УДК 538.3

DETERMINING THE ATTITUDE OF THE HARMONIC FIELD BY ITS PREPLANNED FLOW IN THE SPHERICAL SEGMENT

M. Martynenko
National University of Food Technologies

Key words:
Harmonic function
Dual equation
Fredholm equation

Article history:
Received 15.02.2016
Received in revised form 04.03.2016
Accepted 18.03.2016

Corresponding author:
M. Martynenko
E-mail:
npnuht@ukr.net

ABSTRACT

The article presents the axisymmetric harmonic function that is generated by its known flow on the area of a spherical surface. After decomposition of the potential function and its flow as a series in Legendre polynomials and subordination of physical fields to the correct boundary conditions, the task has been carried into the dual system of equations. This system is solved using the integrated operator of unknown auxiliary function. It is shown that it satisfies the integral-differential equation of Fredholm of the second kind. It is proved that all the characteristics of harmonic fields are obtained in explicit analytic form through the solution of this equation. It is found that the potential field flow near the boundary line of the spherical segment has a root singularity.

ЗНАХОДЖЕННЯ ГАРМОНІЧНОГО ПОЛЯ В ПРОСТОРІ ЗА ЙОГО ЗАДАНИМ ПОТОКОМ НА СФЕРИЧНОМУ СЕГМЕНТІ

М.А. Мартиненко
Національний університет харчових технологій

У статті знайдено осесиметричну гармонічну функцію, яка породжена її потоком на частині сферичної поверхні. Після розкладу потенціальної функції і її потоку у вигляді рядів по поліномам Лежандра і підпорядкування фізичних полів коректним граничним умовам задачу приведено до системи дуальних суматорних рівнянь. Її розв'язок шукається через інтегральний оператор від допоміжної невідомої функції. Показано, що функція задовольняє інтегро-диференціальне рівняння Фредгольма другого роду. Доведено, що всі характеристики гармонічного поля розраховуються через отриманий розв'язок цього рівняння в явному аналітичному вигляді. Виявлено, що потік потенціального поля в околі граничної лінії сферичного сегмента має кореневу сингулярність.

Ключові слова: *гармонічна функція, дуальні рівняння, рівняння Фредгольма.*

Постановка проблеми. Класична математична фізика розглядає три основні задачі: задачу Діріхле, задачу Неймана і мішану задачу. Об'єднує їх те, що в них розшукується гармонічна функція в області G за відомими її значенням або потоком на повній (замкненій) поверхні S, яка обмежує область G. У пропонованій статті шукається потенціальна функція за її потоком на незамкненій криволінійній поверхні *S*. Суттєва відмінність цієї задачі від класичних полягає в тому, що в ній граничні значення гармонічного поля задаються лише на поверхневому сегменті.

Знаходження гармонічної функції здійснюється на основі останніх досліджень задач математичної фізики [1] і на розвиненому методі розв'язання системи дуальних інтегральних (суматорних) рівнянь [2].

Метою дослідження є побудова аналітичних методів для знаходження потенціального поля в просторі за відомим його потоком на поверхневому криволінійному сегменті. Результати розв'язання цієї проблеми складають основу для аналізу фізичних процесів, наприклад, у задачах гідроакустики, теплопровідності, електростатики.

Виклад основних результатів дослідження. Розв'язана задача про знаходження осесиметричної потенціальної функції в просторі за заданим її потоком на поверхневому сферичному сегменті. Розв'язок задачі отримано в явному аналітичному вигляді.

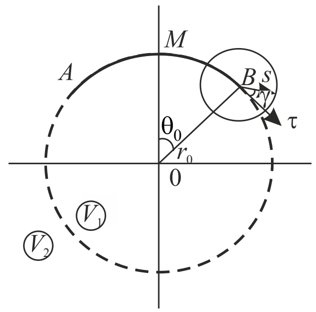

Рис. 1. Геометрія сферичного сегмента

Постановка задачі. Нехай тривимірне тіло V містить сферичний сегмент S $(r = r_0, 0 \le \theta \le \theta_0$, $\varphi = \varphi; r, \theta, \varphi$ — сферичні координати) і на ньому заданий осесиметричний потік $\Pi(\theta)$ потенціального поля. У випадку осьової симетрії гармонічна функція задовольняє рівняння Лапласа [1]:

$$\Delta F(r,\theta) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial F}{\partial\theta}\right) = 0\,. \quad (1)$$

Розіб'ємо простір на зовнішню область $V_1(r > r_0)$ і внутрішню $V_2(r < r_0)$ так, як показано на рис.1. Розв'язок рівняння Лапласа (1) в областях V_1 і V_2 запишемо у вигляді рядів по поліномам Лежандра [1]:

$$F_1(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n P_n(\cos\theta), \ (0 \le r \le r_0)\,; \quad (2)$$

$$F_2(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n r^{-n-1} P_n(\cos\theta), \ (r \ge r_0),$$

де $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ — послідовність невідомих коефіцієнтів; $P_n(\cos\theta)$ — поліноми Лежандра [3].

Потік гармонічного поля знаходиться через його похідну по нормалі до сферичної поверхні і має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n N r^{n-1} P_n(\cos\theta), (0 \le r \le r_0); \\ \frac{\partial F_2}{\partial n} &= -\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (n+1) r^{-n-2} P_n(\cos\theta), (r > r_0). \end{aligned} \quad (3)$$

Таким чином, проблема зведена до знаходження послідовності невідомих коефіцієнтів $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$.

Розв'язування задачі. З умови неперервності гармонічної функції і її потоку на поверхні сфери поза розрізом $(r = r_0; \theta_0 < \theta \le \pi)$ і властивості ортогональності поліномів Лежандра на проміжку $[0,\pi]$ була отримана така залежність між коефіцієнтами:

$$\beta_n = -\frac{n}{n+1}\alpha_n r_0^{2n+1}. \tag{4}$$

Якщо врахувати, що потік на поверхні S дорівнює $\Pi(\theta)$, то прийдемо до такої системи дуальних суматорних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n n r_0^n P_n(\cos\theta) = \Pi(\theta); (0 \le \theta < \theta_0) \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} \alpha_n r_0^n P_n(\cos\theta) = 0; (\theta_0 \le \theta \le \pi). \end{cases} \tag{5}$$

Розв'язок системи (5) шукаємо у вигляді спеціально підібраного інтегрального оператора [2]:

$$\alpha_n r_0^n \frac{2n+1}{n+1} = \int_0^{\theta_0} f(t)\sin\left(n + 1/2\right) t\,dt = A_n, \tag{6}$$

де $f(t)$ — нова, невідома допоміжна функція, неперервна разом зі своєю похідною при $0 \le t \le \theta_0$.

Якщо скористатися розривною сумою [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t = \frac{H(t-0)}{\sqrt{2\cos\theta - 2\cos t}}, \tag{7}$$

де $H(t-0)$ — функція Хевісайда [3], то переконаємося, що друге рівняння системи (5) підстановкою (6) задовольняється тотожньо. Підставляючи в перше рівняння системи (5) замість поліномів Лежандра їх інтегральне представлення [3]

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta} \frac{\cos(n+0,5)x}{\sqrt{2\cos x - 2\cos\theta}} \tag{8}$$

і змінюючи порядки інтегрування, прийдемо до такого рівняння Абеля [4]:

$$\int_0^{\theta} \frac{1}{\sqrt{2\cos x - 2\cos\theta}} \left\{ \int_0^{\theta_0} f(t) K(t,x)\,dt \right\} dx = \Pi(\theta), \tag{9}$$

де

$$K(t,x) = -\frac{1}{2}\delta_t'(t-x) - \frac{1}{8}H(t-x). \tag{10}$$

При отриманні виразу (10) буди використані відомі і знайдені суми в класі узагальнених функцій [5]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n+0,5)t\cos(n+0,5)x}{n+0,5}=\frac{\pi}{2}H(t-x);$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+0,5)\sin(n+0,5)t\cos(n+0,5)x=-\frac{\pi}{2}\delta_t'(t-x), \tag{11}$$

де $\delta(t-x)$ — дельт-функція Дірака [5].

Узагальнюючи розв'язок рівняння Абеля до рівності (9), отримаємо [2]:

$$\int_0^{\theta}\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{2\cos x-2\cos\theta}}=f(\theta);\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{f(s)\sin sds}{\sqrt{2\cos s-2\cos x}}. \tag{12}$$

На підставі (12), (11) із (9) одержано таке інтегро-диференціальне рівняння:

$$f'(x)-\frac{1}{4}\int_x^{\theta_0}f(t)dt=G(x);$$
$$G(x)=\frac{4}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\Pi(s)\sin sds}{2\cos s-2\cos x}. \tag{13}$$

Диференціюючи рівняння (13), отримаємо:

$$f''(x)+\frac{1}{4}f(x)=G'(x);\ f(0)=0;\ f'(\theta_0)=G(\theta_0). \tag{14}$$

Розв'язок рівняння (14) знаходиться в явному аналітичному вигляді, а коефіцієнти α_n,β_n визначаються рівностями (6) і (4).

Лекальний аналіз гармонічного поля.

Аналіз потоку показує, що в околі граничного кола поверхні S він приймає сингулярне значення, тому безпосереднє обчислення числових даних фізичних характеристик в околі лінії сингулярності неможливе і тільки їх асимптотичний аналіз дає змогу прогнозувати поведінку потенціального поля біля особливої лінії.

Введемо полярну систему координат s, γ так, як показано на рис. 1. Для малих значень s мають місце такі наближення:

$$r-r_0\approx s\sin\gamma;r_0(\theta-\theta_0)\approx s\cos\gamma;\frac{r_0}{r^{-1}}=h\approx sr_0^{-1}\cdot\sin\gamma;$$
$$\left(1+h^2\right)\cos\theta_0-2h\cos\theta\pm i\left(1-h^2\right)\sin\theta_0\approx 2sr_0^{-1}\sin\theta_0 e^{\pm i\gamma} \tag{15}$$
$$\left(1+h^2\right)\sin\theta_0\pm i\left(1-h^2\right)\cos\theta_0\approx 2\sin\theta_0.$$

На основі точних значень сум [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty}h^{n+1/2}P_n(\cos\theta)\cos(n+0,5)t=\frac{1}{2}h^{0,5}\left(q^{-0,5}+\overline{q}^{-0,5}\right);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^{n+0,5} P_n(\cos\theta) e^{i(n+0,5)\theta_0} \approx \frac{e^{0,5i\gamma}}{\sqrt{2s\sin\theta_0}};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^{n+\gamma_2} P_n(\cos\theta)\sin(n+0,5)t = \frac{1}{2i} h^{0,5}\left(q^{-0,5} - \overline{q}^{-0,5}\right); \tag{16}$$

$$q = \left(1+h^2\right)\cos t - 2h\cos\theta - i\left(1-h^2\right)\sin t$$

$$\overline{q} = \left(1+h^2\right)\cos t - 2h\cos\theta + i\left(1-h^2\right)\sin t$$

і асимптотичних формул (15) було показано, що в околі граничного кола сферичного сегмента мають місце такі наближення:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^{n+0,5} P_n(\cos\theta) e^{i(n+0,5)\theta_0} \approx \frac{e^{0,5i\gamma}}{\sqrt{2s\sin\theta_0}}. \tag{17}$$

Інтегральний оператор (6) запишемо у такому вигляді:

$$A_n = -\frac{f(\theta_0)}{n+0,5}\cos(n+0,5)\theta_0 + \int_0^{\theta_0} f'(t)\frac{\cos(n+0,5)t}{n+0,5}dt. \tag{18}$$

Зважаючи на умову, що функція $f(x)$ неперервна й обмежена, перший доданок при $n\to\infty$ має порядок $0\left(n^{-1}\right)$, а другий — $0\left(n^{-2}\right)$. Цей фактор враховуватимемо при асимптотичному аналізі характеристик гармонічного поля.

Із (3), (6) отримаємо:

$$\frac{\partial F_2}{\partial n} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2n+1}A_n P_n(\cos\theta); r > r_0. \tag{19}$$

Аналіз (19) показує, що він є розбіжним при $\theta \sim \theta_0, r \sim r_0$. Для знаходження асимптотичного виразу ряду (19) скористаємося (16), (17), (18) і після відповідних аналітичних перетворень отримаємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(\cos\theta)\cos(n+0,5)\theta_0 \approx \frac{\sqrt{r_0}}{\sqrt{2s\sin\theta_0}}\cos\frac{\gamma}{2}. \tag{20}$$

Наближення (20) надає можливість знайти асимптотичну поведінку потоку (19) в області V_2:

$$\frac{\partial F_2}{\partial n} \approx -\frac{f(\theta_0)}{2r}\frac{r_0}{r}\sum_{n=0}^{\infty} h^n \frac{(n+0,5)^2 - 0,25}{(n+0,5)^2} P_n(\cos\theta)\cos(n+0,5)\theta_0 \approx$$
$$\approx -\frac{f(\theta_0)}{2\sqrt{r_0}}\frac{\cos 0,5\gamma}{\sqrt{2\sin\theta_0}}. \tag{21}$$

Отже, тепловий потік в околі граничного кола сферичного розрізу має кореневу особливість. За аналогією, наприклад, із задачами теорії пружності для тіл із тріщинами введемо коефіцієнт інтенсивності теплового потоку K_{Π}:

$$K_{\Pi} = -\frac{f(\theta_0)}{2\sqrt{r_0 \sin\theta_0}}. \tag{22}$$

З урахуванням (22) асимптотична формула для потоку матиме вигляд:

$$\frac{\partial F_2}{\partial n} \approx K_{\Pi} \frac{\cos 05\gamma}{\sqrt{2s}}. \tag{23}$$

Формула (23) показує, що максимальне асимптотичне значення потоку досягається при $\gamma = 0$, а мінімальне — на поверхні сферичного сегмента $(\gamma = \pi)$. Це відповідає фізичній суті задачі. Коефіцієнт K_n є визначальним, наприклад. при аналізі температури в тілі, яке містить термоізольований поверхневий криволінійний сегмент.

Приклад. Нехай потік температурного поля на сферичному сегменті $S(r = r_0;\ 0 \le \theta \le \theta_0)$ дорівнює [ε]:

$$\prod(0) = \frac{q}{\lambda}\cos\theta \quad (0 \le \theta \le \theta_0), \tag{24}$$

де q — характеристика теплового потоку; λ — коефіцієнт теплопровідності тіла.

Розв'язок рівняння (14) знаходиться через тригонометричні функції:

$$f(x) = -\frac{q}{\pi\lambda}\left(3\sin\frac{3}{2}x - \cos\frac{3}{2}\theta_0 \sec\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{x}{2}\right). \tag{25}$$

Шляхом елементарного інтегрування оператора (ε) знаходиться система коефіцієнтів $\{\alpha_n\}$, а з рівності (4) — $\{\beta_n\}$. Гармонічна функція і її потік в областях V_1 і V_2 визначається формулами (2), (3).

Зауважимо, що в тому випадку, якщо сферичний сегмент продовжити до повної сфери $(\theta_0 = \pi)$, то із розглянутої задачі отримаємо розв'язок зовнішньої і внутрішньої задачі Неймана для поверхні сфери.

Висновки

1. У статті запропонований аналітичний метод знаходження гармонічної функції в просторі за відомим її потоком на поверхневому сферичному сегменті.
2. Відмічено, що зовнішня і внутрішня задача Неймана для поверхні сфери є частинним випадком розглянутої задачі.
3. Задача зведена до інтегро-диференціального рівняння Фредгольма другого роду. Показано, що всі характеристики потенціального поля знаходяться через його аналітичний розв'язок.
4. Проаналізовано локальне гармонічне поле в околі граничної лінії поверхневого сегмента і показано, що потік при наближенні до неї має кореневу сингулярність.

5. Запропонований метод може бути використаний при дослідженні динамічних гармонічних полів.

Література

1. *Мартиненко М.А.* Математична фізика: підручник / М.А. Мартиненко, В.П. Легеза, Ю.І. Іванова. — Київ: тов. ФОП Колісник К.І., 2009. — 480 с.
2. *Мартиненко М.А.* Мішані просторові задачі математичної теорії пружності: монографія / М.А. Мартиненко. — Київ: Освіта України, 2012. — 376 с.
3. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций / Е.В. Гобсон. — Москва: Издательство иностранной литературы, 1952. — 472 с.
4. *Забрайко П.П.* Интегральные уравнения / П.П. Забрайко. — Москва: Наука, 1968. — 488 с.
5. *Гельфанд И.М.* Обобщенные функции и действия над ними / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. — Москва: Физматгиз. 1968. — 439 с.
6. *Коваленко А.Д.* Термоупругость / А.Д. Коваленко. — Киев: Высшая школа, 1975. — 216 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ПО ЕГО ЗАДАННОМУ ПОТОКУ НА СФЕРИЧЕСКОМ СЕГМЕНТЕ

М.А. Мартыненко
Национальный университет пищевых технологий

В статье определена осесимметрическая гармоническая функция, которая порождена ее потоком на части сферической поверхности. После разложения потенциальной функции и ее потока в виде рядов по полиномам Лежандра и подчинения физических полей корректным граничным условиям задача приведена к системе дуальных сумматорных уравнений. Ее решение находится через интегральный оператор от вспомогательной неизвестной функции. Показано, что функция удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению Фредгольма второго рода. Доказано, что все характеристики гармонического поля находятся из полученного решения этого уравнения в явном аналитическом виде. Выявлено, что поток потенциального поля в окрестности граничной линии сферического сегмента имеет корневую сингулярность.

Ключевые слова: *гармоническая функция, дуальные уравнения, уравнения Фредгольма.*