УДК 517.98

METHODS OF THE HEAT CONDUCTION PROBLEMS SOLUTION BY MEANS OF TRANSITION TO THE CORRESPONDING DIFFERENCE EQUATIONS ON THE SEMIAXIS

V. Romanenko
National University of Food Technologies

Key words:
Linear difference equation
Banach space
Cauchy problem
Optimization

Article history:
Received 09.11.2016
Received in revised form 30.11.2016
Accepted 24.12.2016

Corresponding author:
V. Romanenko
E-mail:
npnuht@ukr.net

ABSTRACT

Sufficient conditions for the approximation to the restricted solution of the linear difference equation in the Banach space with unrestricted operator coefficients solutions of the corresponding Cauchy problems were obtained. The speed of the approximations was estimated. The application to the problems solution of the heat conduction of the previously obtained results for the linear difference equations with unrestricted operator coefficient and one initial condition is considered in the article. In addition, it was shown how the solution of the heat conduction equation can be accurately approximated to the solutions of the boundary value problems in which one end is fixed.

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕХОДУ ДО ВІДПОВІДНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ НА ПІВОСІ

В.М. Романенко
Національний університет харчових технологій

У статті отримано достатні умови наближення обмеженого розв'язку лінійного різницевого рівняння в банаховому просторі з необмеженими операторними коефіцієнтами розв'язками відповідних задач Коші. Оцінено швидкість наближення. Розглянуто застосування до розв'язків задач тепло-провідності попередньо одержаних результатів для лінійних різницевих рівнянь з необмеженим операторним коефіцієнтом та однією початковою умовою. Крім того, показано, як розв'язок рівняння теплопровідності можна з високою точністю наблизити розв'язками крайових задач, у яких один кінець фіксований.

Ключові слова: *лінійне різницеве рівняння, банахів простір, задача Коші, оптимізація.*

Постановка проблеми. Відомо, що диференціальні та різницеві рівняння адекватно описують поведінку багатьох реальних фізичних, соціальних, біологічних, економічних систем. При дослідженні таких рівнянь важливим є питання існування та єдиності обмежених розв'язків цих рівнянь. Але не завжди доцільно розв'язувати рівняння, часто потрібно знати лише скінченну кількість членів послідовності-розв'язку чи значення функції-розв'язку на скінченному відрізку, тому актуальним є завдання розв'язання відповідних крайових задач і дослідження зв'язку розв'язку крайової задачі та обмеженого на осі або півосі розв'язку диференціального чи різницевого рівняння.

Мета дослідження: показати можливість наближення обмеженого на півосі розв'язку рівняння теплопровідності, використовуючи перехід до різницевого аналогу, розв'язками відповідних різницевих крайових задач і знайти оцінку точності наближення.

Матеріали і методи. У дослідженні використовуються методи функціонального аналізу, методи теорії різницевих і диференціальних рівнянь в абстрактних просторах, методи теорії операторнозначних функцій комплексної змінної. Необхідні відомості з функціонального аналізу (неперервність і диференційованість за нормою функцій у банаховому просторі; інтеграл Рімана від банаховозначних функцій; означення і властивості інтеграла від операторнозначної функції вздовж кривої; властивості аналітичних операторнозначних функцій; властивості замкненого оператора; операторне числення для обмеженого оператора) містяться, наприклад, в [1—4].

Позначення й допоміжні відомості. Нехай $\mathbf{B}$ — комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\overline{0}$, $L(\mathrm{B})$ — банахів простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють з $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}$, I — одиничний, O — нульовий оператори в $\mathbf{B}$.

Розглянемо $A : D(A) \to \mathbf{B}$ — замкнений оператор з областю визначення $D(A) \subset \mathbf{B}$. Відомо, що спектр замкненого оператора є замкненою множиною. На відміну від випадку, коли A — обмежений оператор, спектр може бути обмеженою множиною, необмеженою множиною, порожньою множиною або навіть всією площиною. В подальшому виключимо останню можливість, тобто будемо вважати резольвентну множину $\rho(A)$ непорожньою, більше того, нехай

$$\rho(A) \ni 0. \tag{1}$$

Внаслідок (1) існує обернений оператор до A, позначимо його, як завжди, A^{-1}. Оператор A^{-1} визначає взаємно-однозначне відображення B на $D(A)$, тоді:

$$AA^{-1}x = x, \quad x \in \mathbf{B};$$
$$A^{-1}Ax = x, \quad x \in D(A).$$

Операторне числення для A будується за допомогою оператора A^{-1}.

Нехай $K = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ — комплексна сфера з її звичайною топологією. Визначимо гомеоморфізм $\Phi : K \to K$ такими рівностями:

$$\mu = \Phi(\lambda) = \tfrac{1}{\lambda},\ \Phi(\infty) = 0,\ \Phi(0) = \infty .$$

Теорема 1. Якщо відрізок $[-2;\ 2]$ міститься в резольвентній множині оператора A, то знайдуться такі залежні тільки від оператора A сталі $M > 0,\ R > 1$, що для довільної обмеженої в B послідовності $\{y(n) : n \in \mathbf{Z}\}$, відповідного їй єдиного розв’язку $\{x(n) : n \in \mathbf{Z}\}$ різницевого рівняння:

$$x(n+1) + x(n-1) = Ax(n) + y(n),\ n \in \mathbf{Z}, \tag{2}$$

довільних $\{p, q\} \subset \mathbf{N}$ та відповідного набору $\{a, b; y(-p+1), ..., y(q-1)\}$ єдиного розв’язку $\{u(n) : -p \le n \le q\}$ крайової різницевої задачі:

$$\begin{cases} u(n+1) + u(n-1) = Au(n) + y(n),\ \ -p+1 \le n \le q-1, \\ u(-p) = a,\ \ u(q) = b, \end{cases} \tag{3}$$

довільного натурального числа $k,\ 1 \le k \le p+q-1$ справджується така нерівність:

$$\left\| x(-p+k) - u(-p+k) \right\| \le M \left(\frac{\left\| x(q) - b \right\|}{R^{p+q-k}} + \frac{\left\| x(-p) - a \right\|}{R^{k}} \right).$$

Розглянемо лінійне різницеве рівняння другого порядку на півосі:

$$x(n+1) + x(n-1) = Ax(n) + y(n),\ n \ge 0. \tag{4}$$

У [6] наведені необхідні і достатні умови розв’язності лінійних різницевих рівнянь довільного порядку на півосі з обмеженим операторним коефіцієнтом. У застосуванні до рівняння (4) для обмежених операторних коефіцієнтів з тверджень у [6] випливає необхідна й достатня умова існування та єдиності обмеженого розв’язку $\{x(n) : n \ge -1\}$ рівняння (4) для довільної обмеженої послідовності $\{y(n) : n \ge 0\}$.

У [7] було доведено достатні умови існування і єдиності розв’язку рівняння (4) із заданим значенням $x(-1)$.

Теорема 3. Нехай спектр оператора A не перетинається з відрізком $[-2;\ 2]$. Тоді для довільної обмеженої послідовності $\{y(n) : n \ge 0\}$ і для довільного значення $c \in \mathbf{B}$ існує єдиний обмежений розв’язок $\{x(n) : n \ge -1\}$ крайової задачі з частиною початкових умов:

$$\begin{cases} x(n+1)+x(n-1)=Ax(n)+y(n),\ n\geq 0, \\ x(-1)=c. \end{cases} \tag{5}$$

У наступній теоремі [7] показано, що розв'язки розглянутих крайових задач апроксимують розв'язок на півосі, та наведено оцінку точності апроксимації.

Теорема 4. Нехай спектр оператора A не перетинається з відрізком $[-2;\ 2]$ і $\{x(n):n\geq -1\}$ — розв'язок рівняння (4). Тоді для будь-яких елементів a, b банахового простору $\mathbf{B}$ і кожного натурального числа q єдиний розв'язок крайової задачі:

$$\begin{cases} u(n+1)+u(n-1)=Au(n)+y(n),\ 0\leq n\leq q-1, \\ \qquad u(-1)=a,\ u(q)=b \end{cases}$$

задовольняє такі нерівності:

$$\left\|x(n)-u(n)\right\|\leq M\left(\frac{\left\|x(q)-b\right\|}{R^{q-n}}+\frac{\left\|x(-1)-a\right\|}{R^{n+1}}\right),\ 0\leq n\leq q-1.$$

Виклад основних результатів дослідження. Розглянемо при $\varepsilon>0$ різницево-диференціальне рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t,s)=\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}(t,s)-\varepsilon z(t,s)+f(t,s),\ s\in[0;\ 2\pi],\ t\geq 0$$

з крайовою умовою

$$z(0,s)=c(s),\ s\in[0;\ 2\pi],$$

де $\tau>0$ — крок дискретизації.

Розглянуте рівняння має різницево-диференціальний аналог рівняння відносно комплекснозначних функцій:

$$\frac{z(n+1,s)-z(n-1,s)}{2\tau}=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}(n,s)-\varepsilon z(n,s)+f(n,s),\ s\in[0;\ 2\pi],\ n\in\mathbf{N}$$

з крайовою умовою

$$z(0,s)=c(s),\ s\in[0;\ 2\pi],$$

де $c\in L_2([0;\ 2\pi])$, $f(n,\cdot)\in L_2([0;\ 2\pi])$, $n\in\mathbf{Z}$ — відомі функції.

Припустимо, що $\mathbf{B}=L_2([0;\ 2\pi])$, і перепишемо наше рівняння у вигляді (4), позначивши

$$x(n-1)(s) := i^n z(n,s),\ n \in \mathbf{N},\ s \in [0;\ 2\pi];$$

$$(Au)(s) = 2\tau i \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s) - 2\tau\varepsilon i u(s),\ s \in [0;\ 2\pi];$$

$$y(n-1)(s) := i^{n+1} f(n,s),\ s \in [0;\ 2\pi],\ n \in \mathbf{N}.$$

Спектр оператора A є зсуненим і домноженим на сталу спектром оператора другої похідної в $L_2([0;\ 2\pi])$ і, як можна показати безпосередньо, рівний

$$\sigma(A) = \{iz \mid z \in (-\infty, -2\tau\varepsilon]\}.$$

Застосуємо теорему 4. Умова $\sigma(A) \cap [-2;\ 2] = \varnothing$ виконується, бо спектр оператора A лежить на уявній осі на додатній відстані від початку координат. Згідно з теоремою, існують такі сталі $M_1 > 0,\ R_1 > 1$ для довільної послідовності визначених на $[0;\ 2\pi]$ вимірних функцій $\{y(n) : n \geq 0\}$, що задовольняє таку умову:

$$\sup_{k \in \mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} |y(k,s)|^2\, ds < +\infty,$$

довільної початкової функції $c \in L_2([0;\ 2\pi])$, відповідного єдиного обмеженого розв'язку $\{x(n) : n \geq 0\} \subset L_2([0;\ 2\pi])$ різницевого рівняння (4), довільного $q \in \mathbf{N}$ та відповідного набору

$$\{a, b; y(0), \ldots, y(q-1)\} \subset L_2([0;\ 2\pi])$$

єдиного розв'язку $\{u(n) : -1 \leq n \leq q\} \subset L_2([0;\ 2\pi])$ крайової різницевої задачі з умови теореми 4, довільного $n,\ 0 \leq n \leq q-1$, справджується така нерівність:

$$\sqrt{\int_0^{2\pi} |x(n,t) - u(n,t)|^2\, dt} \leq$$

$$\leq M_1 \left(\frac{1}{R_1^{q-n}} \sqrt{\int_0^{2\pi} |x(q,t) - b(t)|^2\, dt} + \frac{1}{R_1^{n}} \sqrt{\int_0^{2\pi} |x(-1,t) - a(t)|^2\, dt} \right).$$

З теореми 3 за теоремою Банаха про обернений оператор випливає, що існує така стала $M_2 > 0$, що

$$\sup_{n \geq 0} \sqrt{\int_0^{2\pi} |x(n,t)|^2\, dt} \leq M_2 \left(\sup_{n \geq 0} \sqrt{\int_0^{2\pi} |y(n,t)|^2\, dt} + \sqrt{\int_0^{2\pi} |c(t)|^2\, dt} \right)$$

З останніх двох нерівностей випливає, що

$$\sqrt{\int_0^{2\pi}\left|x(n,t)-u(n,t)\right|^2 dt} \le$$

$$\le M_1 M_2\left(\frac{1}{R_1^{q-n}}\left(\sqrt{\int_0^{2\pi}\left|b(t)\right|^2 dt}+\sqrt{\int_0^{2\pi}\left|c(t)\right|^2 dt}+\sup_{k\ge 0}\sqrt{\int_0^{2\pi}\left|y(k,t)\right|^2 dt}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{R_1^n}\left(\sqrt{\int_0^{2\pi}\left|b(t)\right|^2 dt}+\sqrt{\int_0^{2\pi}\left|c(t)\right|^2 dt}+\sup_{k\ge 0}\sqrt{\int_0^{2\pi}\left|y(k,t)\right|^2 dt}\right)\right).$$

Звідси випливає, що існують такі сталі $M>0,\ R>1$, що за тих же умов виконується така нерівність:

$$\int_0^{2\pi}\left|x(n,t)-u(n,t)\right|^2 dt \le$$

$$\le M\left(\frac{1}{R^{q-n}}\left(\int_0^{2\pi}\left|b(t)\right|^2 dt+\int_0^{2\pi}\left|c(t)\right|^2 dt+\sup_{k\ge 0}\int_0^{2\pi}\left|y(k,t)\right|^2 dt\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{R^n}\left(\int_0^{2\pi}\left|a(t)\right|^2 dt+\int_0^{2\pi}\left|c(t)\right|^2 dt+\sup_{k\ge 0}\int_0^{2\pi}\left|y(k,t)\right|^2 dt\right)\right).$$

Висновки

Таким чином, при довільних функціях $a,\ b,\ c\in L_2\left(\left[0;\ 2\pi\right]\right)$, які за нормою не перевищують норми $y(k)$ при k, точність наближення на певному відрізку всередині $\left[0,\ q\right]$, що знаходився на достатньо великій відстані l від його країв, буде обернено пропорційна величині $\sup\limits_{k\ge 0}\int_0^{2\pi}\left|y(k,t)\right|^2 dt$ і прямо пропорційна R^l. Збільшуючи q, можна отримати наближення з великою точністю значень функції при великих значеннях аргумента.

Література

1. *Дороговцев А.Я.* Ограниченные и периодические решения операторного уравнения Риккати с неограниченным оператором / А.Я. Дороговцев, Т.А. Петрова // Диффер. уравнения. — 1997. — Т. 33, № 3. — С. 309—315.

2. *Рисс Ф.* Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б.Секефальви-Надь. — Москва : Мир, 1976. — 587 с.

3. *Березанский Ю.М.* Функциональный анализ. Курс лекций / Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель. — Киев : Вища шк., 1990. — 600 с.

4. *Данфорд Н.* Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. — Москва : Изд-во иностр. лит., 1962. — 896 с.

5. *Городній М.Ф.* Апроксимація обмеженого розв’язку одного різницевого рівняння з необмеженим операторним коефіцієнтом розв’язками відповідних крайових задач / М.Ф. Городній, В.М. Романенко // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, № 4. — С. 548—552.

6. *Городній М.Ф.* Обмежені розв'язки двопараметричного різницевого рівняння у банаховому просторі / М.Ф. Городній, О.А. Лагода // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, № 12. — С. 1610—1614.

7. *Романенко В.М.* Наближення обмежених розв'язків різницевих рівнянь на півосі розв'язками відповідних задач Коші / В.М. Романенко // Вісник Київського університету, серія фізико-математичні науки. — 2009. —Вип.3. — С. 41—43.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕХОДА К СООТВЕТСТВУЮЩИМ РАЗНОСТНЫМ УРАВНЕНИЯМ НА ПОЛУОСИ

В.Н. Романенко
Национальный университет пищевых технологий

В статье получены достаточные условия приближения ограниченного решения линейного разностного уравнения в банаховом пространстве с неограниченными операторными коэффициентами решениями соответствующих задач Коши. Оценена скорость приближения. Рассматривается применение к решениям задач теплопроводности предварительно полученных результатов для линейных разностных уравнений с неограниченным операторным коэффициентом и одним начальным условием. Кроме того, в исследовании показано, как с высокой точностью приблизить решение уравнения теплопроводности с помощью решения краевых задач, в которых один конец фиксирован.

Ключевые слова: *линейное разностное уравнение, банахово пространство, задача Коши, оптимизация.*