

УДК 681.513.1

## **TENSOR ANALYSIS WITHIN THE AUTOMATED SYSTEM OF MILK PASTEURIZATION CONTROL**

**V. Sidletskiy, I. Elperin**

*National University of Food Technologies*

---

**Key words:**

*Automated control system  
Tensor  
Tensor analysis  
Tensor model  
Tensor basis change  
Tensor operations*

---

**Article history:**

Received 15.01.2017  
Received in revised form  
02.02.2017  
Accepted 24.02.2017

---

**Corresponding author:**

V. Sidletskiy  
**E-mail:**  
npnuht@ukr.net

---

**ABSTRACT**

The article describes the formulation of the problem of using tensor analysis to model the processes used in automated enterprise management system in case of dairy processing enterprises. The example of using process parameters and indicators of technological space as the components of multidimensional space of production processes and the example of the need to transform the resulting tensor depending on the moving conditions of the process are presented. The relevance of changing the basis and uniting the tensors is shown in this paper as well as tensor operations when modeling the automation systems processes.

## **ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ В АВТОМАТИЗОВАНІЙ СИСТЕМІ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСОМ ПАСТЕРИЗАЦІЇ МОЛОКА**

**В.М. Сідлецький, І.В. Ельперін**

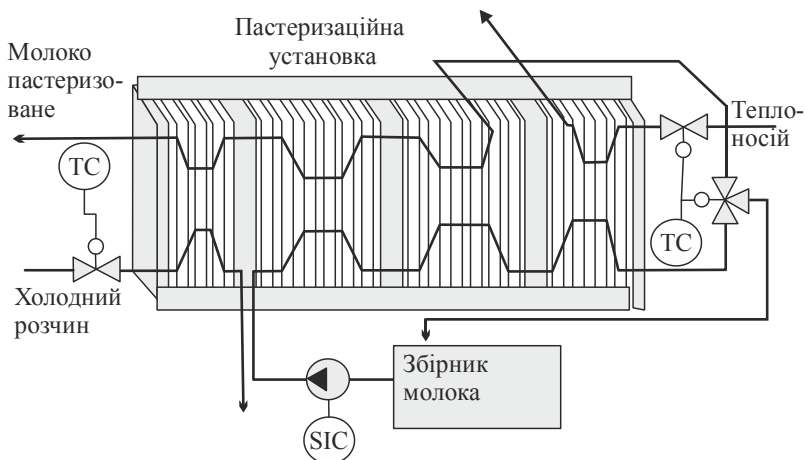
*Національний університет харчових технологій*

*У статті описано постановку задачі використання тензорного аналізу для моделювання процесів, що використовуються в автоматизованій системі управління підприємством, на прикладі ділянки молокопереробного підприємства. Наведено приклад використання технологічних параметрів і показників роботи технологічної ділянки як компонентів багатомірного простору процесів виробництва, а також приклад необхідності перетворення отриманого тензора з урахуванням умов ведення технологічного процесу. Доведено необхідність зміни базису та необхідність об'єднання тензорів, а також проведення операцій над ними при моделюванні процесів для системи автоматизації.*

**Ключові слова:** *автоматизована система управління, тензор, тензорний аналіз, тензорна модель, зміна базису тензора, операції з тензором.*

**Постановка проблеми.** В системах керування процесами молокопереробної промисловості використовуються як системи зі зворотним зв'язком,

так і без нього. Керування без зворотного зв'язку дає змогу оцінити управляючі діяння. Для побудови моделей процесів у молокопереробній промисловості використовувались методи побудови диференціальних та алгебраїчних рівнянь, що довели свою ефективність для вирішення компактної множини задач. Якщо розглядати реальні процеси, то використання класичних методів побудови моделей для системи автоматизації має певні обмеження. Наприклад, у системах автоматизації процесу пастеризації (рис. 1) потрібно підтримувати тільки два важливі параметри: температуру і час пастеризації.



**Рис. 1.** Спрощена схема пастеризації молока

Для цього процесу, з одного боку, цілком достатньо використання контурів із зворотним зв'язком (рис. 1), але, з іншого боку, при визначенні значення температури й часу пастеризації потрібно врахувати значно більшу кількість параметрів. У табл. 1 наведено перелік параметрів та їх числові значення для сирого молока та після термічної обробки.

*Таблиця 1. Показники молока*

Параметр	Сире молоко	Теплова обробка	
		Режим 1	Режим 2
Масова частка казеїну в молоці, %	2,65	2,61	2,55
Масова частка глобуліну в молоці, %	0,2	0,2	0,1
Масова частка альбуміну в молоці, %	0,35	0,33	0,31
Масова частка білка в молоці, %	3,20	3,14	2,96
Активна кислотність молока, рН	6,70	6,65	6,59
Титрована кислотність молока, °Т	17,0	17,0	17,0
Густина молока, кг/м <sup>3</sup>	1027,5	1027,3	1027,1
Масова частка сухих речовин, %	12,30	12,15	11,69
Вміст кальцію Ca <sup>2+</sup> , мг/100см <sup>3</sup>	12,83±0,08	11,12±0,09	10,83±0,11
Вміст розчинних білкових сполук, мкг/см <sup>3</sup>	361,3±10,2	334,6±11,6	321,2±9,3

Тобто досягнення високої якості технологічного процесу залежатиме не від досягнення заданих значень температури та часу пастеризації, а від

заданих значень якісних показників молока після процесу пастеризації згідно з показниками на початку процесу пастеризації. Саме тому необхідно будувати модель процесу, за допомогою якої можна аналізувати, як вплине вибране управляюче діяння температурою та часом пастеризації на стан показників на виході даної технологічної ділянки. Для нашого випадку цих показників 10 (табл. 1), тому при розрахунку диференційних або регресійних рівнянь для такої кількості показників необхідно приймати деякі припущення, наближення та не враховувати менш важливі показники. При чому зміна показників також буде залежати і від процесів та операцій, які проходять перед пастеризацією. Наприклад, процеси пастеризації будуть різними при одних і тих же значеннях параметрів у випадках, якщо виконується первинна чи повторна теплова обробка молока. Більш того, сам процес пастеризації не є чітко визначеним, тобто значення температури та часу змінюються в діапазоні значень, до того ж змінюються і діапазони значень (табл. 2).

*Таблиця 2. Режими пастеризації*

Режими пастеризації	Температура	Витримка
Тривалий режим	64—72 °С	30 хв
Короткочасний режим	72—75 °С	15—20 с
Миттєвий режим	85—90 °С	1—5 с

Для процесу пастеризації характерною особливістю є можливість зміни режиму пастеризації. В першому випадку це температура 60—75 °С і витримка близько 30 хв, в другому — температура 80—90 °С і час витримки 2—30 с, тобто виникає необхідність зміни базису. Таким чином, для системи автоматизації потрібна модель, яка буде враховувати: всі вхідні та вихідні параметри технологічного процесу; мати можливість реагувати на необхідність зміни діапазону управляючих діянь; враховувати попередні технологічні процеси та мати здатність інтегруватись у наступні моделі або розрахунки управляючих дій. Саме тому пропонується використати методи тензорного аналізу для розробки моделей і виконання розрахунків у системі керування процесом пастеризації.

Тензорний аналіз дає змогу спростити процес моделювання практично для будь-якої області за рахунок введення категорії багатовимірного простору. За допомогою розробленої тензорної моделі можна описувати всі поверхні незалежно від їх складності.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Тензорний аналіз і тензорне розкладання застосовуються у багатьох галузях, наприклад, для розробки нейронних мереж [1], проектування систем штучного зору [1; 2], обробки сигналів [3], обробки та аналізу даних [1; 4].

Тензорний аналіз являє собою узагальнення понять з векторного аналізу та дає змогу об'єднати масиви даних і фізичні величин складної природи, які не можуть бути описані або представлені у вигляді скалярів або векторів. Використання тензорного методу для побудови моделі виробничого процесу є найбільш виправданим.

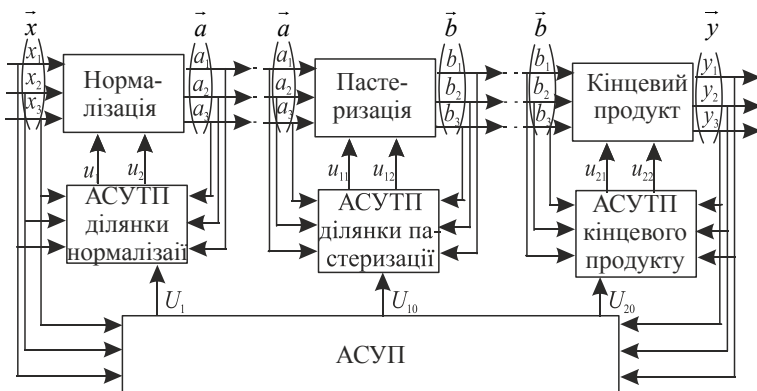
Насамперед тензор — це математичний об'єкт, який не залежить від зміни системи координат, але його компоненти при зміні системи координат пере-

творюються за певними математичними законами. Із тензором тісно пов'язаний його ранг, тому тензор може бути нульового, першого, другого тощо рангу. Тензор нульового рангу — це скаляр, що наслідком прямого вимірювання параметра, наприклад: температури, густини, витрати, тиску тощо. Більш складніші вимірювання, наприклад, спектроскопія, дають змогу отримати комплекс параметрів, який можна задати у вигляді вектора — це тензор першого рангу. У двовимірному просторі тензор другого рангу найпростіше уявити як матрицю, яка описує неоднорідність заданого простору та діє на вхідний вектор, змінюючи його напрям і масштаб. Як правило, для аналізу комплексних даних  $n$ -го порядку формується тензор  $n$ -го рангу, який використовується для моделювання функцій великого числа змінних.

Для роботи з тензорами широко використовуються програмні пакети для ЕОМ. Так, для MATLAB розроблені спеціалізовані програми, наприклад, Tensor Toolbox, TDALAB Laboratory [5; 6], що дають змогу вирішувати завдання представлення й обробки даних у вигляді тензорів. Дані програмні пакети застосовуються для обробки сигналів, систем контролю, нейронних мереж, нечіткої логіки, статистичної обробки та моделювання.

**Мета дослідження:** розробка тензорної моделі для системи управління процесом пастеризації молока на прикладі ділянки молокопереробного підприємства.

**Викладення основних результатів дослідження.** Для підвищення ефективності роботи молокопереробного підприємства необхідно інтегрувати автоматизовану систему управління процесу пастеризації молока та інших технологічних ділянок в автоматизовану систему управління підприємством. Така система управління включатиме в себе традиційні локальні контури управління параметрами та додаткові модулі, в яких будуть формуватись управляючі дії, що слугуватимуть завданням для ведення технологічного режиму, тобто завданням для локальних контурів управління. Для формування управляючих дій на верхніх рівнях потрібно, по-перше, зібрати інформацію, і, по друге, її обробити (проаналізувати), тобто потрібно об'єднати всі рівні керування підприємством (рис. 2).



**Рис. 2.** Багаторівнева система автоматизації процесу пастеризації

Тобто система представлятиме собою ієрархічну та модульну структуру (рис. 2), де на нижньому рівні формуються управляючі дії, які направлені на

підтримання технологічного режиму. На цей рівень надходять дані про наявні вхідні та необхідні вихідні показники молока після пастеризації. Відповідно до концепції інтегрованих систем, для кожної технологічної ділянки системи управління є аналогічними. Ці системи об'єднуються системою автоматизованого управління підприємством в цілому, на рівні якої формуються управляючі дії, що будуть слугувати завданням для нижніх рівнів.

Саме тому для систем керування процесом пастеризації потрібно не просто задати предметну область у вигляді моделі для прогнозування наслідків при нанесенні управляючих дій, а використати її для побудови причинно-наслідкового зв'язку між вхідними та вихідними параметрами наскрізно через усю багаторівневу систему з урахуванням роботи всіх суміжних підсистем. Саме тому завданням даного дослідження є розробка моделі процесу пастеризації з використанням методики тензорного аналізу. Тензорна модель дасть змогу об'єднати всі параметри та показники процесу у вигляді багатомірного простору, а методи тензорного аналізу мають потужний математичний апарат для її обробки.

Якість проходження кожного технологічного процесу характеризується наборами значень вхідних і вихідних параметрів, тому якщо прийняти, що  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , відповідно, вхідні та вихідні вектори простору технологічного процесу пастеризації, то, як і всі моделі, тензорна модель  $A$  буде виконувати перетворення вектора вхідних параметрів  $\vec{a}$  у вектор вихідних параметрів  $\vec{b}$ , тобто тензор  $A$  відображає  $\vec{a}$  в  $\vec{b}$ :

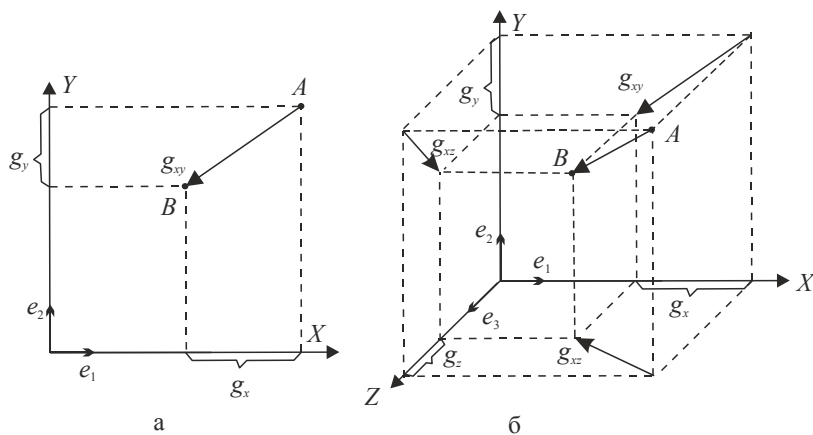
$$\vec{b} = A\vec{a}. \quad (1)$$

Вектор вхідних параметрів — це числові значення вхідних змінних, тобто це координати вектора, наприклад, для молока — це значення масових часток казеїну, глобуліну, альбуміну, білка; сюди також необхідно віднести значення кислотності, вміст кальцію. Але ці координати (тобто числа) самі по собі не мають ніякого сенсу і їх потрібно використовувати тільки з відповідними базовими векторами, що будуть утворювати систему координат простору технологічного процесу пастеризації. При цьому розмірність технологічного простору буде залежати від кількості змінних на вході і виході. Координатні осі вибираються як абсолютна система координат, що відповідатиме розмірності простору процесу пастеризації, тобто кількість осей буде відповідатиме кількості параметрів. При цьому всі базисні осі повинні бути взаємно перпендикулярні (ортогональні) та мати однакові розмірності і рівні одиничні міри (ортонормовані). Тобто система координат процесу пастеризації прийнята ортогональною і ортонормованою, або декартовою. Вектори базису вибрані одиничними та ортогональними  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{10}\}$ , де  $\vec{e}_1$  — одиничний вектор вмісту казеїну в молоці ( $\vec{e}_1 = 0,01\%$  масової частки казеїну в молоці);  $\vec{e}_2$  — одиничний вектор вмісту глобуліну в молоці ( $\vec{e}_2 = 0,1\%$  масової частки глобуліну в молоці);  $\vec{e}_3$  — одиничний вектор вмісту альбуміну в молоці ( $\vec{e}_3 = 0,01\%$  масової частки альбуміну в молоці);  $\vec{e}_4$  —

одичний вектор вмісту білка в молоці ( $\bar{e}_4 = 0,01\%$  масової частки білка в молоці);  $\bar{e}_5$  — одичний вектор активної кислотності молока ( $\bar{e}_5 = 0,01\text{pH}$  значення активної кислотності молока);  $\bar{e}_6$  — одичний вектор титрованої кислотності молока ( $\bar{e}_6 = 0,1^\circ\text{T}$  значення титрованої кислотності молока);  $\bar{e}_7$  — одичний вектор густини молока ( $\bar{e}_7 = 0,1\text{кг/м}^3$  значення густини молока);  $\bar{e}_8$  — одичний вектор вмісту сухих речовин молока ( $\bar{e}_8 = 0,01\%$  значення масової частки вмісту сухих речовин молока);  $\bar{e}_9$  — одичний вектор вмісту кальцію  $\text{Ca}^{2+}$  в молоці ( $\bar{e}_9 = 0,01 \text{ мг/100см}^3$  значення вмісту кальцію  $\text{Ca}^{2+}$  в молоці)  $\bar{e}_{10}$  — одичний вектор вмісту розчинних білкових сполук у молоці ( $\bar{e}_{10} = 0,1 \text{ мкг/см}^3$  значення вмісту розчинних білкових сполук у молоці).

Представити 10-вимірний простір для нашого технологічного процесу досить важко, тому на рис. 3а показане графічне представлення для двовимірного простору, де процес представлений вектором зміни масових часток казеїну та глобуліну в молоці під час пастеризації. На рис. 3б доповнений простір альбуміну, тобто завдяки використанню кожного показника як координатної вісі формується весь 10-вимірний простір.

Звичайно, реальні процеси не завжди матимуть вигляд лінійних залежностей, тому в таких випадках для тензорів можна використовувати криволінійні координатні осі, але в даній статті вони розглядатись не будуть.



**Рис. 3. Приклад представлення параметрів процесу пастеризації в двовимірному (а) і тривимірному (б) просторі**

У векторному просторі технологічного процесу виділено базис  $\{\bar{e}_i\}$ , відповідно до цього базису вектором вхідних параметрів буде набір чисел (компонент):  $\bar{a} = a_1\bar{e}_1, a_2\bar{e}_2, \dots, a_{10}\bar{e}_{10}$ , а для вихідних  $\bar{b} = b_1\bar{e}_1, b_2\bar{e}_2, \dots, b_{10}\bar{e}_{10}$ , тому вираз (1) набуде такого вигляду:

$$\vec{b}_j e_j = A_{ji} a_i \vec{e}_i, \quad (2)$$

або

$$b_j = A_{ji} a_i. \quad (3)$$

Компоненти  $a_i$  і  $b_j$  визначають вектори вхідних і вихідних параметрів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  щодо базису однозначно, а числа  $A_{ji}$  так само однозначно задають перетворення (1), тобто тензор  $A$ . Ці числа називаються компонентами тензора  $A$  щодо базису  $\{\vec{e}_i\}$ . Кількість їх дорівнює квадрату розмірності простору, тому тензор зручно записувати у вигляді квадратної матриці. Досить зручно записати вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  у вигляді стовпців, тому вираз (3) набуде такого вигляду:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1j} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{j1} & A_{j2} & \dots & A_{jj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_i \end{pmatrix}.$$

Але цей тензор описує тільки технологічний процес. У нашому випадку потрібно також задати управляючі діяння для цього процесу, тому до виразу (3) потрібно додати ще вектор управління  $\vec{u}$  і, відповідно, вектори базису  $\vec{e}_{11}$  — час пастеризації (с),  $\vec{e}_{12}$  — температура пастеризації (°C). Відповідно, вираз (3) набуде такого вигляду:

$$b_j = A_{ji}^k a_i u_k. \quad (4)$$

Як зазначалось вище, для процесу пастеризації значення температури та часу можуть вибиратись у діапазоні значень, причому діапазони цих значень також змінюються, тому зміна режиму буде означати зміну базису з  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{10}, \vec{e}_{11}, \vec{e}_{12}\}$ , де  $\vec{e}_{11}$  і  $\vec{e}_{12}$  вектори базису управління, на базис  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{10}, \vec{e}'_{11}, \vec{e}'_{12}\}$ , де  $\vec{e}'_{11}$  і  $\vec{e}'_{12}$  нові вектори базису управління, які

визначаються так: якщо  $\vec{e}_{11}$  — одиничний вектор у секундах, а  $\vec{e}'_{11}$  — одиничний вектор у хвилинах, то  $\vec{e}'_{11} = 60 \cdot \vec{e}_{11}$ . Оскільки час і температура пастеризації пов'язані між собою залежністю  $t = (36,84 - \ln z) / 0,48$ , де  $t$  — температура пастеризації,  $z$  — тривалість теплової обробки, то  $\vec{e}'_{12} = (36,84 - \ln e_{11}) / 0,48$ .

Графічне представлення зміни базису для системи з трьох координат можна показати переміщенням по логарифмічній функції з поворотом системи (рис. 4).

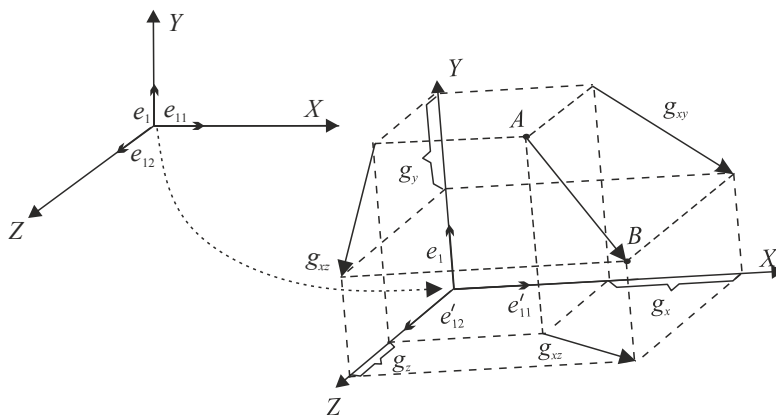


Рис. 4. Графічне представлення зміни базису

Як показано на рис. 4, при зміні базису змінюються і компоненти тензора, тому компоненти тензора потрібно перерахувати за новим базисом і, як наслідок, проводиться перевірка отриманих результатів, а саме: чи утворює новий набір чисел тензор.

При моделюванні промислових об'єктів тензори дають змогу не тільки побудувати модель багатомірного об'єкта, а й проводити над нею алгебраїчні операції: об'єднання тензорів, їх додавання та множення. Наприклад, для двох тензорів  $\underline{A} = a_{ij}$  та  $\underline{B} = b_{ij}$  їх сума визначаються за формулою (5), а добуток двох тензорів  $\underline{A} = a_{ij}$  та  $\underline{B} = b_{pqr}$  — за формулою (6):

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}; \quad (5)$$

$$a_{ij} b_{pqr} = c_{ijpqr}. \quad (6)$$

Тобто при виконанні алгебраїчних операцій над тензорами технологічних ділянок і рівнів управління формується тензорна модель для всього підприємства та, відповідно, до всіх ієрархій керування.

Для використання сформованого тензора як моделі технологічного процесу для автоматизованої системи керування, а саме: для розрахунку управляючого діяння чи знаходження прогнозованого значення, проводиться зменшення розмірності тензора до розмірності вхідної інформації. Для цього використовують математичний апарат зменшення розмірності тензора — тензорне розкладання. Найбільш вживаними є розкладання Таккера, сингулярне розкладання та скелетне розкладання [1—6].

## Висновки

Унікальна властивість тензорів полягає в тому, що вони можуть бути як скалярами, так і векторами, тому тензорний аналіз можна розглядати як розширення й узагальнення векторного аналізу від трьох до  $n$ -мірних просторів.

Якщо розроблені тензори для технологічного апарата або лінії, то залежно від необхідності розробки моделі ділянки виробництва або всього виробництва тензори можна додавати чи множити. При цьому будуть сформовані



нові тензори, тобто буде розроблена нова тензорна модель ділянки чи всього підприємства, яку можна використовувати для розрахунків у системі автоматизації всього підприємства.

### **Література**

1. Cichocki A., Zdunek R., Phan A.-H., Amari S. Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations: Applications to Exploratory Multi-way Data Analysis and Blind Source Separation. — Chichester : Wiley, 2009. — 500 p.
2. Cammoun L., Castano-Moraga C. A., Munoz-Moreno E., Sosa-Cabrera D., Acar B., Rodriguez-Florido M. A., Brun A., Knutsson H., Thiran J. P. A review of tensors and tensor signal processing. In S. Aja-Fernandez, R. de Luis Garcia, D. Tao, and X. Li, editors, Tensors in Image Processing and Computer Vision. — Springer, 2009. — P. 1—32. — ISBN 978-1-84882-298-6.
3. Nion D. and Sidiropoulos N.D. Tensor Algebra and Multi-dimensional Harmonic Retrieval in Signal Processing for MIMO Radar, IEEE Trans. on Signal Processing, — Vol. 58, # 11. — Nov. 2010. — P. 5693—5705.
4. Марченко О.О. Розробка семантико-синтаксичної моделі природної мови за допомогою методів невід'ємної тензорної і матричної факторизації / О.О. Марченко // Проблеми програмування. — 2014. — № 2—3. — С. 263—272 [Електронний ресурс]. — Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/Progr\\_2014\\_2-3\\_33](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Progr_2014_2-3_33).
5. Tensor Toolbox version 2.6 by Brett W. Bader, Tamara G. Kolda, Jimeng Sun, Evrim Acar, Daniel M. Dunlavy, Eric C. Chi, Jackson Mayo, et al. Copyright 2015, Sandia National Laboratories. Released February 6, 2015.
6. TDALAB Laboratory for Tensor Decomposition and Analysis by Guoxu Zhou, Andrzej Cichocki 2012 Cichocki Laboratory for Advanced Brain Signal Processing.

## **ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ В АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ПАСТЕРИЗАЦИИ МОЛОКА**

**В.М. Сидлецкий, И.В. Эльперин**

*Национальный университет пищевых технологий*

*В статье описана постановка задачи использования тензорного анализа для моделирования процессов, используемых в автоматизированной системе управления предприятием, на примере участка молокоперерабатывающего предприятия. Показан пример использования технологических параметров и показателей работы технологического участка как компонентов многомерного пространства процессов производства, а также пример необходимости преобразования полученного тензора в зависимости от условий ведения технологического процесса. Доказана необходимость изменения базиса и необходимость объединения тензоров, а также проведения операций над тензором при моделировании процессов для системы автоматизации.*

**Ключевые слова:** *автоматизированная система управления, тензор, тензорный анализ, тензорная модель, изменение базиса тензора, операции с тензором.*