мм:

$$\xi = \xi_1 + 627 \left( \frac{d_o}{d} \right) \left[ Fr_2^{1,26} \exp \left( 1,25 \cdot 10^{-2} K_\delta^{1,5} \left( Fr_2 - H^{1,1} \sqrt{\frac{d}{d_o}} \right) \right)^{-1} - Fr_2^{1,26} \right]^{-1}, \quad (9)$$

де  $\xi_1 = \xi_c + 3 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-2} K_\delta$  — коефіцієнт гідравлічного тертя для першої зони — режиму слабкої взаємодії;  $\xi_c = \frac{0,316}{Re_2^{0,25}}$  — коефіцієнт гідравлічного

тертя на суху стінку;  $K_\delta = \sqrt[6]{\frac{\Gamma_v^3 \nu}{g^2}} \sqrt{\frac{g \rho}{\sigma}}$ ;  $H = \sqrt{\frac{\rho \sigma}{g d^2 \rho_2^2}}$ ;  $Fr_2 = \frac{u_2^2}{g d}$ ;

$Re_2 = \frac{u_2 d \rho_2}{\mu_2}$ ;  $d_o = 0,013 \text{ м}$ ;  $u_2$  — приведена до перерізу труби швидкість

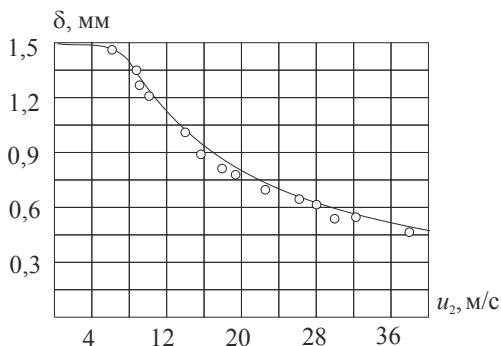
пари;  $\rho_2$  — густина пари;  $\mu_2$  — в'язкість пари;  $d$  — діаметр труби;  $\sigma$  — поверхневий натяг.

Перехід з першої до другої зони здійснюється за умови:

$$Fr_2 - H^{1,1} \sqrt{\frac{d}{d_0}} \geq 0.$$

Дотична міжфазова напруга розраховується як  $\tau_i = \xi \rho_2 \frac{u_2^2}{8}$ .

Порівняння результатів розрахованої за співвідношеннями (5), (6), (7), (8), (9) середньої товщини плівки з експериментальними даними [2] при зміні швидкості повітря від 0 до 40 м/с наведено на рис. 3.



**Рис. 3.** Порівняння розрахункової товщини плівки води з експериментальними даними залежно від швидкості повітря в режимі розвинутої турбулентності: точки — дані [2] для води температурою 25 °С,  $d = 25$  мм; витрата води  $\Gamma_v = 3 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>/с,  $Re = 13200$ ; лінія — розрахунок за співвідношеннями (5), (6), (7), (8), (9)

Як видно з рис. 3, співвідношення (5), (6), (7), (8), (9) універсальні як для режиму вільного стікання (при  $\tau_i = 0$ ), так і за наявності міжфазової дотичної напруги, викликаного рухомим газовим ядром потоку.

За відсутності міжфазового тертя ( $\tau_i = 0$ ) середня товщина турбулентної плівки в області  $Re \geq 2060$  достатньо точно відповідає закону  $1/7$  профілю швидкості і дорівнює

$$\delta = 0,135 \left( \frac{v^2}{g} \right)^{1/3} Re^{7/12}.$$

При  $Re \leq 2060$  та  $\tau_i = 0$  відповідність експериментальним даним досягається при використанні параболічного профілю швидкості, згідно з яким товщина плівки визначається як

$$\delta = \left( \frac{3\Gamma_v v}{g} \right)^{1/3}.$$

### Висновки

Процеси перенесення імпульсу в турбулентних гравітаційно стікаючих плівках відповідають моделі турбулентності М.Д. Мілліонщикова з коефіцієнтом

при вершині параболи 0,39 лише в області витрат рідини, що на порядок вище витрат, характерних для роботи випарних апаратів цукрової промисловості.

Відповідність розрахунковим експериментальних значень середньої товщини плівки в діапазоні витрат рідини, характерних для роботи випарних апаратів, досягається введенням в рівняння М.Д. Мілліонщикова додаткової функції (8), яка корегує чисельне значення коефіцієнта при вершині параболи таким чином, щоб розрахункові значення середньої товщини плівки відповідали експериментальним.

Отримані співвідношення для товщини плівки справедливі як в умовах вільного стікання, так і в разі наявності міжфазового тертя в дослідженому діапазоні зміни витратних параметрів в усталених низхідних кільцевих потоках.

### **Література**

1. Ганчев Б.Г. Охлаждение элементов ядерных реакторов стекающими пленками [Текст] / Б.Г. Ганчев. — Москва: Энергоатомиздат, 1987. — 192 с.
2. Кулов Н.Н. Гидродинамика и массообмен в нисходящих двухфазных пленочно-дисперсных потоках: дис. ... докт. техн. наук / Н.Н. Кулов. — Москва, 1984. — 409 с.
3. Петренко В.П. Міжфазне тертя на поверхні пристінної плівки води та киплячих цукрових розчинів в режимі стікання по вертикальній поверхні / В.П. Петренко, М.О. Прядко, О.М. Рябчук // Цукор України. — 2013. — № 7—8(91—92). — С. 21—24.
4. Рябчук О.М. Теплогідродинамічні процеси пароутворення в низхідних кільцевих потоках цукрових розчинів [Текст]: дис. ... канд. техн. наук / О.М. Рябчук. — Київ, 2013. — 162 с.
5. Миллионщиков М.Д. Основные закономерности турбулентного течения в пристенных слоях / М.Д. Миллионщиков // Атомная энергия. — 1970. — Т. 28, вып. 4. — С. 317—320.

## **ТОЛЩИНА ПЛЕНКИ В НИСХОДЯЩИХ КОЛЬЦЕВЫХ ПОТОКАХ С МЕЖФАЗНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ**

**В.П. Петренко, Н.А. Прядко, А.Н. Рябчук**

*Национальный университет пищевых технологий*

*В статье представлены результаты анализа гидродинамических процессов в стабильных нисходящих кольцевых потоках с межфазным касательным напряжением, полученные при решении дифференциального уравнения сохранения импульса в пленке жидкости, стекающей по вертикальной поверхности. Моделирование процессов переноса в турбулентном режиме движения пленки осуществлено на основе модели турбулентности М.Д. Миллионщикова, модифицированной заменой постоянного коэффициента при вершине параболы на экспоненциальную функцию от расходных характеристик потока, устанавливающей соответствие экспериментальным данным результатов расчета согласно принятой модели турбулентности. Приведены соотношения для расчета средней толщины пленки в ламинарном и турбулентном режимах движения воды и вязких жидкостей, вязкость которых изменялась на два порядка как в режиме свободного течения, так и при наличии межфазного трения между поверхностью пленки и газовым потоком.*

**Ключевые слова:** *пленка, турбулентность, межфазное трение, профиль скорости, плотность орошения.*