

MATHEMATICAL MODELLING OF HEATING THE DOUGH PIECES OF CYLINDRICAL SHAPE

M. Desyk, Yu. Telychkun, I. Lytovchenko, V. Telychkun

National University of Food Technologies

Key words:

Mathematical model

Heating

Bread

Heat-mass transfer

Article history:

Received 18.04.2016

Received in revised form

01.05.2016

Accepted 20.05.2016

Corresponding author:

M. Desyk

E-mail:

npuht@ukr.net

ABSTRACT

Paper presents the modelling of heating the cylindrical dough pieces with dimensions which are typical for the transition zone from subtle to massive bodies taking into account the efficient thermal characteristics of the blanks, which are presented as experimental dependences. They allow for mass transfer processes at the heating of products, namely the external mass transfer processes: the evaporation of moisture from the surface of the blank into the working environment with the formation of dewatered layer and the internal mass-transfer processes, the movement of moisture inside of the blank as a pair with its subsequent condensation and as fluid. The experimental results and the proposed mathematical model confirm the feasibility of its use for the calculation of the bread heating process.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОГРІВУ ТІСОВОЇ ЗАГОТОВКИ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ФОРМИ

М.Г. Десик, Ю.С. Теличкун, І.М. Литовченко, В.І. Теличкун

Національний університет харчових технологій

У статті представлено результати моделювання процесу прогріву циліндричних тістових заготовок з розмірами, характерними для перехідної області від тонких до масивних тіл, з урахуванням ефективних теплофізичних характеристик заготовок у вигляді залежностей, отриманих експериментальним шляхом. Залежності враховують масообмінні процеси при прогріванні виробів, а саме: зовнішні масообмінні процеси при випаровуванні вологи з поверхні заготовки в робоче середовище з утворенням зневодненого шару та внутрішні масообмінні процеси при переміщенні вологи всередину заготовки як у вигляді пари з подальшою її конденсацією, так і у вигляді рідини. Результати експериментальних досліджень і запропонованої математичної моделі підтверджують доцільність її використання для розрахунку процесу прогріву тіста-хліба.

Ключові слова: *математична модель, прогрівання, хліб, тепломасообмін.*

Постановка проблеми. На хлібопекарських підприємствах випікання хліба відбувається в печах різної конструкції, принципу роботи, способу обігріву та можливих режимів роботи. Це відповідним чином відображається на якості хлібобулочних виробів. У даний час висока якість хлібобулочної продукції забезпечується не тільки практичними знаннями і великим досвідом фахівців, а й теоретичним знаннями, що необхідні для детального вивчення і моделювання процесів, які відбуваються у заготовці при випіканні, що важливо для подальшого розвитку пічної техніки. Для цього успішно використовуються інструменти як фізичного моделювання, так і методи обчислювальної гідрогазодинаміки [1—4]. У літературі описані математичні моделі випікання масивних виробів (хліб, булки) і тонких виробів (лаваш, коржі). При цьому відсутні моделі прогріву тіл, які відносяться до перехідної області від тонких до масивних тіл [5]. Це поширений клас виробів постійного попиту, таких як хлібні палички, заготовки для сухариків, бублики, сушки.

У пропонованому дослідженні вперше представлені результати моделювання процесу прогріву циліндричних тістових заготовок з розмірами, характерними для перехідної області.

Мета статті. За допомогою методів гідрогазодинаміки провести моделювання процесу прогрівання тіл, які відносяться до перехідної області від тонких до масивних тіл, для комплексного дослідження процесу випікання за одночасної зміни граничних умов і вхідних параметрів.

Викладення основних результатів дослідження. При випіканні хлібобулочних виробів у більшості випадків процес теплообміну здійснюється випромінюванням, конвекцією і теплопровідністю, але домінуюча кількість теплоти передається випромінюванням.

При моделюванні заготовок циліндричної форми, діаметр яких значно менший за їхню довжину ($d = 0,015 \dots 0,03$ м), ці вироби можна розглядати як необмежений циліндр. Прогрів такого циліндра має свої особливості, які обумовлені його формою, розміром і теплофізичними властивостями.

У цьому випадку значення критерію Фур'є [6, 7] значно перевищує значення критерію Фур'є для дрібноштучних виробів. Для мінімального значення діаметра ($d = 0,015$ м.):

$$Fo = \frac{a\tau}{R^2} = \frac{22 \cdot 10^{-8} \cdot 60}{0,0075^2} = 0,2347, \quad (1)$$

де a — коефіцієнт температуропровідності, $\text{м}^2/\text{с}$; R — визначальний розмір, м; τ — час, с. Критерій Фур'є в даному контексті відображає безрозмірнісний час.

На початку процесу випікання тістових заготовок з розмірами, характерними для досліджуваної області, не можна розглядати їх як напівобмежене тіло і нехтувати підвищенням температури їхнього центру, як це зазвичай приймається при випіканні хліба.

При нестационарному процесі переносу теплоти в необмеженому циліндрі радіусом R тепло передається до поверхні циліндричної заготовки. При цьому приймається умова рівномірного початкового розподілу температури.

Прогрів циліндричних заготовок описується диференціальним рівнянням теплопровідності в циліндричних координатах:

$$\frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left[\frac{\partial^2 t(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \right]; \quad \tau > 0; \quad 0 < r < R, \quad (2)$$

де r — поточний радіус, м; τ — поточний час, с.

При вирішенні завдання прогріву досліджуваної тістової заготовки має місце рівномірний початковий розподіл температури заготовки. Її приймаємо як початкову температуру. Тоді граничні умови формулюються так:

$$t(r, 0) = const; \quad (3)$$

$$\frac{\partial t(0, \tau)}{\partial r} = 0; \quad t(0, \tau) \neq \infty; \quad (4)$$

$$\lambda \frac{\partial t(R, \tau)}{\partial r} = \alpha(t_c(\tau) - t(R, \tau)); \quad (5)$$

$$t(r, \tau) = f(\tau),$$

$$\tau > 0, \quad (6)$$

$$0 \leq r \leq R$$

де $t(r, \tau)$ — температурне поле циліндричної заготовки, К; λ — коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м²·К); a — коефіцієнт температуропровідності, м²/с; ρ — густина, кг/м³; c — питома теплоємність, Дж/(кг·К); α — коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К).

Виходячи з граничних умов (3, 4, 5, 6), а також ввівши безрозмірні величини $X = \frac{r}{R}$, $Fo = \frac{a \cdot \tau}{R^2}$, отримаємо таке рівняння і граничні умови:

$$\frac{\partial T(X, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T(X, Fo)}{\partial X^2} + \frac{1}{X} \cdot \frac{\partial T(X, Fo)}{\partial X}; \quad (7)$$

$$T(X, 0) = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial T(0, Fo)}{\partial X} = 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial T(1, Fo)}{\partial X} = -Bi(T(1, Fo) - \theta(Fo)), \quad (10)$$

де $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$ — критерий Біо.

Для розрахунку представленої моделі використовуємо комп'ютерний програмний комплекс FlowVision, що призначений для моделювання гідроаеродинамічних процесів в штучних і природних об'єктах, а також для моделювання теплообміну шляхом конвекції і випромінювання.

У даному випадку використані математичні моделі розрахунку: «рідина, що мало стискається», «тверде тіло» і «сполучення».

Геометричні розміри робочої камери відповідають габаритним розмірам фізичної моделі. Теплофізичні характеристики середовища робочої камери характерні для повітря при заданій температурі.

Граничні умови враховують температуру середовища пекарної камери, що складає 190 °С, початкову температуру заготовки, що складає 30 °С.

В умовах моделювання беруть участь теплофізичні характеристики заготовок, отримані експериментальним шляхом [8—11]. Вони залежать від температури і враховують масообмінні процеси при прогріванні заготовок.

Ефективна теплопровідність тіста-хліба, Вт/(м·К):

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0,0068t + 0,339 & \text{при } t = 30 \div 70 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \frac{1}{(55 - 0,533t)^{\frac{1}{2,9}}} & \text{при } t = 70 \div 100 \text{ } ^\circ\text{C} \\ 0,055 & \text{при } t > 100 \text{ } ^\circ\text{C} \end{cases} \quad (11)$$

Ефективна теплоємність тіста-хліба, кДж/(кг·К):

$$c(t) = \begin{cases} 10^{0,1418 + 0,00694t} & \text{при } t = 30 \div 100 \text{ } ^\circ\text{C} \\ 2,2 & \text{при } t > 100 \text{ } ^\circ\text{C} \end{cases} \quad (12)$$

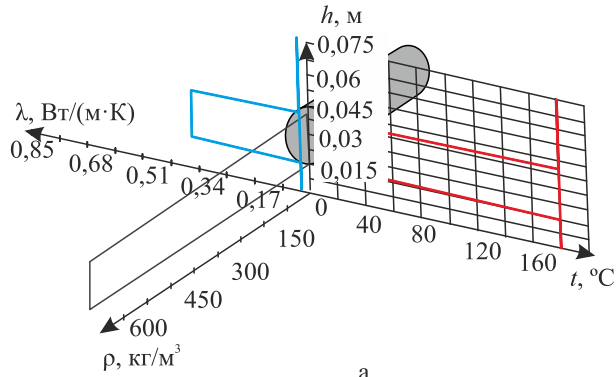
Ефективна густина тіста-хліба, кг/м³:

$$\rho(t) = \begin{cases} -6,875t + 952,5 & \text{при } t = 30 \div 70 \text{ } ^\circ\text{C} \\ 470 & \text{при } t > 70 \text{ } ^\circ\text{C} \end{cases} \quad (13)$$

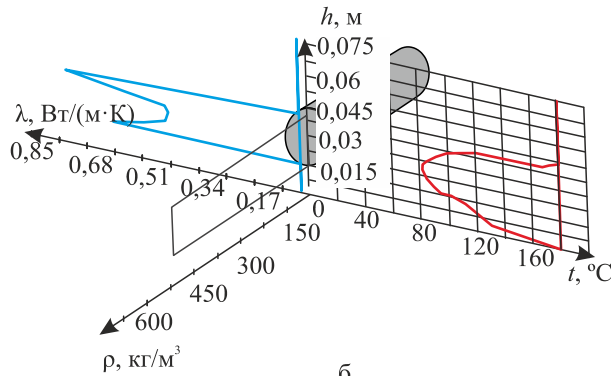
Результати обчислювального експерименту прогріву циліндричної заготовки діаметром 24 мм при температурі робочої камери 190 °С представлені на рис. 1. Для початкового моменту часу ($\tau = 0$ с) (рис. 1а) спостерігається рівномірний розподіл температури, густини і коефіцієнта теплопровідності в перетині тістової заготовки. Під дією теплового потоку відбувається прогрівання тістової заготовки з одночасною зміною її теплофізичних характеристик, які залежать від температури прогрітих шарів тіста.

Візуалізація процесу прогрівання тістової заготовки після 300 с прогріву відображена на рис. 1б. Процес прогріву закінчується, досягши центру заготовки при температурі 100 °С на 600 с (рис. 1в).

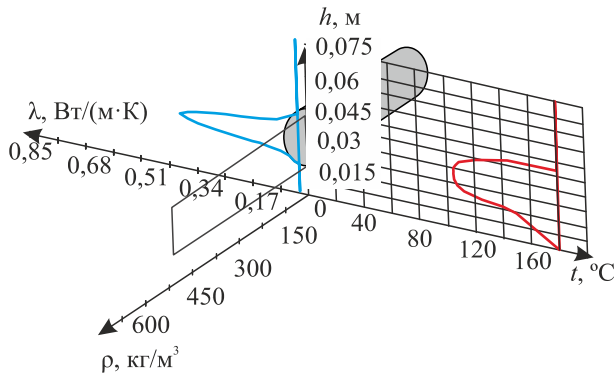
При порівнянні всіх трьох варіантів можна відзначити одночасну зміну всіх теплофізичних параметрів у процесі прогрівання тістової заготовки.



а



б



в

Рис. 1. Результати обчислювального експерименту прогрівання тістової заготовки в моменти часу τ , с: а — 0, б — 300, в — 600

На рис. 2 представлено температурне поле тіста-хліба, отримане шляхом фізичного експерименту. Поле показує зміну температури по шарах тістової заготовки протягом усього процесу випікання.

Порівняння результатів моделювання з даними, отриманими на фізичній моделі [12], дозволяє зробити висновок про адекватність математичної моделі

прогрівання тістової заготовки. Розбіжність результатів експериментальних і обчислювальних експериментів не перевищує 5 %.

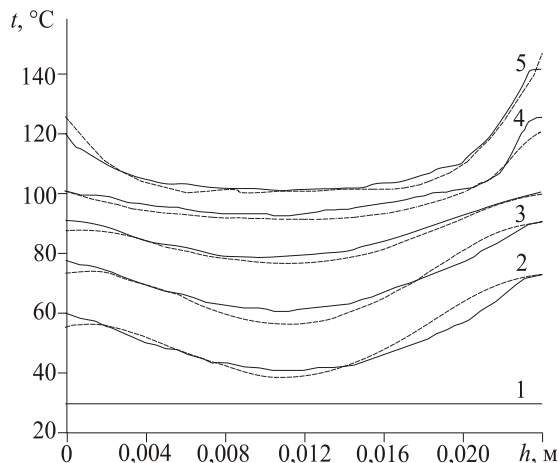


Рис. 2. Зміна температурного поля циліндричної заготовки діаметром 24 мм при її прогріванні в лабораторній печі в момент часу, с: 1 — 0, 2 — 120, 3 — 240, 4 — 360, 5 — 480, 6 — 600 (— — фізичний експеримент, — — — обчислювальний експеримент)

Таким чином, запропонована математична модель дозволяє приблизно провести розрахунок тривалості прогріву хліба залежно від температури середовища пекарної камери, теплофізичних параметрів і розмірів заготовок, що сприяє визначенню раціональних параметрів середовища пекарної камери при випіканні виробів різної форми і розмірів без проведення фізичного експерименту.

Висновки

Проведення математичного та комп'ютерного моделювання процесу прогрівання тістової заготовки надає можливість проводити комплексне дослідження процесу випікання в умовах одночасної зміни вхідних параметрів і граничних умов моделі.

Результати експериментальних досліджень і запропонованої математичної моделі, яка враховує ефективні теплофізичні характеристики, підтверджує доцільність використання математичної моделі для розрахунку процесу прогрівання тіста-хліба.

Литература

1. *Hasatani M.* Heat and mass transfer in bread during baking in an electric oven / M. Hasatani, N. Arai, H. Katsuyama, H. Harui, Y. Itaya, N. Fushida, N., Tatsukawa // In: Mujumdar, A.S., Filkova, I. (Eds.), *Drying*, vol. 91. Elsevier Science Publishers, Amsterdam. — P. 385—393.
2. *Zanoni B.* A study of the bread-baking process. I: a phenomenological model / B. Zanoni, C. Peri, S. Pierucci // *Journal of Food Engineering*. — 1993. — # 19. — P. 389—398.
3. *Zanoni B.* Study of the bread baking process. II: mathematical modelling / B. Zanoni, S. Pierucci, C. Peri // *Journal of Food Engineering*. — 1994. — # 23. — P. 321—336.

4. *Wagner M.J.* Water transport in bread during baking / M.J. Wagner, T. Lucas, D. Le Ray, G. Trustram // *Journal of Food Engineering*. — 2007. — # 78. — P. 1167—1173.
5. *Десик М.Г.* Дослідження впливу геометричних параметрів хліба на тепломасообмінні процеси / М.Г. Десик, В.І. Теличкун, Ю.С. Теличкун, А.І. Германчук // *Харчова промисловість*. — 2012. — № 12. — С. 203—207.
6. *Володарский А.В.* Исследование тепловых и гигротермических процессов при выпечке хлеба в тоннельных печах: автореф. дис. канд. техн. наук: 05.175 / А.В. Володарский. — Киев, 1969. — 31 с.
7. *Острик А.С.* Исследование процесса при выпечки при различных способах электрического обогрева: автореф. дис. канд. техн. наук: 05.175 / А.С. Острик. — Киев, 1971. — 32 с.
8. *Purlis E.* Bread baking as a moving boundary problem. Part 1: Mathematical modeling / E. Purlis, V.O. Salvadori // *Journal of Food Engineering*. — 2009. — # 91. — P. 428—433.
9. *Purlis E.* Bread baking as a moving boundary problem. Part 2: Model validation and numerical simulation / E. Purlis, V.O. Salvadori // *Journal of Food Engineering*. — 2009. — # 91 — P. 434—442.
10. *Mondal A.* Bread baking — a review / A. Mondal, A.K. Datta // *Journal of Food Engineering*. — 2008. — # 86 (4). — P. 465—474.
11. *Zhang J.* Mathematical modelling of bread baking process / J. Zhang, A.K. Datta // *Journal of Food Engineering*. — 2006. — # 75. — P. 78—89.
12. *Десик Н.Г.* Продолжительность процесса выпечки-сушки изделий цилиндрической формы из дрожжевого теста / Н.Г. Десик, В.И. Теличкун, Ю.С. Теличкун // *Инновационные технологии в производстве и переработке сельскохозяйственной продукции: доклады Международной научно-практической конференции: Минск, 14—15 апреля 2011 г.* — В 2 ч. — Ч. 2. — Минск: БГАТУ, 2011. — С. 105—107.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОГРЕВА ТЕСТОВОЙ ЗАГОТОВКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Н.Г. Десик, Ю.С. Теличкун, И.Н. Литовченко, В.И. Теличкун

Национальный университет пищевых технологий

В статье представлены результаты моделирования процесса прогрева цилиндрических тестовых заготовок с размерами, характерными для переходной области от тонких к массивным телам, с учетом эффективных теплофизических характеристик заготовок, которые имеют вид зависимостей, полученных экспериментальным путем. Зависимости учитывают массообменные процессы при прогреве изделий, а именно: внешние массообменные процессы при испарении влаги с поверхности заготовки в рабочую среду с образованием обезвоженного слоя и внутренние массообменные процессы при перемещении влаги внутрь заготовки как в виде пара с последующей ее конденсацией, так и в виде жидкости. Результаты экспериментальных исследований и предлагаемой математической модели подтверждают целесообразность её использования для расчета процесса прогрева теста-хлеба.

Ключевые слова: *математическая модель, прогревание, хлеб, тепломассообмен.*